9

Dasparzhioù dirgendalc'hek standur

9.1 DASPARZH KENDALC'HEK UNVAN

9.1.1 Despizadur

Gwehanadur kendalc'hek unvan $\mathcal{U}(0,1)$ a reer eus ar gwehanadur dargouezhel X a zo e debekter :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{mar } \ 0 < x < 1, \\ 0 & \text{mar } \ x < 0 \text{ pe } x > 1. \end{cases}$$

Alese ar gevreizhenn dassammañ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{mar } \ x \leqslant 0, \\ x & \text{mar } \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{mar } \ x \geqslant 1. \end{cases}$$

9.1.2 Naouusterioù an dasparzh kendalc'hek unvan

Ar gwehanadur kendalc'hek unvan zo kemparzhek e-keñver 1/2 : par da 1/2 eo ar c'hreizad hag an engortoz jedoniel. Ar gevreizhenn naouus zo :

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{itx}\, dx = \frac{e^{it} - 1}{it} = e^{it/2} \frac{\sin t/2}{t/2}.$$

A se :

$$\varphi(t) = e^{it/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)4^r} \frac{t^{2r}}{2r!},$$

pezh a ziskouez ez eo par al lankadoù kreizet a urzh hebar da :

$$\mu_{2r} = \frac{1}{(2r+1)4^r},$$

al lankadoù kreizet a urzh ampar o vezañ mannel dre berzh ar c'hemparzh. Al lankadoù ankreizet a c'hounezer war-eeun :

$$m_r = \int_0^1 x^r \, dr = \frac{1}{r+1}.$$

Dezren a reer alese an naouusterioù :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2}, \\ V(X) &= \frac{1}{12}, \\ \mu_4(X) &= \frac{1}{80}, \end{aligned}$$

hag all.

9.1.3 Dasparzh reizhkorn

Dasparzh reizhkorn a reer eus hini ur furm linennek eus ar gwehanadur kendalc'hek unvan :

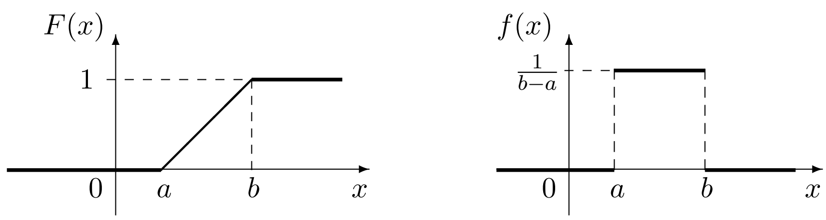
$$\mathcal{U}(a,b) = a + (b-a)\mathcal{U}(0,1) \quad (b > a).$$

Dleet eo an adanv *reizhkorn* da stumm an tellun : ur reizhkorn a ziaz $b - a$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{mar} \quad a < x < b, \\ 0 & \text{mar} \quad x < a \text{ pe } x > b. \end{cases}$$

E gevreizhenn dassammañ zo :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{mar} \quad x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{mar} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{mar} \quad x \geqslant b. \end{cases}$$



Kevreizhenn dassammañ $\mathcal{U}(0,1)$ Tellun $\mathcal{U}(0,1)$

E naouusterioù a zezreer diwar re ar gwehanadur kendalc'hek unvan $\mathcal{U}(0,1)$:

$$\begin{aligned} E\left[\mathcal{U}(a,b)\right] &= \frac{a+b}{2} \quad \text{kreiz kemparzh}, \\ \mu_{2r}\left[\mathcal{U}(a,b)\right] &= \frac{(b-a)^{2r}}{(2r+1)4^r}, \\ \varphi(t) &= e^{it(a+b)/2}\frac{\sin t/2}{t/2}. \end{aligned}$$

9.2 DASPARZH $\boldsymbol{\gamma_\nu}$

9.2.1 Despizadur

Gwehanadur $\boldsymbol{\gamma_\nu}$ — pe c'hoazh *gwehanadur Pearson a'r rizh III* — a reer eus ar gwehanadur kendalc'hek savelet dre an tebekter :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{mar } x < 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-x} x^{\nu-1} & \text{mar } x > 0, \end{cases}$$

ν o vezañ un arventenn anleiel ha Γ ar gevreizhenn eulerat a'n eil spesad (kevreizhenn *gamma*) :

$$\boxed{\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1}\, dx}.$$

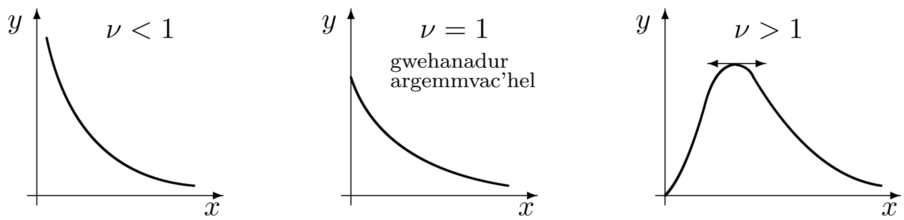
ha mard eo kevan an arventenn ν :

$$\boxed{\Gamma(\nu) = (\nu - 1)!}.$$

Tellun ar gwehanadur γ_ν a c'hell kaout unan eus an tri stumm hollek amañ dindan, diouzh ma'z eo ν bihanoc'h eget 1, par da 1, pe brasoc'h eget 1.

Evit $\nu = 1$ e vez graet *gwehanadur argemmvac'hel* eus γ_1 :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{mar } x < 0, \\ e^{-x} & \text{mar } x > 0, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{mar } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{mar } x \geqslant 0. \end{cases}$$



Tellunioù ar gwehanadur $\boldsymbol{\gamma_\nu}$

Despizadur all evit ar gwehanadur argemmvac'hel a arventenn $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

Gwehanadur dirgendalc'hek a zo e gevreizhenn dasparzh savelet dre :

$$F(x) = 0 \quad \text{mar} \quad x < 0 \quad \text{ha} \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{mar} \quad x \geqslant 0.$$

Tebekter ar gwehanadur zo savelet dre :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{mar } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{mar } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Engortoz jedoniel $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, hebiant $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, strewant $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

9.2.2 Naouusterioù ar gwehanadur γ_ν

Ar *mod* zo par da $\nu - 1$ mard eo ν brasoc'h pe bar ouzh 1 ha da 0 mard eo ν bihanoc'h pe bar ouzh 1 :

$$M_0 = \nu - 1 \quad \text{mar} \quad \nu \geqslant 1,$$
$$M_0 = 0 \quad \text{mar} \quad \nu \leqslant 1.$$

Al lankadoù ankreizet m a revez holl ha par int da :

$$m_r = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-x} x^{\nu+r-1}\, dx = \frac{\Gamma(\nu + r)}{\Gamma(\nu)},$$

bezet :

$$m_r = \nu(\nu+1)\dots(\nu+r-1).$$

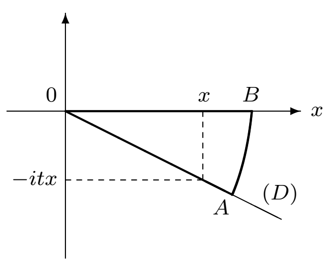
Ent dibarek ez eo an engortoz jedoniel par d'an arventenn ν.

Ar gevreizhenn naouus d'ar gwehanadur γ_ν zo :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-x} x^{\nu-1} e^{itx}\, dx,\\ &= \frac{1}{(1-it)^\nu} \int_D \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-x} z^{\nu-1}\, dz,\end{aligned}$$

ma'z eo d al ledeeunenn a'r blaenenn gemplezh he atalad :

$$z = x(1 - it), \quad x \geqslant 0.$$



Evit jediñ ar sammegenn-se (lakaat a reomp ν da niver kevan da aesaat ar jediñ, hogen talvoudek eo an disoc'hoù evit ν kevan pe get), desellomp an erolad

$OABO$ ma'z eo AB ur warenn gelc'h kreizet en O. Ar gevreizhenn $e^{-x}z^{\nu-1}/\Gamma(\nu)$ zo hollzelvat e diabarzh an domani bevennet gant an erolad-se. Neuze ez eo mannel ar sammegenn war an erolad. A du 'rall e tenn ar sammegenn war AB war-du mann pa denn skin ar c'helc'h war-du an anvevenn. Da heul, ar sammegenn war OA (a denn war-du ar sammegenn war al ledeeunenn D) a denn da vezañ par d'ar sammegenn war OB (a denn war-du 1). Neuze :

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1-it)^\nu}.$$

Alese e tezastumer :

a) kloz eo ar familh γ_ν e-keñver ar sammañ. Mard eo dizalc'h γ_ν ha γ_μ : $\gamma_\nu + \gamma_\mu = \gamma_{\nu+\mu}$.

b) an eil kevreizhenn naouus zo :

$$\psi(t) = \nu \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(it)^r}{r} = \nu \sum_{r=1}^{\infty} (r-1)! \frac{i^r t^r}{r!}.$$

ha da heul ez eo an dassammant c_r :

$$c_r = \nu(r-1)!$$

Alese e tezreer :

$$\left.\begin{array}{rcl} E\left[\gamma_\nu\right] & = & \nu, \\ V\left[\gamma_\nu\right] & = & \nu, \end{array}\right\} \text{ An engortoz hag an hebiant zo par d'an arventenn, evel evit dasparzh Poisson}$$

$$\begin{array}{rcl} \mu_3\left[\gamma_\nu\right] & = & 2\nu, \\ \mu_4\left[\gamma_\nu\right] & = & 3\nu^2 + 6\nu, \end{array}$$

9.2.3 Gwehanadur $\gamma_\nu(a, b)$

gwehanadur $\gamma_\nu(a, b)$ a reer eus ar gwehanadur savelet diwar ar gwehanadur γ_ν dre dreuzfurmadur linennek :

$$\gamma_\nu(a, b) = a + b\gamma_\nu.$$

E debekter zo :

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot e^{-\frac{x-a}{b}} \cdot \frac{(x-a)^{\nu-1}}{b^{\nu}}, \text{ evit } x > a$$
$$0, \text{ evit } x < a.$$

E lankadoù a zezreer diwar re ar gwehanadur γ_ν:

$$\begin{aligned} &E\left[\gamma_\nu(a,b)\right] = a + b\nu, \\ &V\left[\gamma_\nu(a,b)\right] \quad = b^2\nu, \\ &\text{h.a.} \end{aligned}$$

Ar gwehanadurioù $\boldsymbol{\gamma_\nu(a,b)}$ a un arventenn b a ampar ur familh divarventenn kloz e-keñver ar sammañ :

$$[\gamma_{\nu h}(a_h, b) \text{ peurzizalc'h kenetrezo}] \Rightarrow \left[\sum_{h=1}^{k} \gamma_{\nu h}(a_h, b) = \gamma_{\sum_{h=1}^{k}} \left(\sum_{h=1}^{k} a_h, b\right)\right].$$

9.2.4 Genel ar gwehanadur γ_ν

Adkemeromp ar c'hentreadoù e diazez un argerzh Poisson : an darvoudoù $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ o c'hoarvezout er predoù dargouezhek $T_1, \ldots, T_i, \ldots$, zo hevelep ma'z eo :

1. dizalc'h niver an darvoudoù A o tinodiñ etre t ha $t+h$ diouzh niver an darvoudoù A dinodet etre 0 ha t ;
2. par an debegezh e tinodfe un darvoud A d'an nebeutañ etre t ha $t+h$ da :

$$ph + o(h) \; ;$$

3. a-urzh gant $o(h)$ an debegezh e tinodfe daou zarvoud A pe vuioc'h etre t ha $t+h$.

Diskouezet hon eus ez eo dasparzh niver sevenidigezhioù an darvoudoù A e-doug un entremez τ e bad dasparzh Poisson $p\tau$ e arventenn hag ez eo niver ar sevenidigezhioù e-doug entremezioù disparti gwehanadurioù Poisson dizalc'h.

Savelomp ar gwehanadur T_1, pred dinodiñ ar *c'hentañ* darvoud A o c'hoarvezout adalek ar pred orin 0. Ar c'hentañ darvoud a zinod *kent* ar pred t mar dinod e-doug an entremez $[0,t]$ un darvoud A d'an nebeutañ. Neuze, mar arouez $F_1(t)$ kevreizhenn dassammañ ar gwehanadur T_1 ez eus :

$$F_1(t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-pt}.$$

Da heul, ar gwehanadur T_1 zo dirgendalc'hek ha dezhañ an tebekter :

$$f_1(t) = e^{-pt}p,$$

eleze ar gwehanadur T_1 zo ar gwehanadur :

$$T_1 = \frac{1}{p}\gamma_1.$$

Hollekoc'h, an n-vet darvoud A a c'hoarvez kent ar pred t mar c'hoarvez e-doug an entremez $[0,t]$ n darvoud A d'an nebeutañ :

$$\begin{aligned} F_n(t) &= 1 - p_0(t) - \cdots - p_{n-1}(t) \\ &= 1 - e^{-pt}\left(1 + \frac{pt}{1!} + \frac{p^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{(pt)^{n-1}}{(n-1)!}\right). \end{aligned}$$

Alese an tebekter :

$$f_n(t) = pe^{-pt}\left[1 + \frac{pt}{1!} + \cdots + \frac{(pt)^{n-1}}{(n-1)!}\right] - pe^{-pt}\left[1 + \frac{pt}{1!} + \cdots + \frac{(pt)^{n-2}}{(n-2)!}\right],$$

bezet :

$$\boxed{f_n(t) = \frac{e^{-pt}(pt)^{n-1}}{(n-1)!}p},$$

a ziskouez ez eo T_n ar gwehanadur :

$$\boxed{T_n = \frac{1}{p}\gamma_n}.$$

Studiomp dasparzh an daouac'h (T_1, T_2). An debegezh e c'hoarvezfe ar c'hentañ darvoud etre t_1 ha $t_1 + dt_1$ hag an eil etre $t_2 + dt_2$ zo par da liesâd ar pevar darvoud dizalc'h :

1. etre 0 ha t_1 : dinod ebet,
2. etre $t_1 + dt_1$ ha t_2 : dinod ebet,
3. etre t_1 ha $t_1 + dt_1$: 1 dinod,
4. etre t_2 ha $t_2 + dt_2$: 1 dinod,

bezet :

$$e^{-pt_1} \cdot e^{-p(t_2-t_1-dt_1)} \cdot e^{-pdt_1} pdt_1 \cdot e{-}pdt_2 pdt_2,$$

eleze o rannañ dre $dt_1 dt_2$ hag o tremen d'an harz evit $dt_1 \to 0$ ha $dt_2 \to 0$:

$$e^{-pt_2} p^2.$$

Da heul, tebekter an daouac'h (T_1, T_2) zo $e^{-pt_2} p^2$ ha tebekter an daouac'h $(T_1, T_2 - T_1)$ zo (ar jakobant zo par da 1) :

$$pe^{-pt_1} \cdot pe^{-p(t_2-t_1)}.$$

O vezañ ma'z eo tebekter T_1 par da pe^{-pt_1} e teu alese ez eo ent dizalc'h ar gwehanadurioù T_1 ha $T_2 - T_1$ ar gwehanadur $(1/p)\gamma_1$.

Dre an un poellata d'al lerc'hiad $(T_1, \ldots, T_n)$, a zo e debekter :

$$e^{-pt_n} p^n = pe^{-pt_1} \cdot pe^{-p(t_2-t_1)} \ldots pe^{-p(t_n-t_{n-1})},$$

e c'hounezer an disoc'h : an entremezioù amzer etre degouezhadurioù daou zarvoud kenheuilh zo peurzizalc'h kenetrezo ha heuliañ an dasparzh $(1/p)\gamma_1$.

Savelet hon eus ez eo p engortoz jedoniel niver an darvoudoù sevenet dre unanenn bad. O vezañ ma'z eo $E(\gamma_1) = 1$, $1/p$ zo ivez engortoz jedoniel an entremez amzer etre degouezhadur daou zarvoud kenheuilh : mar tremen war ur gourhent ent keitat 1200 karbed en un eurvezh ($p = 1200$ karbed$/h$), an entremez amzer keitat etre degouezhadurioù daou garbed kenheuilh zo 3 eilenn ($1/p = 3\ s$), pezh zo kempoell.

EVEZHIADENN — Diwar vont hon eus dienaet ar parder :

$$F_n(t) = 1 - e^{-pt} \left(1 + \frac{pt}{1!} + \frac{p^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{(pt)^{n-1}}{(n-1)!} \right),$$

eleze :

$$P\left(\frac{1}{p}\gamma_n < t\right) = P\big(\mathcal{P}(pt) \geqslant n\big)$$

daveadur a c'haller skrivañ e daou rezh kevatal :

$$\begin{array}{ll} P(\gamma_n < x) = P(\mathcal{P}(x) \geqslant n) & n \text{ kevan muiel} \\ P(\mathcal{P}(m) \leqslant x) = P(\gamma_{x+1} > m) & n \text{ kevan anleiel} \end{array}$$

9.2.5 Kentañ dasparzh Laplace

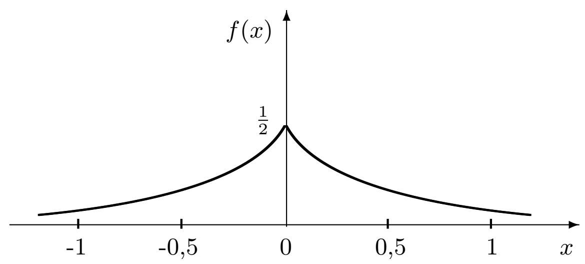
Lavaret e vez ez eus d'ur gwehanadur X *kentañ dasparzh Laplace* mard eo e debekter par da :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Da heul ez eo e gevreizhenn dassammañ :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{mar} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{mar} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Amañ dindan derc'hennadur kevregat tebekter gwehanadur Laplace :



An dasparzh-se zo kemparzhek e-keñver ahel an hedennoù hag ar gwehanadur $|X|$ zo dezhañ an dasparzh γ_1 anvet dasparzh argemmvac'hel. Da heul ez eo mannel al lankadoù a urzh ampar dre berzh ar gemparzhegezh hag al lankadoù a urzh hebar zo kewerzh gant lankadoù ankreizet ar gwehanadur a un urzh γ_1 :

$$\begin{aligned} m_{2r+1} &= \mu_{2r+1} = 0, \\ m_{2r} &= \mu_{2r} \quad = E\left[(\gamma_1)^{2r}\right] = (2r)! \end{aligned}$$

Ent dibarek, an engortoz jedoniel zo mannel hag an hebiant par da 2.

Ar gevreizhenn naouus zo :

$$\begin{aligned} E\left[e^{itX}\right] &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+it)}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x(1-it)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x(1+it)}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x(1-it)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+it} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-it}. \end{aligned}$$

Eleze :

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}(2r)!\frac{i^{2r}t^{2r}}{(2r)!}$$

hag

$$\psi_X(t) = -\ln(1+t^2) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r)!}{r}\frac{i^{2r}t^{2r}}{(2r)!},$$

an dispakadoù-se o vezañ kengerc'hus evit $|t| < 1$ nemetken.

E se ez eo mannel al lankadoù hag an dassammantoù a urzh ampar, hag al lankadoù a urzh hebar o deus ar werzhad :

$$m_{2r} = \mu_{2r} = (2r)!$$

hag an dassammantoù a urzh hebar :

$$c_{2r} = \frac{(2r)!}{r}.$$

9.3 DASPARZH REOL

9.3.1 Dasparzh reol kreizet direet

9.3.1.1 Despizadur

Gwehanadur reol kreizet direet notet $\mathcal{N}(0,1)$ a reer eus ar gwehanadur dargouezhel dirgendalc'hek savelet war $\mathbb{R}$ dre an tebekter :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty}.$$

E gevreizhenn dassammañ a arouezier dre $\Pi(x)$:

$$\boxed{\Pi(x) = \int_{-\infty}^{x} y(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du}.$$

Gwiriañ a reer evel ma tere ez eo $\Pi(x)$ ur gevreizhenn dassammañ :

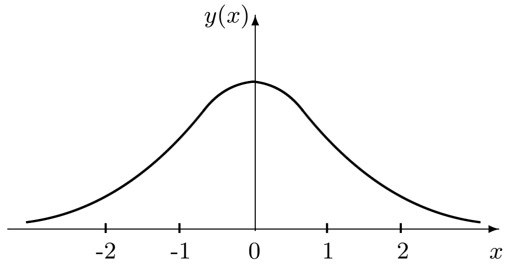
$$\begin{aligned} y(x) \geqslant 0, \quad \Pi(-\infty) = 0, \quad \Pi(+\infty) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-v} v^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}\,dv = 1. \end{aligned}$$

9.3.1.2 Krommenn Gauss

An tebekter o vezañ ur gevreizhenn hebar da x ez eo kemparzhek dasparzh ar gwehanadur reol kreizet direet e-keñver ahel an hedennoù :

$$\begin{aligned} y(x) &= y(-x), \\ \Pi(x) &= 1 - \Pi(-x). \end{aligned}$$

Tellun ar gwehanadur — anvet krommenn war gloc'h pe krommenn Gauss — a erouezer amañ dindan :

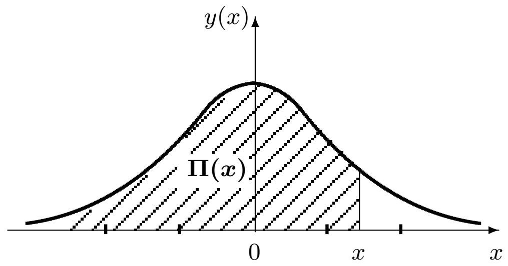


9.3.1.3 Kevreizhenn dassammañ

• **Kevreizhenn $\boldsymbol{\Pi(x) = P\,(\mathcal{N} \leqslant x)}$**
Ar gevreizhenn ingalañ boasañ eo ar gevreizhenn dassammañ :

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Dre berzh ar gemparzhegezh e teu $\Pi(0) = 0,5$ ha $\Pi(-x) = 1 - \Pi(x)$. E dibenn al levr e roomp un daolenn werzhadoù $\Pi(x)$.



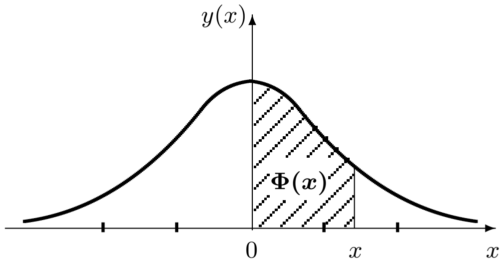
• **Kevreizhenn $\boldsymbol{\Phi(x)}$**
A-wechoù ez arverer ar gevreizhenn :

$$\Phi(x) = P(0 < \mathcal{N} \leqslant x) = \int_0^x y(u)\, du.$$

A se e teu : $\Pi(x) = 0,5 + \Phi(x)$ — teurel evezh ouzh arouez $\Phi(x)$ —, hag alese :

$$\boxed{\Phi(x) = \Pi(x) - 0,5}\,.$$

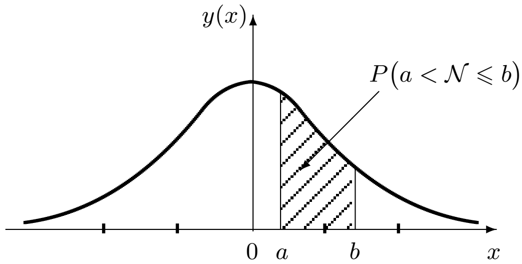
Ar reollun-se a gevaraez jediñ gwerzhadoù $\Phi(x)$ diwar un daolennad werzhadoù eus $\Pi(x)$.



• **Jediñ $P\big(a < \mathcal{N} \leqslant b\big)$**

Bez' ez eus :

$$P(a < \mathcal{N} \leqslant b) = \Pi(b) - \Pi(a) = 0,5 + \Phi(b) - \big[0,5 + \Phi(a)\big] = \Phi(b) - \Phi(a).$$

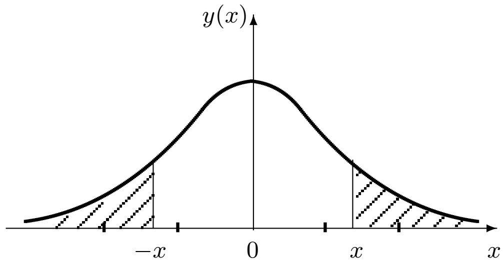


• **Jediñ $P\big(|\mathcal{N}| > x\big)$**

Notañ ez eo tebegezh distremen ur forc'had dizave $P\big(|\mathcal{N}| > x\big)$:

$$1 - P\big(- x < \mathcal{N} \leqslant x\big) = P\big(|\mathcal{N}| > x\big) = 2\int_x^{\infty} y(u)\, du = 2\big(1 - \Pi(x)\big).$$

A-wechoù ez arouezier dre $P(x)$ an debegezh stag ouzh teskad ar gwerzhadoù e-maez an entremez $[-x, x]$, eleze $P\big(|\mathcal{N}| > x\big)$. Amañ dindan an derc'hennadur kevregat :



EVEZHIADENN 1 — Teurel evezh :

$$P(\mathcal{N} > x) = 1 - P(\mathcal{N} \leqslant x) = 1 - \Pi(x).$$

$$P(a < \mathcal{N} \leqslant b) = P(a \leqslant \mathcal{N} \leqslant b) = P(a < \mathcal{N} < xb) = \Pi(b) - \Pi(a).$$

Hag ivez :

$$P(\mathcal{N} \leqslant x) = P(\mathcal{N} > b) = 1 - \Pi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

EVEZHIADENN 2 — Kavet e vo e dibenn al levr un nebeut taolennoù gwerzhadoù evit $\Pi(x)$ ha $P(x)$.

9.3.1.4 Naouusterioù ar gwehanadur reol kreizet direet

Dre berzh kemparzhegezh an dasparzh ez eo par da vann ar *mod*, ar *c'heitad* hag an *engortoz*.

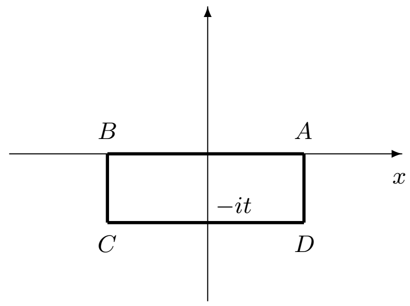
Ar gevreizhenn naouus zo :

$$\varphi(t) = E\left(e^{it\mathcal{N}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-it)^2/2}\, dx.$$

Evit jediñ ar sammegenn-se, desellomp er blaenenn gemplezh sammegenn ar gevreizhenn $e^{-x^2}/2$ war an erolad ABCD derc'hennet amañ dindan :

$$\int_{ABCD} e^{-x^2}/2\, dz,$$

ma klot CD ouzh delvadoù poentel ar c'hemplezhion $z = x - it$ (x ha t o vezañ gwerc'helion).



Mannel eo ar sammegenn-se dre berzh delakadenn Cauchy, rak n'eus blein ebet en domani reizhkornek $ABCD$ evit ar gevreizhenn $e^{-z^2/2}$, un domani hollzelvadezh eo eviti :

$$\int_{ABCD} e^{-z^2/2}\,dz = \int_{AB} e^{-z^2/2}\,dz + \int_{BC} e^{-z^2/2}\,dz + \int_{CD} e^{-z^2/2}\,dz + \int_{DA} e^{-z^2/2}\,dz = 0.$$

Hogen ar sammegennoù a-hed BC ha DA a denn war-du mann pa bella A ha B war-du an anvevenn war ahel ar gwerc'helion, pa denn $e^{-z^2/2}$ war-du mann e pep poent eus BC pe DA. Neuze :

$$\int_{CD} e^{-z^2/2}\,dz \to \int_{BA} e^{-z^2/2}\,dz \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dz = \sqrt{2\pi}.$$

A du 'rall e tenn ar sammegenn a-hed CD war-du :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-it)^2/2}\,dx.$$

Da heul ez eo ar gevreizhenn naouus da $\mathcal{N}$:

$$\varphi_{\mathcal{N}}(t) = e^{-t^2/2}.$$

A se ez eo mannel an dassammantoù c_r holl, nemet an eil c_2 a zo par da 1.

Neuze :

$$\begin{aligned} E(\mathcal{N}) &= c_1 = 0, \\ V(\mathcal{N}) &= c_2 = 1, \\ \mu_3(\mathcal{N}) &= c_3 = 0, \\ \mu_4(\mathcal{N}) &= c_4 + 3c_2^2 = 3, \\ h.a. \end{aligned}$$

E se ez eo mannel engortoz jedoniel $\mathcal{N}$ ha par da 1 eo e hebiant, pezh a gantreizh an anv a wehanadur reol *kreizet direet*. Al lankadoù kreizet zo par d'al lankadoù ankreizet, pa'z eo $E(\mathcal{N}) = 0$. Dre berzh ar gemparzhegezh ez eo mannel al lankadoù a urzh ampar. Dewerzhañ a reer al lankadoù a urzh hebar diwar ar gevreizhenn naouus :

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i^{2r} t^{2r}}{2^r r!} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^r r!} \frac{i^{2r} t^{2r}}{2r!}.$$

Alese :

$$m_{2r} = \mu_{2r} = \frac{(2r)!}{2^r r!} = 1.3.5 \dots (2r-1).$$

9.3.2 Dasparzh reol pe dasparzh Gauss

9.3.2.1 Despizadur

Gwehanadur reol [1] a reer eus ur gwehanadur dargouezhel X savelet diwar ar gwehanadur reol kreizet direet dre un treuzfurmadur linennek :

$$X = a + b\mathcal{N}.$$

Taolomp evezh da gentañ en deus $\mathcal{N}$ ha $-\mathcal{N}$ an un dasparzh, pa'z eo kemparzhek tellun $\mathcal{N}$ e-keñver ahel an hedennoù.

Da heul, dizalc'h diouzh arouez b eo X, eleze $X = a + b\mathcal{N}$ ha $X' = a - b\mathcal{N}$ zo dezho an un dasparzh hag $a + |b|\mathcal{N}$. A c'haller gwiriañ ivez dre debekter X na engwerc'h b nemet dre e werzh dizave :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi |b|}} \left(\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2} \right] \right).$$

[1] Lavaret e vez c'hoazh *gwehanadur gaosat* pe *gwehanadur Laplace-Gauss*.

Engortoz jedoniel X hag e strewant zo a-getep :

$$\begin{aligned} E(X) &= E(a+b\mathcal{N}) &= a+bE(\mathcal{N}) &= a, \\ \sigma(X) &= \sigma(a+b\mathcal{N}) &= |b|\sigma(\mathcal{N}) &= |b|. \end{aligned}$$

E se, an div arventenn a ha $|b|$ naouus d'ur gwehanadur reol zo par a-getep d'an engortoz jedoniel ha d'ar strewant. Setu perak e vezont aroueziet boas dre m ha σ. Disoc'hañ a reer enta gant :

$$X = a + b\mathcal{N} \longrightarrow X = \mathcal{N}(a, |b|)$$
$$X = \mathcal{N}(m, \sigma) \longrightarrow \frac{X-m}{\pm b} = \mathcal{N}(0,1).$$

Eleze :

$$\mathcal{N}(m,\sigma) = m + \sigma\mathcal{N}(0,1).$$

E se :

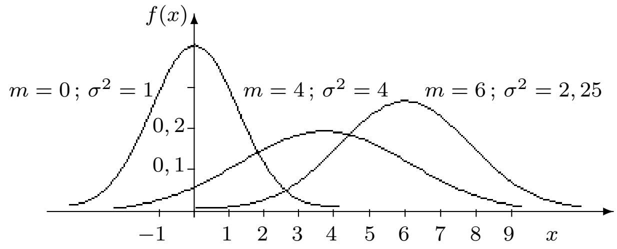
> Bezet X ur gwehanadur dargouezhel dasparzhet $\mathcal{N}(m,\sigma)$. Neuze :
>
> $$F(X) = P(X \leqslant x) = \Pi\left(\tfrac{x-m}{\sigma}\right) \quad \text{(Kevreizhenn dassammañ)} ;$$
> $$f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{(Tebekter)} ;$$
> $$P(a \leqslant X \leqslant b) = \Pi\left(\tfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Pi\left(\tfrac{a-m}{\sigma}\right).$$
>
> Π zo kevreizhenn dassammañ an dasparzh reol kreizet direet.

A du 'rall evit $x = m$ e teu :

$$f(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

pezh a ziskouez e vo seul uheloc'h eizhapoent krommenn Gauss ma vo bihan σ, hag a-geveskemm. Eleze, seul vihanoc'h σ, seul strishoc'h hag uheloc'h eo ar grommenn, ha seul vrasoc'h σ, seul izeloc'h ha ledekoc'h ar grommenn.

Teurel evezh ivez e klot ar poentoù disgwar gant $x = m - \sigma$ hag $x = m + \sigma$. Amañ dindan neuz teir c'hrommenn :



9.3.2.2 Kevreizhenn dassammañ ha pementrannerioù

Kevreizhenn dassammañ F ar gwehanadur reol $\mathcal{N}(m, \sigma)$ a zidenner eus kevreizhenn dassammañ Π ar gwehanadur $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$F(x) = \Pi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

hag e bementranner a'n urzh α zo :

$$x_\alpha = m + \sigma t_\alpha.$$

Ent dibarek ez eo ar c'heitad par da m, ar perrannerioù da $m \pm 0,6745\sigma$.

9.3.2.3 Kevreizhenn naouus ha lankadoù

Ar gevreizhenn naouus da X a zidenner diouzh ar gevreizhenn naouus da $\mathcal{N}$:

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = E\left[e^{it(m+\sigma\mathcal{N})}\right] = e^{itm}\varphi_{\mathcal{N}}(t\sigma),$$

eleze

$$\varphi_X(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(imt + \frac{i^2\sigma^2}{2}t^2\right),$$

hag

$$\psi_X(t) = imt + \frac{i^2\sigma^2}{2}t^2.$$

E se ez eo mannel holl zassammantoù ar gwehanadur reol, nemet an daou gentañ :

$$\begin{aligned} c_1 &= E(X) &= m, \\ c_2 &= V(X) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Al lankadoù kreizet a urzh ampar zo mannel dre berzh kemparzhegezh dasparzh $\mathcal{N}(m,\sigma)$ e-keñver $x = m$.

Al lankadoù kreizet a urzh hebar zo par da :

$$\mu_{2r} = 1 \cdot 3 \ldots (2r-1)\sigma^{2r}.$$

Al lankadoù ankreizet a c'hounezer dre zedalvout an daveadur etre al lankadoù :

$$m_k = \sum_{r=0}^{[k/2]} \binom{k}{2r} \frac{2r!}{2^r r!} \sigma^{2r} m^{k-2r}.$$

E se :

$$\begin{aligned} m_1 &= m, \\ m_2 &= \sigma^2 + m^2, \\ m_3 &= m(3\sigma^2 + m), \\ m_4 &= 3\sigma^4 + 6m^2\sigma^2 + m^4. \end{aligned}$$

9.3.2.4 Jedadurioù pleustrek

Bezet ur gwehanadur X dezhañ an dasparzh reol $\mathcal{N}(m,\sigma)$. Jediñ tebegezh an darvoud :

$$P(a \leqslant X < b).$$

O tremen d'an dasparzh kreizet direet e teu :

$$T = \frac{X-m}{\sigma},$$

ha da heul :

$$t_a = \frac{a-m}{\sigma}, \qquad t_a = \frac{b-m}{\sigma}.$$

An tebegoù o vezañ kevandalc'het e teu :

$$P(a \leqslant X < b) = P(t_a \leqslant T < t_b) = \Pi(t_b) - \Pi(t_a) = \Phi(t_b) - \Phi(t_a).$$

Jediñ a reer ar gwerzhadoù-se bennozh d'an taolennoù $\Pi(t)$ pe $\Phi(t)$ a-zivout an dasparzh reol $\mathcal{N}(0,1)$.

9.3.2.5 Reolennoù ar $k \cdot \sigma$

Bezet X ur gwehanadur reol. Jedomp evit $k > 0$:

$$\begin{aligned} P(m - k\sigma \leqslant X < m + k\sigma &= \Pi\left(\frac{m + k\sigma - m}{\sigma}\right) - \Pi\left(\frac{m - k\sigma - m}{\sigma}\right) \\ &= \Pi(k) - \Pi(-k) = 2\Pi(k) - 1 = 2\Phi(k). \end{aligned}$$

Ent arbennik eo dav notañ :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} P(m - \sigma \leqslant X < m + \sigma) & \approx & 0,6828 \\ P(m - 2\sigma \leqslant X < m + 2\sigma) & \approx & 0,9544 \\ P(m - 3\sigma \leqslant X < m + 3\sigma) & \approx & 0,9972 \end{array}}$$

En entremez $[m - \sigma, m + \sigma[$ ez eus muioc'h eget an daoufarzh eus an debegezh, en entremez $[m-2\sigma, m+2\sigma[$ muioc'h eget 95% hag en entremez $[m-3\sigma, m+3\sigma[$ muioc'h eget 99,7% zoken. E gerioù all :

$$P(|X - m| > 3\sigma) \approx 0,28.$$

Diwar ar reolenn-se e weler e c'hell ar strewant bezañ meizet evel ur muzul eus ar forc'hadoù etre ar gwehanadoù hag an engortoz jedoniel.

9.3.2.6 Sammad daou wehanadur dargouezhel reol

Bezet daou wehanadur dargouezhel reol :

$$\begin{aligned} &X_1 \text{ e geitad } m_1, \text{ e hebiant } \sigma_1^2, \\ &X_2 \text{ e geitad } m_2, \text{ e hebiant } \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Mard eo dizalc'h X_1 hag X_2 e tiskouezer kement-mañ :

1. **Ar gwehanadur dargouezhel sammad** $Y = X_1 + X_2$ zo ur gwehanadur dargouezhel reol dezhañ :
   - da geitad : sammad $m_1 + m_2$ ar c'heitadoù,
   - da hebiant : sammad $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ an hebiantoù.
2. **Ar gwehanadur dargouezhel diforc'h** $Y = X_1 - X_2$ zo ur gwehanadur dargouezhel reol dezhañ :
   - da geitad : diforc'h $m_1 - m_2$ ar c'heitadoù,
   - da hebiant : sammad $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ an hebiantoù.

9.3.2.7 Arnesadur ur gwehanadur binomel dre ur gwehanadur reol

Delakadenn Moivre-Laplace : Bezet X_n ur gwehanadur dargouezhel o heuliañ ar gwehanadur $\mathcal{B}(n, p)$; an engortoz zo $E(X_n) = np$ hag ar strewant $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$. Bezet X_n^* ar gwehanadur kreizet direet kevredet ouzh X_n. Bez' ez eus enta :

$$\boxed{X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}.$$

Darbenn a reer, pa denn n war-du an anvevenn, e tenn X_n^* war-du ur gwehanadur dargouezhel dezhañ dasparzh Gauss kreizet direet, eleze :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} P(a \leqslant X_n \leqslant b) = \Pi(b) - \Pi(a)}.$$

Amplegadoù pleustrek an dedalvout : Ent pleustrek e sevener arnesadur ar gwehanadur binomel $\mathcal{B}(n, p)$ dre wehanadur Gauss adal ma'z eo n bras a-walc'h, hogen ar werzh izek da reiñ da n zo kantouezek hag e dalc'h p (gwell eo an arnesâd mard eo p nes da 0,5). Goulenn a reer a-wechoù : $np > 5$ ha $n(1-p) > 5$.

SKOUER — Bezet ur boblañs enni 20% a ziabeteion. Tennañ a reer anezhi ur standilhon n den, o c'houlakaat e chom arstalek an dregantad.

D'ar muiañ e c'haller prederiañ r den ha klask a reer an debegezh da lezel un den hep mezegadur d'an nebeutañ.

Bezet X niver an diabeteion bezant er standilhon. X zo dezhañ an dasparzh binomel $\mathcal{B}(n, 0, 2)$ hag an debegezh klasket zo $P(X > r)$. Emaomp o vont da jediñ an debegezh-se oc'h arverañ un arnesadur dre wehanadur Gauss kreizet direet, o lakaat da skouer ez eo $n = 20$ ha $r = 6$.

• A se e teu mar jeder an disoc'h rik :

$$P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10).$$

Ezwerzhadiñ a reer an niveroù bihanoc'h eget 10^{-3}. Neuze :

$$P(X > 6) \approx 0,086.$$

• Arveromp bremañ an arnesadur dre wehanadur Gauss. Bez' ez eus : $E(X) = 4$ ha $\sigma(X) = \sqrt{3,2}$. Neuze :

$$\begin{aligned} P(X > 6) = P\left(\frac{X-4}{\sqrt{3,2}} > \frac{6-4}{\sqrt{3,2}}\right) &= P\left(X^* > \frac{2}{\sqrt{3,2}}\right) \\ &= P(X^* > 1,12) = 1 - \Pi(1,12) = 0,131. \end{aligned}$$

Stadañ a reomp ez eo fall an arnesâd, diwar an devoud ez eo $np < 5$ da gentañ, ha d'an eil ez eus gwerzhadoù kevan da X hag etre 6 hag ar werzhad uheloc'h kemeret gant X ez eus 1 unanenn ; an displet-se a c'haller bihanaat dre gemer $r = 6,5$ hag o keñveriañ $P(X > 6,5)$ jedet war-eeun (a gas d'an hevelep disoc'h) :

$$P(X > 6,5) = P(X = 7) + P(X = 8) + \cdots = 0,086,$$

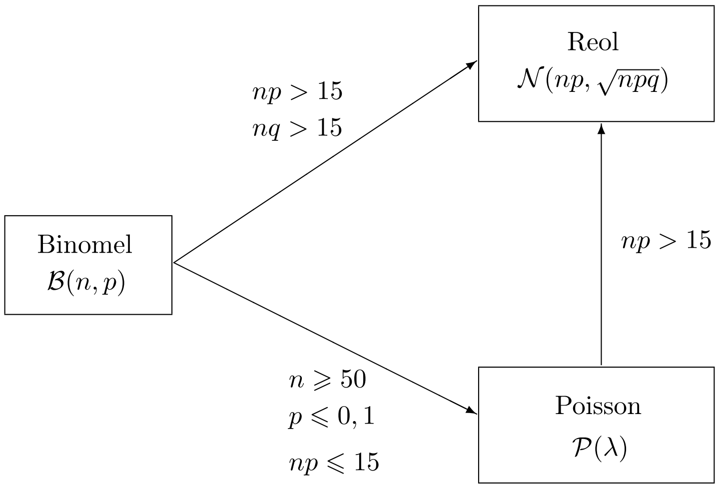
gant :

$$P(X > 6,5) = P\left(X^* > \frac{2,5}{\sqrt{3,2}}\right) = P(X^* > 1,4) = 1 - \Pi(1,4) = 0,081,$$

a zo ar wech-mañ un arnesâd dereat. Ar skouer-se a ziskouez ez eo skoemp arloañ an arnesadur ! Hervez aozourion all e rank np ha $n(1-p)$ bezañ brasoc'h eget 10, pe 15 zoken. Evit reoù all c'hoazh e rank an hebiant bezañ brasoc'h eget 9.

9.3.2.8 Goulun an arnesadurioù

Bezet amañ dindan arnesadurioù an dasparzhioù studiet, oc'h ouzhpennañ arnesâd dasparzh Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ dre an dasparzh reol $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.



9.4 DASPARZH LOG-REOL

9.4.1 Despizadur

Lavarout a reer en deus ur gwehanadur dargouezhel X un dasparzh *log-reol* gant an arventennoù (x_0, m, σ) mar en deus logaritm neperel $X - x_0$ an dasparzh reol $\mathcal{N}(m, \sigma)$, eleze mard eo X a'r rezh :

$$X = x_0 + e^{m+\sigma\mathcal{N}},$$

ma'z eo $\mathcal{N}$ ur gwehanadur reol kreizet direet.

9.4.2 Naouusterioù an dasparzh log-reol

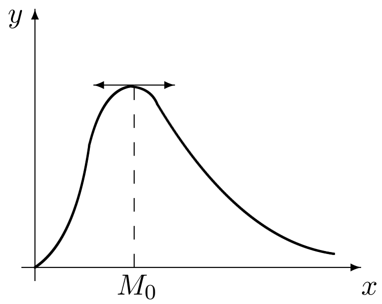
Teskad gwerzhadoù ar gwehanadur log-reol zo $[x_0, +\infty[$. An tebekter zo :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma(x - x_0)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x - x_0) - m}{\sigma}\right]^2\right\}, \quad \text{evit } x > x_0, \\ &= 0, \quad \text{evit } x < x_O \end{aligned}$$

E gevreizhenn dassammañ zo :

$$F(x) = \Pi\left[\frac{\ln(x-x_0)-m}{\sigma}\right], \quad \text{evit } x \geqslant x_0,$$
$$= 0, \quad \text{evit } x \leqslant x_0.$$

Derc'hennomp amañ dindan tellun ar gwehanadur :



Par eo ar mod da $x_0 + e^{m-\sigma^2}$, ledenn an eizhapoent.

Al lankad eus an urzh r e-keñver x_0 zo :

$$\begin{aligned} E\left[(X-x_0)^r\right] &= E\left[\exp\left(r(m+\sigma\mathcal{N})\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-x^2/2 + rm + r\sigma x)\, dx \\ &= \exp(rm + r^2\sigma^2/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-r\sigma)^2}{2}\right] \frac{d(x-r\sigma)}{(2\pi)^{1/2}} \\ &= e^{rm+r^2\sigma^2/2}. \end{aligned}$$

Alese :

$$\begin{aligned} r &= 1 : \quad E(X-x_0) = e^{m+\sigma^2/2} \;; \\ r &= 2 : \quad E\left[(X-x_0)^2\right] = e^{2(m+\sigma^2)}. \end{aligned}$$

Didennañ a reer an engortoz jedoniel hag ar strewant :

$$E(X) = x_0 + e^{m+\sigma^2/2},$$
$$\sigma(X) = \sqrt{1-e^{-\sigma^2}} \cdot e^{m+\sigma^2}.$$

9.4.3 Genel an dasparzh log-reol

Arverañ a reer ar gwehanadur log-reol da arnesaat disoc'henn liesadel un niver bras n anadenn X_i dargouezhek bihan, dizalc'h kenetrezo a'r rezh :

$$X_i = \xi_i(1 + \rho_i),$$

ma'z eo ξ_i lodenn reizhiadek ha ρ_i lodenn dargouezhek ar gwered X_i, hevelep ma ve lav argemmadusted $\ln(1 + \rho_i)$ a-dal da argemmadusted :

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \rho_i),$$

X zo dezhañ neuze an dasparzh log-reol. E gwir, mar hon eus :

$$\begin{aligned} X &= x_0 + \prod_{i=1}^{n} X_i, \\ &= x_0 + \prod_{i=1}^{n} \big[\xi_i(1 + \rho_i)\big], \end{aligned}$$

e teu dre dremen d'al logaritmoù :

$$\ln(X - x_0) = \sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i + \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \rho_i),$$

pezh a dalvez e vast $\ln(X - x_0)$ d'an amplegadoù reolded pa denn n war-du an anvevenn :

$$\ln(X - x_0) \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma).$$

POELLADENNOÙ

9.01 Bezet ur gwehanadur dargouezhel kendalc'hek X dezhañ un dasparzh unvan war an entremez $[a, b]$ ha F e gevreizhenn dasparzh.

Seveniñ a reer ur c'hemm gwehanadur savelet dre :

$$Y = \frac{1}{b-a}(X-a).$$

Diskouez ez eo Y ur gwehanadur dargouezhel kendalc'hek unvan.

9.02 Jediñ ar gorread dindan krommenn Gauss he atalad :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

en tri degouezh-mañ da heul :

a) evit $0 < x < 1,3$, ha goude evit $-1,3 < x < 1,3$;

b) evit $-0,5 < x < 2,1$;

c) evit $-1,2 < x < -0,5$.

9.03 Bezet ur gwehanadur dargouezhel X dezhañ un dasparzh reol e geitad $m = 12$ hag e strewant $\sigma = 3$.

a) Jediñ an tebegoù-mañ da heul :

$$P(8 < X < 16)$$
$$P(7 < X < 10)$$

b) Savelañ un entremez $]a, b[$ hevelep ma'z eo tebegezh an darvoud $a < X < b$ par da 0,70 e pep hini eus an daou zegouezh-mañ :

1. an entremez $]a, b[$ zo kreizet e m ;
2. a zo par da $-\infty$.

9.04 Pa bouezer ur c'horf gant ur ventel imbourc'hva e c'houlakaer e reer ur fazi dezhañ ur gwehanadur reol $\mathcal{N}(0, 0.08)$. Bezet X ar gwehanadur dargouezhel dezhañ da werzhadoù disoc'hoù pouezadur ur c'horf e dolz o vezañ 72,37 g rik.

a) Jediñ tebegezh $P(72,3 < X < 72,5)$;

b) Savelañ un entremez E kreizet e 72,37, hevelep ma'z eo $P(X \in E) = 0,98$.

9.05 Goulakaat a reer ez eo gwrezverk keitad miz Genver en un taread ur gwehanadur dargouezhel reol, $3,7\,°\mathrm{C}$ e engortoz ha $1,8\,°\mathrm{C}$ e strewant. Goulakaat a reer ivez ez eo dizalc'h ar gwrezverkoù keitat a vloaz da vloaz.

a) Pe zasparzh eo keitad ar gwrezverkoù keitat war 5 bloaz kenheuilh ? Pe debegezh eo ez afe ar c'heitad-se e-doug 5 bloaz dreist 5°C ?

b) Pe debegezh eo e ve gwrezverk keitat Genver, 5 bloaz lerc'h ouzh lerc'h, a-us da 5°C ?

9.06 Bezet daou wehanadur dargouezhel argemmvac'hel dizalc'h X_1 ha X_2, dezho an arventennoù ketep λ_1 ha λ_2. Bezet $Y = \min(X_1, X_2)$.

Savelañ dasparzh Y.

9.07 Bezet ur gwehanadur dargouezhel X e engortoz 3 hag e strewant 1. Heuliañ a ra un dasparzh log-reol.

a) Savelañ an arventennoù m ha σ o tezverkañ an dasparzh. jediñ an debegezh $P(2 < X \leqslant 4)$;

a) Keñveriañ an debegezh-se gant $P(2 < X \leqslant 4)$ ma'z eo X ur gwehanadur reol $\mathcal{N}(3, 1)$.

9.08 Seveniñ a reer 30 arselladenn a ampar gwerzhadoù ur gwehanadur goulakaet reol. E-touez ar gwerzhadoù-se, 5 zo bihanoc'h eget 240, 15 zo etre 240 ha 250, ha 10 zo brasoc'h eget 250.

Kinnig gwerzhadoù evit an engortoz m hag ar strewant σ.

9.09 Er boelladenn-mañ e c'houlakaer o deus padoù an treugoù un dasparzh gaosat.

a) Ur penn embregerezh a ya kuit eus e di er gêr A da 8 h 45 gant e garr evit mont d'e vurev a zigor da 9 h. Ent keitat e pad an treug 13 min, gant ur strewant 3 min. Pe debegezh en deus an embreger da zegouezhout gant dale ?

b) E sekretourez zo o chom en A ivez, hogen d'he labour ez a gant an tren 8 h 32 ; diskenn a ra en arsav B ha goude e kemer ar bus 8 h 50 (na c'hortoz ket an tren), a ya betek ar burev. Ent keitat e pad 16 min ar veaj gant an tren (ar strewant o vezañ 2 min), ha 9 min gant ar bus (ar strewant o vezañ 1 min). Dizalc'h eo an daou bad. Pe debegezh he deus ar sekretourez da zegouezhout dik e koulz ?

c) Pe debegezh o deus ar penn embreger pe ar sekretourez (eleze unan anezho d'an nebeutañ) da zegouezhout e koulz, padoù an daou dreug o vezañ goulakaet dizalc'h an eil diouzh egile.

9.10 Diouzh ur standilhon a 300 plantenn dezhañ savelenn Mendel evit un doareenn Aa (tebegezh $A = 0{,}75$), e petore entremez e c'hell bezañ dregantad ar plantennoù o neuz A ?