8

Dasparzhioù arskarek standur

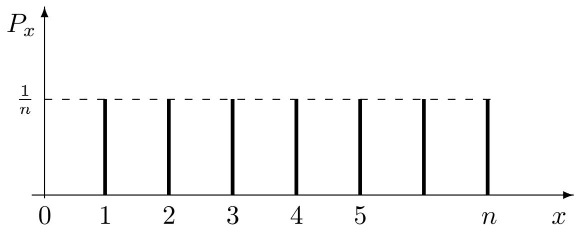
8.1 DASPARZH ARSKAREK UNVAN

8.1.1 Despizadur

Dasparzh arskarek unvan a reer eus hini ar gwehanadur arskarek X, dezhañ da werzhadoù bezus ar c'hevanion kenheuilh 1, 2, …, n kevredet outo bep a debegezh par :

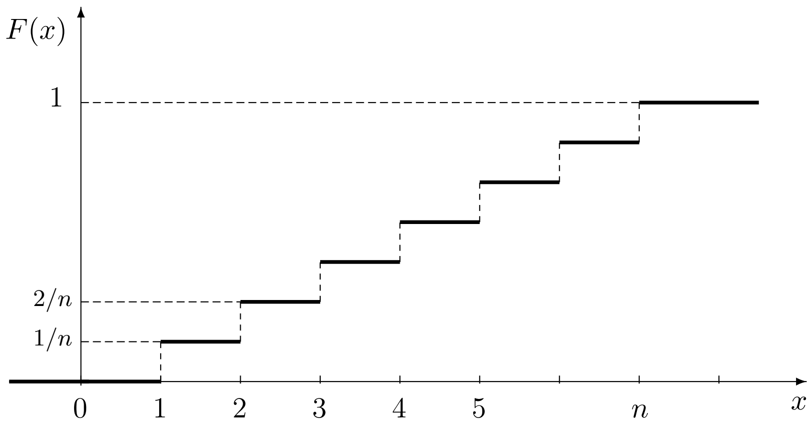
$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \qquad G_X = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Setu amañ dindan ar c'hevreg a-vizhier hag ar gevreizhenn dassammañ (pe c'hoazh kevreizhenn dasparzh dassammadel, pe kevreizhenn ingalañ, ingaladur).



Kevreg a-vizhier

SKOUER — Ar gwehanadur a zo e werzhadoù ar poentoù bet o teurel un diñs eorizhek zo dasparzhet unvan : $\left\{(i, \frac{1}{6})\ ;\ i = 1, 2, \ldots, 6\right\}$.



Kevreizhenn dassammañ

8.1.2 Naouusterioù

8.1.2.1 Kevreizhenn c'haner

Kevreizhenn c'haner ar gwehanadur arskarek unvan zo :

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{x=1}^{n} \frac{t^x}{n} = \frac{t}{n}\,\frac{t^n - 1}{t - 1}.$$

Alese :

$$g_X(1+u) = \frac{1+u}{nu}\,[(1+u)^n - 1] = \frac{1+u}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{k-1},$$

bezet :

$$\begin{aligned} g_X(1+u) &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}}{n} u^k + \frac{u^n}{n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n+1}{k+1}}{n} u^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{k+1}\,\frac{(n-1)!}{(n-k)!}\,\frac{u^k}{k!}. \end{aligned}$$

A se al lankad dasperiadel a'n urzh k :

$$\mu_{[k]} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{k+1}\dfrac{(n-1)!}{(n-k)!} & \text{mar} \quad k \leqslant n, \\ 0 & \text{mar} \quad k > n. \end{cases}$$

E se :

$$\begin{aligned} \mu_{[1]} &= \frac{n+1}{2}, \\ \mu_{[2]} &= \frac{n^2-1}{3}, \\ \mu_{[3]} &= \frac{(n^2-1)(n-2)}{4}, \\ &\text{h.a.} \end{aligned}$$

8.1.2.2 Kevreizhennoù naouus d'ar gwehanadur arskarek unvan

Ar gentañ kevreizhenn naouus zo :

$$\varphi_X(t) = \sum_{x=1}^{n} \left(\frac{e^{itx}}{n} \right) = \frac{e^{i(n+1)t/2}}{n} \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)},$$

pezh a glot gant kemparzhegezh an dasparzh e-keñver $(n+1)/2$.
An eil kevreizhenn naouus zo :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= i\frac{n+1}{2}t - \ln n + \ln\left[\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right] - \ln\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\ &= i\frac{n+1}{2}t + \ln\left(\frac{\sin nt/2}{nt/2}\right) - \ln\left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right) \end{aligned}$$

Hogen :

$$\ln\left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right) = -\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{B_r}{2r}\frac{t^{2r}}{2r!},$$

ma'z eo B_r niver Bernoulli a'n urzh r. Alese :

$$\psi(t) = i\frac{n+1}{2}t - \sum_{r=1}^{+\infty} \left(n^{2r}-1\right) \frac{B_r}{2r}\frac{t^{2r}}{2r!}.$$

Da heul e jeder an dassammantoù :

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 & = \frac{n+1}{2}, \\ c_{2r} & = (-1)^{r-1}(n^{2r}-1)\frac{B_r}{2r} \\ c_{2r+1} & = 0 \end{array}\right\} \quad \text{evit} \quad r \geqslant 1,$$

eleze e jeder evit an dassammantoù kentañ :

$$c_1 = \frac{n+1}{2} \;;$$

$$c_2 = \frac{n^2-1}{12}, \qquad \text{rak} \quad B_1 = \frac{1}{6} \;;$$

$$c_3 = 0 \;;$$

$$c_4 = -\frac{n^4-1}{120}, \qquad \text{rak} \quad B_2 = \frac{1}{30} \;;$$

$$c_5 = 0 \;;$$

$$c_6 = \frac{n^6-1}{252}, \qquad \text{rak} \quad B_3 = \frac{1}{42}.$$

Dre berzh kemparzhegezh an dasparzh ez eo mannel an dassammantoù a urzh ampar (nemet c_1), evel al lankadoù kreizet a urzh ampar. Eus an disoc'hoù-se e tezreer an engortoz jedoniel hag al lankadoù kreizet kentañ :

$$E(X) = \frac{n+1}{2},$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12},$$

$$\mu_4(X) = \frac{(n^2-1)(3n^2-7)}{240}.$$

8.2 DASPARZH BINOMEL

8.2.1 Despizadur

An dasparzh binomel zo hini an tebekadur savelet war ur steudad arnodoù arreet dezho ar perzhioù da heul :

1. Pep arnod dargouezhel a zisoc'h war zaou vezuster kontrol (ha daou hepken enta) — A hag $\overline{A}$ — dezho an tebegoù arstalek ketep p ha $q = 1 - p$ (Sl. ¶ 2.7.3). Alies e reer *tro vat* eus A ha *tro wenn* eus $\overline{A}$. Lavarout a reer emeur en ur blegenn vernoulliat hag an delvan anezhi zo an tennañ bernoulliat. Steudad an n amprouenn a c'hell ivez bezañ desellet evel un amprou notet E_n amparet gant amprouennoù kenheuilh dizalc'h a rizh E_i, E_i o vezañ un dazeilad, eleze o kaout daou zisoc'h bezus : A no $\overline{A}$. Ar rizh amprou-se zo bet delvanet dindan an anvad *amprou Bernoulli* pe *arnod Bernoulli* pe c'hoazh *goulun Bernoulli*, an adanv *bernoulliat* o vezañ arveret kenkoulz all.

2. An amprouennoù arreet zo dizalc'h an eil re diouzh ar re all.

3. Ar gwehanadur dargouezhel binomel — notet boas $\mathcal{B}(n, p)$ — zo e werzhadoù par da ***niver an troioù mat en ur steudad n amprouenn***.

8.2.2 Skouer

Desellomp ar c'hoari pil pe groaz gant ur pezh moneiz eorizhek, $p = q = \frac{1}{2}$. Taolomp ar pezh 15 gwech. Ar gwehanadur dargouezhel a zo e werzhadoù par da niver ar piloù evit ar 15 taol zo ar gwehanadur notet $\mathcal{B}(15, \frac{1}{2})$.

8.2.3 Jediñ gwerzhadoù an tebekadur $P(X = k)$

Arren a reer n gwech un arnod dargouezhel dezhañ daou vezuster gant an tebegoù ketep p ha q. Tebegezh an darvoud kaout k gwech A dezhañ an debegezh p ha $n - k$ gwech $\overline{A}$ dezhañ an debegezh q zo — mar spizer urzh an darvoudoù — :

$$p^k q^{n-k} \qquad \text{(tebegoù kenaozat)}.$$

Ma ne spizer ket an urzh e tisoc'her gant $\binom{n}{k}$ darvoud dezho an hevelep tebegezh. Alese tebegezh kaout k tro vat :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

pe en un doare all :

$$k \xmapsto{\mathcal{B}(n,p)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{(tebegoù hollel).}$$

Disoc'hañ a reer gant an daolenn dasparzh amañ da heul, ar gwehanadoù o vont eus 0 da n :

X	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$	n
$P(X)$	q^n	$\binom{n}{1}pq^{n-1}$	$\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$	$\dots$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	$\dots$	p^n

8.2.4 Evezhiadennoù

An debegezh $\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ zo an termen a'r renk $k+1$ e dispakad ar binom $(p+q)^n$:

$$(p+q)^n = q^n + \binom{n}{1}pq^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \dots + \binom{n}{k}p^kq^{n-k} + \dots + p^n.$$

Alese an anvad *dasparzh binomel a'n urzh n*. Teurel evezh ez eo par da 1 div gazel an atalad amañ diaraok.

8.2.5 Doare all da gaout $P(X = k)$

E-lec'h desellout an darvoud kaout k tro vat en ur steudad n amprouenn evel un amprouad bloc'hel e c'hellomp e welout evel kenskejadur n darvoud, pep hini amparet gant k tro vat en un urzh savelet.

Bezet an egor tebekaet $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P\big)$ gant :

$$\Omega = \{0,1\},\ p(0) = q,\ P(1) = p,\ \text{hevelep ma'z eo} \quad p \neq 0,\ q \neq 0,\ p+q = 1.$$

Desellomp an egor liesâd $\big(\Omega^n, \mathcal{F}(\Omega^n), P_n\big)$. A se e teu, dre berzh despizadur an egor liesâd :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega^n,\ P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1) \times P(x_2) \times \dots \times P(x_n).$$

Mar bez da k kedrann a'n n-ac'h $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ar werzhad 1 e teu :

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = p^kq^{n-k}.$$

Dezanvomp dre X ar gwehanadur dargouezhel savelet dre :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega^n,\ X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Priñvel an darvoud $(X = k)$, eleze priñvel an teskad :

$$\big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad ; \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k\big\},$$

zo par da $\binom{n}{k}$. Bez' ez eus enta :

$$\boxed{P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}.$$

X zo neuze ar gwehanadur binomel $\mathcal{B}(n, p)$.

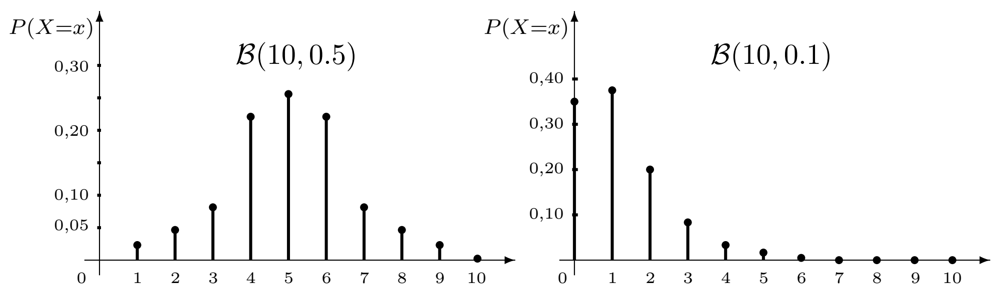
8.2.6 Tebekadur binomel ha gwehanadur dargouezhel meneger

Dezren a reer ez eo kevatal an despizadur amañ da heul ouzh an hini usveneget. Ar gevreizhenn debekaat binomel $\mathcal{B}(n, p)$ zo ivez tebekadur ar gwehanadur $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ma'z eo $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ gwehanadurioù meneger savelet war $\Omega^n = \{0, 1\}^n$, dizalc'h ha dezho an un tebekadur :

$$\forall i, \quad P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = q.$$

8.2.7 Derc'hennadur kevregat

Bezet amañ dindan div skouer a zerc'hennadur kevregat a'n dasparzh binomel :



8.2.8 Kevreizhenn c'haner ha kevreizhenn naouus

Kevreizhenn c'haner lankadoù ar gwehanadur dargouezhel binomel zo :

$$\boxed{g(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k q^{n-k} = (pt+q)^n}\,.$$

Pe c'hoazh :

$$g(1+u) = (1+pu)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} p^k \frac{u^k}{k!}.$$

Da heul ez eo al lankadoù dasperiadel par da :

$$\mu_{[k]} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} p^k & \text{mar} \quad k \leqslant n, \\ 0 & \text{mar} \quad k > n. \end{cases}$$

Heñvel dra evit kaout ar gevreizhenn naouus :

$$\varphi(t) = (q + pe^{it})^n = \left[1 + p(E^{it} - 1)\right]^n.$$

8.2.9 Engortoz, hebiant, strewant

Dre zedalvout ar ¶ **8.2.6** e c'haller jediñ engortoz ha hebiant X :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

alese,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\ &= p + p + \cdots + p = np. \end{aligned}$$

Heñvel dra

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) \qquad \text{(Gwehanadurioù dizalc'h)} \\ &= pq + pq + \cdots + pq = npq = np(1-p) \end{aligned}$$

E se :

$$\boxed{E(X) = np}, \quad \boxed{V(X) = npq}, \quad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{npq}},$$

disoc'hoù a c'hell bezañ adkavet dre araez ar gevreizhenn c'haner.

8.2.10 Lankadoù kreizet

Lankad kreizet μ_r ar gwehanadur $\mathcal{B}(n,p)$ zo par da :

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} (x-np)^r.$$

Da gaout a nes da nes al lankadoù μ_r e savelomp un daveadur darren etre al lankadoù a urzh kenheuilh. Diarroudomp μ_r a-geñver gant p :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mu_r}{\mathrm{d}p} &= \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^{x-1} (1-p)^{n-x} (x-np)^r \\
&- \sum_{x=0}^{n-1} (n-x) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x-1} (x-np)^r \\
&- \sum_{x=0}^{n} nr \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} (x-np)^{r-1},
\end{aligned}$$

eleze :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mu_r}{\mathrm{d}p} &= E\left[\frac{X}{p}(X-np)^r\right] - E\left[\frac{n-X}{1-p}(X-np)^r\right] - nrE\left[(X-np)^{r-1}\right] \\
&= E\left[\frac{(X-np)^{r+1}}{p(1-p)}\right] - nrE\left[(X-np)^{r-1}\right] \\
&= \frac{\mu_{r+1}}{pq} - nr\mu_{r-1}.
\end{aligned}$$

A se an daveadur darren :

$$\mu_{r+1} = pq\left(\frac{\mathrm{d}\mu_r}{\mathrm{d}p} + nr\mu_{r-1}\right).$$

An daveadur darren-se, talvoudek evit nep $r \geqslant 1$, zo spesadel d'an tebekadur binomel $\mathcal{B}(n,p)$. O vezañ ma'z eo μ_0 par da 1 ha μ_1 par da 0 e jeder a nes da nes an holl lankadoù kreizet :

$$\begin{aligned}
r = 1 &: \quad \mu_2 = npq \; ; \\
r = 2 &: \quad \mu_3 = pq(n-2np) = npq(q-p) \; ; \\
r = 3 &: \quad \mu_4 = pq\Big[n\left[(q-p)^2 - 2pq\right] + 3n^2pq\Big] \; ; \\
&\qquad\;\; = npq(1-6pq+3npq).
\end{aligned}$$

E se ez eo mannel al lankadoù kreizet pa vez p pe q par da vann, pe e gerioù all ar gwehanadurioù $\mathcal{B}(n,0)$ ha $\mathcal{B}(n,1)$ zo kaougant.

8.2.11 Sammad daou wehanadur binomel a un tebekadur

Bezet daou wehanadur dargouezhel binomel :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \text{ o heuliañ an tebekadur } \mathcal{B}(n_1,p) \\ X_2 \text{ o heuliañ an tebekadur } \mathcal{B}(n_2,p) \end{array}\right\} \text{ a un tebegezh } p.$$

Diskouez a reer (dre arverañ ar ¶ **8.2.6**) ez eo dasparzh ar gwehanadur sammad $X_1 + X_2$ hini an dasparzh binomel $\mathcal{B}(n_1+n_2,p)$, gant ma ve dizalc'h an daou wehanadur X_1 ha X_2.

8.2.12 Naouusterioù ar gwehanadur aliested

Bezet un tebekadur $\mathcal{B}(n,p)$. Ouzh ar gwehanadur X niver an troioù mat a debegezh p kevredomp ar gwehanadur dargouezhel :

$$f = \frac{X}{n},$$

anvet *aliested*.

$$\begin{array}{lcl} \text{Mard eo teskad gwehanadoù } X & : & G_X = \{0,1,2,\ldots,k,\ldots,n\}, \\ \text{neuze ez eo gwehanadoù } f & : & G_f = \{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{k}{n},\ldots,1\}, \end{array}$$

gant tebegoù par da re an tebekadur binomel.

Neuze, **tebegezh** ar gwehanad $\frac{k}{n}$ zo $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

Engortoz jedoniel f zo : $\dfrac{E(X)}{n} = \dfrac{np}{n} = p$; neuze : $\boxed{E(f) = p}$.

Hebiant f zo : $\dfrac{V(X)}{n^2} = \dfrac{npq}{n^2} = \dfrac{pq}{n}$; neuze : $\boxed{V(f) = \dfrac{pq}{n}}$.

Da heul, **strewant** f zo : $\boxed{\sigma = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}.}$

Kevreizhenn naouus da f zo : $\varphi_f(t) = \varphi_X(\frac{t}{n}) = \left[q + pe^{it/n}\right]^n$.

EVEZHIADENN 1 — Pa denn n war-du an anvevenn e tenn hebiant an aliested f war-du mann hag e tenn ar gevreizhenn naouus da f war-du ar gevreizhenn naouus d'ar gwehanadur kaougant $\mathcal{K}(p)$. An disoc'h-se, anvet *delakadenn an niveroù bras*, a vo gwelet amañ dindan : ar gwehanadur f a gengerc'h a-fet tebegezh war-du p.

EVEZHIADENN 2 — An dasparzh binomel a c'haller desellout dre zelvan an tennañ gant azlakadur a n boull diouzh un arc'h enni N boull, en o zouez M boull ruz. Ar gwehanadur a zo e werzhadoù niver ar boulloù ruz tennet zo dasparzhet ent binomel gant an arventennoù n ha $p = \frac{M}{N}$. E se e naou X dre :

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N} \qquad ; \qquad V(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right).$$

8.3 DASPARZH GOURMENTONIEL

8.3.1 Despizadur

En un arc'h ez eus N boull en o zouez $M \leqslant N$ boull ruz, eleze ez eo $p = \frac{M}{N}$ kenfeur ar boulloù ruz. Tennañ a reer eus an arc'h ur standilhon a $n \leqslant N$ boull, hep azlakadur. Ar gwehanadur X — a zeskriv niver ar boulloù ruz tennet gant ar standilhon — zo dezhañ an dasparzh :

$$\left\{ \left(x, P(X=x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \right) \middle| \max\big(0, n-(N-M)\big) \leqslant x \leqslant \min(M,n) \right\}.$$

Pe c'hoazh gant $q = 1 - p$ kenfeur ar boulloù n'int ket ruz :

$$\left\{ \left(x, P(X=x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \right) \middle| \max\big(0, n-Nq\big) \leqslant x \leqslant \min(Np,n) \right\}.$$

Ar gwehanadur X a reer anezhañ *gwehanadur gourmentoniel* a arventennoù N, n, p hag e notañ a reer :

$$X = \mathcal{H}(N, n, p).$$

Merzhout ez eo teskad ar gwehanadoù teskad ar c'hevanion o vastañ da :

$$\max\big(0, n - Nq\big) \leqslant x \leqslant \min(Np, n).$$

Lavaret e vez ivez ez eo X dasparzhet ent gourmentoniel.

8.3.2 Naouusterioù an dasparzh gourmentoniel

8.3.2.1 Mod

Evel evit an dasparzh binomel e c'haller savelañ un daveadur oc'h eren an tebegoù kevredet ouzh daou gevan kenheuilh :

$$\frac{p_{x+1}}{p_x} = \frac{(Np - x)(n - x)}{(x + 1)(Nq - n + x + 1)}$$

hag o linkañ x eus un unanenn hag o tuginañ :

$$\frac{p_{x-1}}{p_x} = \frac{x(Nq - n + x)}{(Np - x + 1)(n - x + 1)}.$$

An daou zaveadur-se a gevaraez jediñ an tebegoù p_x a nes da nes, goude bezañ jedet unan anezho dre ar reollun rageeun (a-ziuz ar mod). Ar mod zo ar c'hevan x a vast war un dro da :

$$\frac{p_{x+1}}{p_x} < 1 \quad \text{hag} \quad \frac{p_{x-1}}{p_x} < 1.$$

Kavout a reer :

$$\frac{Nnp - Nq + n - 1}{N + 2} < M_0 < \frac{Nnp + Np + n + 1}{N + 2}.$$

Mar bez an eil eus ar bonnoù-se ur c'hevan, egile zo unan ivez ha model eo an div werzhad-se.

Evel evit ar gwehanadur binomel e kresk an tebegoù p_x tamm ha tamm betek ar mod ha digreskiñ a reont en tu all.

8.3.2.2 Lankadoù

- **Lankadoù dasperiadel**

Al lankad dasperiadel a'n urzh k zo par da :

$$\mu_{[k]} = \sum_x \frac{x!}{(x - k)!} \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\frac{N}{n}},$$

ar sammad o vezañ astennet d'ar c'hevanion o vastañ da :

$$\max(k, n - Nq) \leqslant x \leqslant \min(n, Np),$$

eleze, o c'houlakaat k izeloc'h pe bar ouzh $\min(n, Np)$:

$$\begin{aligned}\mu_{[k]} &= \sum_x \frac{x!}{(x-k)!} \frac{Np!}{x!(Np-x)!} \binom{Nq}{n-x} \frac{n!(N-n)!}{N!}, \\ &= \frac{Np!}{(Np-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(N-k)!}{N!} \sum_x \frac{\binom{Np-k}{x-k}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N-k}{n-k}}.\end{aligned}$$

Dodomp :

$$\begin{aligned} x' &= x - k, \\ n' &= n - k, \\ N' &= N - k, \\ N'p' &= Np - k, \\ N'q' &= Nq. \end{aligned}$$

Ar sammad diwezhañ a c'haller skrivañ :

$$\sum_x \frac{\binom{N'p'}{x'}\binom{N'q'}{n'-x'}}{\binom{N'}{n'}},$$

ma c'hell x' kaout ar gwerzhadoù kevan gavaelet etre :

$$\max(k, n - Nq) - k \leqslant x' \leqslant \min(n, Np) - k,$$

eleze :

$$\max(0, n' - N'q') \leqslant x' \leqslant \min(n', N'p').$$

Da heul ez eo par ar sammad-se da 1 hag :

$$\mu_{[k]} = \frac{Np!}{(Np-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(N-k)!}{N!}$$

$$\text{evit } k \leqslant \min(n, Np)$$

hag $\mu_{[k]} = 0$ evit $k > \min(n, Np)$.

• **Lankadoù kreizet hag ankreizet**

Ar reollun-se o reiñ al lankadoù dasperiadel a gevaraez kaout al lankadoù ankreizet ha kreizet :

$$\mu_{[1]} = np,$$
$$\mu_{[2]} = \frac{(Np-1)(n-1)}{N-1}np.$$

Alese

$$m_1 = \mu_{[1]} = np,$$
$$m_2 = \mu_{[2]} + \mu_{[1]} = np\frac{Nnp+Nq-n}{N-1},$$

Ha da heul :

$$E(X) = np,$$
$$V(X) = \frac{N-n}{N-1}npq.$$

E se an un engortoz jedoniel zo d'ar gwehanadur binomel $\mathcal{B}(n,p)$ ha d'ar gwehanadur gourmentoniel $\mathcal{H}(N,n,p)$: np. Hebiant an eil zo par da hini egile d'ar muiañ :

$$\forall(N,n,p) \;:\; E\left[\mathcal{H}(N,n,p)\right] = E\left[\mathcal{B}(n,p)\right],$$
$$\forall(N,n,p) \;:\; V\left[\mathcal{H}(N,n,p)\right] \leqslant E\left[\mathcal{B}(n,p)\right],$$

Ar parder etre an hebiantoù o c'hoarvezout nemet en degouezhioù-mañ :

$$\begin{array}{lll} p = 0 & : & \text{neuze } \mathcal{H}(N,n,0) = \mathcal{B}(n,0) = \mathcal{K}(0)\,; \\ p = 1 & : & \text{neuze } \mathcal{H}(N,n,1) = \mathcal{B}(n,1) = \mathcal{K}(n)\,; \\ n = 1 & : & \text{neuze } \mathcal{H}(N,1,p) = \mathcal{B}(1,p)\,; \\ N = +\infty & : & \text{neuze } \mathcal{H}(+\infty,n,p) = \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{K}(0) \end{array}$$

(ar parder diwezhañ a welimp amañ dindan).

EVEZHIADENN — Ar gwezhiader $(N-n)/(N-1)$ (dambar da $1-n/N$ pa vez N bras kenan) a reer *gwezhiader dizilerc'hted* anezhañ.

Evit $n > 1$ ez eo an hebiant da geñver an tennañ hep azlakadur bihanoc'h eget hini an tennañ gant azlakadur. Aes eo nadiñ ar perzh-se : an tennañ hep azlakadur a ro muioc'h a stlenn a-zivout ar bondeskad eget an tennañ gant azlakadur. Anat eo e c'haller tennañ ur voull roet meur a wech da geñver an tennañ gant azlakadur, pezh a dalvez e koller stlenn. Evel reizh ez eo par an hebiant da vann gant $n = N$ evit a sell an tennañ dizilerc'h, an holl stlenn zo bet gounezet ha ne skoer ket hebiou ken !

Pa vez n kalz bihanoc'h eget N ez eo dambar an daou hebiant, pezh a c'haller nadiñ aes ivez, peogwir e kemm nebeut kenaoz an arc'h pa denner un nebeut boulloù a-douez un niver bras. Evit $n < \frac{N}{10}$ e c'haller hevelebiñ an tennañ dizilerc'h (hep azlakadur) gant an tennañ gant azlakadur.

Doare all da jediñ an engortoz

Dre heñvelder gant an dasparzh binomel e todomp :

$$X_i \begin{cases} 1, & \text{mar bez ruz an } i\text{-vet boull dennet,} \\ 0, & \text{a hend all} \end{cases} \qquad \text{evit } i = 1, 2, \dots, n.$$

Anat eo ez eo neuze :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Evit an dennadenn gentañ ez eus :

$$P(X_1 = 1) = \frac{M}{N} = p, \quad P(X_1 = 0) = 1 - p = q.$$

Dre berzh delakadenn an tebegoù hollel e tisoc'her gant :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_2 = 1/_{X_1=1}) \cdot P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1/_{X_1=0}) \cdot P(X_1 = 0) \\ &= \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N} + \frac{M}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N} \\ &= \frac{M}{N} \left(\frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N-1} \right) \\ &= \frac{M}{N} = p. \end{aligned}$$

E se en deus ar gwehanadur X_2 an un dasparzh gant X_1 ha dre zarren e tezreer ez eo ar gwehanadurioù $X_1, X_2, \dots, X_n$ a un dasparzh ha da heul a un hebiant. Bez' ez eus enta :

$$E(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) = \frac{M}{N}$$

ha da heul dre berzh sammadezh an niñvader engortoz jedoniel e teu :

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N},$$

pe :

$$\boxed{E(X) = np}.$$

Hogen ar gwehanadurioù $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n'int ket dizalc'h daou ha daou. Setu perak n'eo ket hebiant X par da sammad hebiantoù an X_i-où ha ne c'haller ket e jediñ war-eeun. Sl. amañ diaraok.

8.4 DASPARZH BINOMEL LEIEL

8.4.1 Despizadur

Bezet un arc'h enni N boull gant ar c'henfeur p a voulloù ruz. Tennañ a reer ar boulloù unan hag unan, *gant azlakadur*, betek kaout r boull ruz en holl. Bezet Y ar gwehanadur a zo e werzhadoù par da y niver an tennadennoù ret.

Tebegezh an darvoud $Y = y$ a jeder dre arverañ aksiomenn an tebegoù kenaozat. Dezanvomp dre A ha B an darvoudoù :

A : e-touez an $y - 1$ kentañ boull tennet ez eus $r - 1$ boull ruz ;
B : an y-vet boull tennet zo ruz.

Dizalc'h eo an darvoudoù A ha B dre berzh an dizalc'h etre an tennadennoù lerc'h ouzh lerc'h ha dezho an tebegoù ketep :

$$P(A) = P\big[(y-1, p) = r-1\big] = \binom{y-1}{r-1} p^{r-1} q^{y-r},$$
$$p(B) = p.$$

Alese :

$$P(Y = y) = P\big(A \cap B\big) = P(A) \cdot P(B) = \binom{y-1}{r-1} p^r q^{y-r}.$$

Aroueziomp dre $\mathcal{R}(r, p)$ ar gwehanadur dargouezhel arskarek-se, dezhañ an arventennoù r ha p. Ar gwehanadoù zo :

$$G_Y = \{r, r+1, \ldots\}$$

hag e arventennoù r ha p zo a-getep :

$$\begin{aligned} r &: \text{ kevan muiel ;} \\ p &: \text{ gwerc'hel muiel par da 1 d'ar muiañ :} \quad 0 < p \leqslant 1. \end{aligned}$$

Evit $p = 1$ ez eo kaougant ar gwehanadur : $\mathcal{R}(r, 1) = \mathcal{K}(r)$. Mar ezlakaomp an degouezh $p = 0$ ez eo dasparzh ar gwehanadur $\mathcal{R}(r, p)$ hini niver an amprouennoù heñvel ha dizalc'h da ren evit kaout an r-vet sevenidigezh eus un darvoud A dezhañ an debegezh p da c'hoarvezout da-geñver pep amprouenn. E degouezh an dasparzh binomel ez eo niver hollel an amprouennoù festet ha kaougant : n, hogen dargouezhek eo niver ar sevenidigezhioù eus A : $\mathcal{B}(n, p)$. E degouezh ar gwehanadur a zesellomp amañ, niver ar sevenidigezhioù eus A zo festet ha kaougant : r, tra ma'z eo dargouezhek niver hollel an amprouennoù : $\mathcal{R}(r, p)$[1].

Gwehanadur dargouezhel binomel leiel a arventennoù r ha p a reer eus ar gwehanadur X :

$$X = \mathcal{R}(r, p) - r.$$

Aroueziomp eñ $\mathcal{TG}(r, p)$: eleze niver an troioù gwenn bet kent sevenidigezh an r-vet tro vat :

$$P(X = x) = P(Y = r + x) = \binom{r + x - 1}{r - 1} p^r q^x.$$

Teskad e wehanadoù zo teskad ar c'hevanion anleiel :

$$G_X = \{0, 1, \ldots\}$$

hag e arventennoù r ha p a vast da :

$$\begin{aligned} r &: \text{ kevan muiel} \\ p &: \quad 0 < p \leqslant 1. \end{aligned}$$

Gwiriañ a reer — evel ma tere — ez eo sammad an tebegoù par da 1, ne vern r ha p :

$$\sum_{x \in G_X} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{r + x - 1}{r - 1} p^r q^x = p^r (1 - q)^{-r}.$$

[1]Dibab a reer an arouez $\mathcal{R}$ evit an abeg-mañ : Y zo e werzhadoù par da *renk* an r-vet sevenidigezh eus an darvoud A.

An anv *gwehanadur binomel leiel* a zeu eus an devoud ez eo an debegezh kevredet ouzh an darvoud $X = x$ gwezhiader an termen e q^x a zo e dispakad binom hollekaet Newton $(1-q)^{-r}$, q o vezañ bihanoc'h eget 1.

8.4.2 Gwehanadur Pascal pe gwehanadur mentoniel

Gwehanadur Pascal pe c'hoazh *gwehanadur mentoniel* a arventenn p a reer eus ar gwehanadur notet $\mathcal{M}(p)$:

$$\mathcal{M}(p) = \mathcal{R}(1, p).$$

Teskad ar gwehanadoù zo teskad ar c'hevanion muiel hag an tebegoù kevredet zo :

$$P\big(\mathcal{M}(p) = x\big) = pq^{x-1}, \qquad x = 1, 2, \ldots$$

An anv a wehanadur *mentoniel* zo dleet d'an devoud ez eo an tebegoù p_x termenoù an heuliad mentoniel :

$$p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{x-1} + \cdots) = 1.$$

Ar gwehanadur $\mathcal{R}(r, p)$ zo ar sammad eus r gwehanadur mentoniel dizalc'h a un arventenn p. E gwir, $\mathcal{M}(p)$ zo niver an amprouennoù da gefleuniañ evit kaout kentañ sevenidigezh an darvoud A. Da gaout an eil sevenidigezh diwar an hini gentañ ez eo ret kefleuniañ adarre un niver amprouennoù dezho an dasparzh $\mathcal{M}(p)$. Dizalc'h an tennadennoù kenheuilh a empleg dizalc'h ar gwehanadurioù $\mathcal{M}(p)$-se. E se :

$$\mathcal{R}(r, p) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i(p) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{R}_i(1, p)$$

ha heñvel dra :

$$\mathcal{TG}(r, p) = \mathcal{R}(r, p) - r = \sum_{i=1}^{r} \big[\mathcal{R}(1, p) - 1\big],$$

eleze :

$$\mathcal{TG}(r, p) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{TG}_i(1, p).$$

E se, ar gwehanadurioù $\mathcal{R}(r,p)$ diouzh un tu, $\mathcal{TG}(r,p)$ diouzh an tu all a ampar, evit p festet, familhoù unarventenn a wehanadurioù dargouezhel kloz e-keñver ar sammañ (r eo an arventenn).

• Naouusterioù gwehanadur Pascal

Gwehanadur Pascal $\mathcal{M}(p)$ zo e gevreizhenn c'haner :

$$E\Big(t^X\Big) = \sum_{x=1}^{\infty} t^x p q^{x-1} = \frac{p}{q}\left[\frac{1}{1-tq} - 1\right],$$

an dispakad-se o vezañ kengerc'hus evit $|t| < 1/q$. A se :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{tp}{1-tp} \quad \text{mar} \quad |t| < \frac{1}{q}\ ; \\ g(t) &= +\infty \quad \text{mar} \quad |t| \geqslant \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

En amezegiezh $t = 1$ $(1 < 1/q)$, eleze en amezegiezh $u = 0$ ez eu enta :

$$\begin{aligned} g(1+u) = \frac{1+u}{1-(q/p)u} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q^{k-1}}{p^{k-1}} + \frac{q^k}{p^k}\right)u^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k!\frac{q^{k-1}}{p^k}\frac{u^k}{k!} \end{aligned}$$

(steudad kengerc'hus ent dizave en amezegiezh $u = 0$).

Da heul ez eus eus al lankad dasperiadel a'n urzh k evit nep k ha par eo da :

$$\mu_{[k]} = k!\frac{q^{k-1}}{p^k}.$$

Alese e tezreer engortoz jedoniel $\mathcal{M}(p)$ hag e hebiant :

$$\begin{aligned} E\big[\mathcal{M}(p)\big] &= \frac{1}{p}, \\ V\big[\mathcal{M}(p)\big] &= \mu_{[2]} + \mu_{[1]} - \mu_{[1]}^2 = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

Ar gevreizhenn naouus da wehanadur Pascal zo :

$$\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.$$

Dre berzh an disoc'h savelet amañ diaraok war sammadur ar gwehanadurioù $\mathcal{M}(p)$ dizalc'h a un arventenn p, ar c'hevreizhennoù ganer ha naouus d'ar gwehanadurioù $\mathcal{R}(r,p)$ ha $\mathcal{TG}(r,p)$ zo a-getep :

$$\begin{array}{lclcl} \mathcal{R}(r,p) & : & g(t) = \left(\dfrac{tp}{1-tp}\right)^r & ; & \varphi(t) = \left(\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right)^r \ ; \\ \mathcal{TG}(r,p) & : & g(t) = \left(\dfrac{p}{1-tp}\right)^r & ; & \varphi(t) = \left(\dfrac{p}{1-qe^{it}}\right)^r . \end{array}$$

EVEZHIADENN — Doare all da jediñ engortoz ha hebiant $\mathcal{M}(p)$:
Un arnod dargouezhel a vez arreet betek kaout an darvoud A evit ar wech kentañ, pep arreadenn o vezañ dizalc'h pa azlakaer bewech ar voull dennet en arc'h en-dro. Bezet ar gwehanadur o kaout da werzhadoù niver an amprouennoù ret evit ma ve sevenet A. Eleze ez eo ar gwehanadoù : $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$. E se, i amprouenn zo ret, mard eus $i-1$ amprouenn gant an disoc'h $\overline{A}$ hag A evit an i-vet, eleze en hon eus al liesac'h :

$$(\underbrace{\overline{A}, \overline{A}, \ldots, \overline{A}}_{(i-1)\text{ gwech}}, A).$$

Evit pep amprouenn en deus an darvoud A an debegezh p. Neuze e jeder tebegezh al liesac'h :

$$P\Big((\overline{A}, \overline{A}, \ldots, \overline{A}, A)\Big) = (1-p)^{i-1} \cdot p, \quad \text{evit } i = 1, 2, \ldots$$

Krennomp :

Delakadenn :

En un arnod dargouezhel en deus un darvoud A an debegezh $p = P(A)$ gant $0 < p < 1$. Arren a reer an arnod dargouezhel ent dizalc'h betek ma ve sevenet A evit ar wech kentañ. Neuze :

$$p_i = P(i \text{ amprouenn rik zo ret}) = p \cdot (1-p)^{i-1} \quad \text{evit } i = 1, 2, \ldots$$

Teurel evezh ouzh ar reollun darren :

$$p_{i+1} = (1-p) \cdot p_i, \quad \text{evit } i = 1, 2, \ldots, \quad \text{gant } p_1 = p.$$

EVEZHIADENN

- An tebegoù $p_i = p \cdot (1-p)^{i-1}$ gant $i = 1, 2, \dots$ a ampar un heuliad mentoniel dezhañ da sammad :

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} = p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Setu perak e lavarer ez eo teskad an holl zaouac'hoù : $\Big\{ \big(i, p \cdot (1-p)^{i-k}\big) \,\big|\, i = 1, 2, \dots \Big\}$ dasparzhet ent mentoniel, pe ez amparont un dasparzh mentoniel.

- Tebegezh an darvoud n amprouenn zo ret d'ar muiañ da gaout sevenidigezh A evit ar wech kentañ a jeder evel henn :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k = p \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^n.$$

- Tebegezh an darvoud n amprouenn zo ret d'an nebeutañ da gaout sevenidigezh A evit ar wech kentañ a jeder evel henn :

$$p_n = (1-p)^{n-1}, \quad \text{evit } n = 1, 2, \dots$$

- Teurel meiz ez eo :

$$\text{evit } p > 0, \quad \lim_{n \to \infty} (1-p)^{n-1} = 0,$$

a c'haller desteriañ evel henn : An debegezh da gaout an darvoud A evit ar wech kentañ gant n amprouenn da nebeutañ zo ken bihan ha ma venner, pa zibaber n bras a-walc'h evit se.

Da jediñ an engortoz :

$$E\big[\mathcal{M}(p)\big] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

hon eus ezhomm d'e rezhiennañ evel henn :

$$\begin{array}{rcccccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} & = 1 + & 2(1-p) + & 3(1-p)^2 + & 4(1-p)^3 + & & \cdots \\
= & 1 & + \ (1-p) & + \ (1-p)^2 & + \ (1-p)^3 & + \ (1-p)^4 & + \cdots \\
+ & (1-p) & + \ (1-p)^2 & + \ (1-p)^3 & + \ (1-p)^4 & + \ (1-p)^5 & + \cdots \\
+ & (1-p)^2 & + \ (1-p)^3 & + \ (1-p)^4 & + \ (1-p)^5 & + \ (1-p)^6 & + \cdots \\
+ & (1-p)^3 & + \ (1-p)^4 & + \ (1-p)^5 & + \ (1-p)^6 & + \ (1-p)^7 & + \cdots \\
+ & (1-p)^4 & + \ (1-p)^5 & + \ (1-p)^6 & + \ (1-p)^7 & + \ (1-p)^8 & + \cdots \\
+ & \cdots & & & & &
\end{array}$$

Mar sammer hervez ar bannoù e teu neuze :

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i+(1-p)\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i+(1-p)^2\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i+(1-p)^3\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i$$
$$+(1-p)^4\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i+(1-p)^5\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i+\cdots$$

Gant $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i=\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{1}{p}$ e teu :

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}.$$

Da heul e jeder :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p_k=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}=p\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1}{p}.\\
E\big(X^2\big) &= \sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot p_k=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot p\cdot(1-p)^{k-1}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^2\cdot p\cdot(1-p)^i=\sum_{i=0}^{\infty}(i^2+2i+1)\cdot p\cdot(1-p)^i\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}i^2\cdot p\cdot(1-p)^i+2\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot p\cdot(1-p)^i+\sum_{i=0}^{\infty}p\cdot(1-p)^i\\
&= (1-p)\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}i^2\cdot p\cdot(1-p)^{i-1}}_{=E(X^2)}+2(1-p)\underbrace{p\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot(1-p)^{i-1}}_{=E(X)}+1\\
&= (1-p)\cdot E\big(X^2\big)+\frac{2(1-p)}{p}+1.
\end{aligned}$$

Tennañ a reer an atalad :

$$p\cdot E\big(X^2\big)=\frac{2}{p}-1\quad\text{gant an diskoulm}\quad E\big(X^2\big)=\frac{2-p}{p^2}.$$

Alese e teu :

$$V(X)=E\big(X^2\big)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$

EVEZHIADENN — Kevreizhenn dassammañ F ar gwehanadur dargouezhel dasparzhet ent mentoniel a jeder aes kenan. E gwir, evit pep kevan naturel $n \in \mathbb{N}^*$ e teu dre berzh reollun ar steudad mentoniel :

$$\begin{aligned} F(n) = P(X \leqslant n) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} p \cdot (1-p)^{k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} p \cdot (1-p)^i = p \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n. \end{aligned}$$

Gounit a reer ar reollun dre an doare-mañ : an darvoud $(X > n)$ a c'hoarvez, pa na c'hoarvez ket an darvoud A evit an n amprouenn gentañ, eleze pa c'hoarvez an darvoud kontrol $\overline{A}$. An debegezh evit an n amprouad-se zo neuze $(1-p)^n$. Ha da heul e teu tebegezh an darvoud kontrol :

$$F(n) = P(X \leqslant n) = 1 - P(X > n) = 1 - (1-p)^n.$$

Arstalek eo ar gevreizhenn dassammañ etre al lammoù.

8.4.3 Naouusterioù an dasparzh binomel leiel

- **Mod**

An tebegoù stag ouzh daou gevan kenheuilh zo ur c'heñver eeun kenetrezo :

$$\frac{p_{x+1}}{p_x} = \frac{\binom{r+x}{r-1} p^r q^{x+1}}{\binom{r+x-1}{r-1} p^r q^x} = \frac{r+x}{x+1} q$$

hag

$$\frac{p_{x-1}}{p_x} = \frac{x}{r+x-1} \frac{1}{q}.$$

Alese mod ar gwehanadur binomel leiel :

$$\frac{rq-1}{p} < M_0 < \frac{rq-q}{p}.$$

mard eo kevan $(rq-1)/p$, $(rq-q)/p$ zo ivez ha model eo an div werzhad-se. An tebegoù p_x a zigresk tamm ha tamm a bep tu d'ar mod.

- **Engortoz jedoniel ha hebiant**

Ar gwehanadur $\mathcal{TG}(r,p)$ o vezañ sammad r gwehanadur $\mathcal{M}(p)$ dizalc'h linket eus 1 e teu :

$$E\big[\mathcal{TG}(r,p)\big] = rE\big[\mathcal{M}(p)-1\big] = r\frac{q}{p},$$
$$V\big[\mathcal{TG}(r,p)\big] = rV\big[\mathcal{M}(p)\big] = \frac{rq}{p^2}.$$

• **Kevreizhennoù ganer ha naouus**

Evel diskouezet amañ diaraok ez eo kevreizhennoù ganer ha naouus d'ar gwehanadur binomel leiel :

$$g(t) = \left(\frac{p}{1-tp}\right)^r,$$
$$\varphi(t) = \left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^r.$$

Dezren a reer alese al lankadoù dasperiadel (bez' ez eus anezho holl) :

$$\mu_{[k]} = \frac{(k+r-1)!}{(r-1)!}\left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

8.5 DASPARZH MULTINOMEL

8.5.1 Despizadur

Bezet un arc'h enni N boull a k liv, ar c'henfeurioù anezho o vezañ p_1 evit al liv 1, …, p_i evit al liv i, …, p_k evit al liv k. Tennañ a reer lerc'h ouzh lerc'h eus an arc'h-se ur standilhon a n boull, *gant azlakadur*. Bezet X_i niver ar boulloù eus al liv i er standilhon ha bezet enta ar sturiadell-bann $\boldsymbol{V}$ k-ment amparet gant ar c'hedrannoù $X_1, \ldots, X_k$.

Tebegezh an darvoud $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}$ (a zo he c'hedrannoù $x_1, \ldots, x_k$) zo :

$$P(\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}) = \frac{n!}{x_1!\ldots x_k!}p_1^{x_1}\ldots p_k^{x_k}.$$

Gwehanadur dargouezhel multinomel $\mathcal{M}(n;p_1,\ldots,p_k)$ — pe c'hoazh $\mathcal{M}(n;\boldsymbol{p})$ — a reer eus ar gwehanadur arskarek k-ment.

Ent hollek, ar gwehanadur $\mathcal{M}(n;\boldsymbol{p})$ zo e werzhadoù par da niver sevenidigezhioù an darvoudoù $A_1,\ldots,A_k$ e-doug n amprouenn dizalc'h peurheñvel, $p_1,\ldots,p_k$ o vezañ a-getep tebegoù an darvoudoù $A_1,\ldots,A_k$, an kez darvoudoù o vezañ ivez digembez hag o c'hourloiñ ar bondeskad.

Teskad ar gwehanadoù zo teskad ar poentoù dezho daveennoù kevan anleiel, hevelep ma'z eo :

$$x_1+\cdots+x_k=n.$$

En egor $\mathcal{R}^k$ ez eo teskad ar gwehanadoù $G_{\boldsymbol{V}}$ derc'hennet gant ar blaenenn

$$x_1+\cdots+x_k=n.$$

E se ez eo ereet kedrannoù ar gwehanadur multinomel dre un daveadur kevreizhel linennek.

8.5.2 Naouusterioù ar gwehanadur multinomel

Desellomp tebekadur marzel ar gwehanadur divvent (X_1,X_2) a vo aroueziet dre (X,Y) evit bezañ eeun. Dasparzh an driac'h $(X,Y,n-X-Y)$, eleze dasparzh an daouac'h (X,Y) zo hini an dasparzh trinomel :

$$(X,Y)=\mathcal{M}(n;p_1,p_2,1-p_1-p_2).$$

Alese :

$$P(X=x\cap Y=y)=\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}p_1^x p_2^y(1-p_1-p_2)^{n-x-y}.$$

Dasparzhioù marzel X ha Y zo binomel :

$$X=\mathcal{B}(n,p_1),\quad Y=\mathcal{B}(n,p_2).$$

A du 'rall, dasparzh ar gwehanadur a-zianouez $Y/X=x$ zo binomel ivez :

$$\begin{aligned}P(Y=y/X=x)&=\frac{\dfrac{n!}{x!y!(n-x-y)!}p_1^x p_2^y(1-p_1-p_2)^{n-x-y}}{\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p_1^x(1-p_1)^{n-x}}\\&=\frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^y\left(1-\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-x-y},\end{aligned}$$

bezet :

$$(Y/X = x) = \mathcal{B}\left(n - x\ ;\ \frac{p_2}{1 - p_1}\right).$$

Hollekoc'h e tiskouezer ez eo dasparzh a-zianouez $(X_1, \ldots, X_q)$ o c'houzout $X_{q+1} = x_{q+1}, \ldots, X_r = x_r$ an dasparzh multinomel :

$$\mathcal{M}(n - x_{q+1} - \cdots - x_r\ ;\ \pi_1, \ldots, \pi_q),$$

ma'z eo :

$$\pi_1 = \frac{p_1}{p_1 + \cdots + p_q}, \ldots, \pi_q = \frac{p_q}{p_1 + \cdots + p_q}.$$

- **Engortoz jedoniel**

Ar sturiadell engortoz jedoniel he deus da gedrannoù an engortozioù marzel. A se e teu :

$$\boxed{E(\boldsymbol{V}) = n\boldsymbol{p}}.$$

- **Oged an hebiantoù ha kehebiantoù**

Dre skrivañ (X, Y) e-lec'h (X_1, X_2) e teu :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X, Y) &= E\big[(X - np_1)(Y - np_2)\big] \\ &= \underset{x}{E}\big[(X - np_1)\underset{y/x}{E}(Y - np_2)\big].\end{aligned}$$

Hogen :

$$\begin{aligned}\underset{y/x}{E}(Y - np_2) &= E\left[\mathcal{B}\left(n - x, \frac{p_2}{1 - p_1}\right)\right] - np_2 \\ &= (n - x)\frac{p_2}{1 - p_1} - np_2 \\ &= -\frac{p_2}{1 - p_1}(x - np_1).\end{aligned}$$

Alese :

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = -\frac{p_2}{1 - p_1}E\left[(X - np_1)^2\right] = -\frac{p_2}{1 - p_1}np_1(1 - p_1),$$

eleze :

$$\boxed{\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) = -np_1p_2}.$$

E se, oged Σ an hebiantoù ha kehebiantoù, anrez — pa vast $\boldsymbol{V}$ d'un daveadur linennek — hag a renk $k-1$ mard eo anvannel pep p_i, he deus an elfennoù :

$$\begin{aligned} V(X_h) &= np_h(1-p_h) \\ \operatorname{Cov}(X_h, X_{h'}) &= -np_hp_{h'}. \end{aligned}$$

Ar gwezhiader keflended linennek etre X_h ha $X_{h'}$ zo par da :

$$\rho(X_h, X_{h'}) = -\sqrt{\frac{p_hp_{h'}}{(1-p_h)(1-p'_h)}}.$$

N'emañ ket e dalc'h n.

• **Kevreizhennoù ganer ha naouus**

Kevreizhenn c'haner ar gwehanadur $\mathcal{M}(n, \boldsymbol{p})$ zo :

$$\begin{aligned} g_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) &= \sum_{x_1,..,x_k} \frac{n!}{x_1!\dots x_k!}(p_1t_1)^{x_1}\dots(p_kt_k)^{x_k} \\ &= (p_1t_1) + \dots + p_kt_k)^n, \end{aligned}$$

eleze :

$$g_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{p'}\boldsymbol{t})^n.$$

Heñvel dra, ar gevreizhenn naouus zo :

$$\varphi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \left[p_1e^{it_1} + \dots + p_ke^{it_k}\right]^n$$

pezh a ziskouez ez eo ar gwehanadur $\mathcal{M}(n, \boldsymbol{p})$ ar sammad eus n gwehanadur $\mathcal{M}(1, \boldsymbol{p})$ dizalc'h : gwehanadurioù meneger k-ment an darvoudoù $A_1, \dots, A_k$.

8.6 DASPARZH POISSON

8.6.1 Despizadur

Gwehanadur Poisson a arventenn λ (anleiel) a reer eus ar gwehanadur dargouezhel arskarek a zo e werzhadoù teskad ar c'hevanion anleiel, dezho an tebegoù ketep :

$$\begin{aligned} p_x = P(X = x) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \\ G_X = X(\Omega) &= \{0, 1, 2, \dots\} \\ \lambda &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ar gwehanadur-se a noter : $\mathcal{P}(\lambda)$.

Gwiriañ a reer, evel ma tere, ez eo sammad an tebegoù par da 1, evit λ diforzh :

$$\sum_{x\in G_X} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = 1.$$

Teurel evezh ez eo kaougant ar gwehanadur $\mathcal{P}(0)$.

8.6.2 Naouusterioù dasparzh Poisson

8.6.2.1 Mod

An daveadur oc'h eren an tebegoù kevredet ouzh daou gevan kenheuilh zo :

$$\frac{p_{x+1}}{p_x} = \frac{\lambda}{x+1}, \quad \frac{p_{x-1}}{p_x} = \frac{x}{\lambda}.$$

Alese ar mod :

$$\lambda - 1 < M_0 < \lambda.$$

Mard eo kevan λ ez eo model an div werzhad-se. An tebegoù p_x a zigresk tamm ha tamm a bep tu d'ar mod.

8.6.2.2 Kevreizhenn c'haner

Kevreizhenn c'haner gwehanadur Poisson zo :

$$g(t) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}t^x = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^x}{x!} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Alese :

$$g(1+u) = e^{\lambda u} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{u^k}{k!}.$$

E se ez eo ar gevreizhenn c'haner savelet evit nep t hag al lankadoù dasperiadel (bez' ez eus anezho holl) zo par da :

$$\mu_{[k]} = \lambda^k.$$

8.6.2.3 Kevreizhenn naouus

Kevreizhenn naouus da wehanadur Poisson zo :

$$\varphi(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} e^{itx} = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right].$$

A se an eil kevreizhenn naouus, savelet evit nep t :

$$\psi(t) = \lambda(e^{it} - 1) = \lambda \left(\frac{it}{1} + \frac{i^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{i^r t^r}{r!} + \cdots \right).$$

E se ez eo an dassammantoù holl par da λ :

$$c_r = \lambda, \quad \forall r = 1, 2, \ldots$$

O vezañ ma'z eo c_1 par d'an engortoz jedoniel ha c_2 par d'an hebiant, e teu oc'h ouzhpennañ ar strewant :

$$\begin{aligned} E\big[\mathcal{P}(\lambda)\big] &= \lambda, \\ V\big[\mathcal{P}(\lambda)\big] &= \lambda, \\ \sigma\big[\mathcal{P}(\lambda)\big] &= \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

8.6.2.4 Lankadoù kreizet

Al lankad kreizet a'n urzh r zo :

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} (x - \lambda)^r.$$

Ar steudad-se zo ur gevreizhenn gendalc'hek da λ hag o tiarroudañ e teu :

$$\frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{r}}{\mathrm{d}\lambda} = -\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} (x - \lambda)^r + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} (x - \lambda)^r - r \sum_{x=0}^{\infty} (x - \lambda)^{r-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!},$$

eleze,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mu_\mathrm{r}}{\mathrm{d}\lambda} &= -E\big[(X - \lambda)^r\big] + \frac{1}{\lambda} E\big[X(X - \lambda)^r\big] - rE\big[(X - \lambda)^{r-1}\big] \\ &= \frac{1}{\lambda} E\big[(X - \lambda)^{r+1}\big] - rE\big[(X - \lambda)^{r-1}\big] \\ &= \frac{\mu_{r+1}}{\lambda} - r\mu_{r-1}. \end{aligned}$$

Da heul :

$$\mu_{r+1} = \lambda \left(\frac{\mathrm{d}\mu_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\lambda} + r\mu_{r-1} \right).$$

An daveadur darren-se, spesadel da zasparzh Poisson, a ro tu da jediñ a nes da nes al lankadoù kreizet μ_r diwar an daou gentañ $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \lambda & &(= c_2), \\ \mu_3 &= \lambda & &(= c_3), \\ \mu_4 &= \lambda + 3\lambda^2 & &\left(= c_4 + 3c_2^2\right), \\ &\text{h.a.} \end{aligned}$$

8.6.2.5 Monedigezh kehelc'hat gwehanadur Poisson

• **Prientad** — Ur gwehanadur binomel $\mathcal{B}(n,p)$ zo savelet pa vez anavezet n hag an engortoz jedoniel $\lambda = np$. Anat eo e teu $p = \lambda/n$ hag ar gwehanadur desellet zo :

$$\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n}).$$

• **Delakadenn**

> Gwehanadur Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ zo an harz, pa $n \longrightarrow +\infty$, eus ar gwehanadur binomel $\mathcal{B}(n,p)$.

• **Dienadur** — Da zienaat an delakadenn e tiskouezer e tenn $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ etrezek $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pa $n \longrightarrow +\infty$.

A se e teu, dre erlec'hiañ $\frac{\lambda}{n}$ ouzh p :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Studiomp an tri feriad eus an eil kazel pa denn n etrezek an anvevenn.

1. Arstalek eo $\frac{\lambda^k}{k!}$.

2. $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ a denn war-du 1 pa $n \longrightarrow +\infty$.

3. $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ zo e logaritm par da $(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)$; hogen pa $u \longrightarrow 0$ ez eo $\ln(1+u) \sim u$, hag amañ $u = -\frac{\lambda}{n}$ ha neuze :

$$(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \sim (n-k)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \quad \text{a denn war-du } -\lambda.$$

Da heul :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}.$$

Ha neuze :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}}.$$

Domani arver — Liesañ e vez arveret gwehanadur Poisson $\mathcal{P}(np)$ e-lec'h ar gwehanadur binomel $\mathcal{B}(n,p)$ evit $n \geqslant 50$, $p \leqslant 0,1$ ha $np \leqslant 15$. Setu perak e vez graet ivez *dasparzh an tebegoù lav* eus dasparzh Poisson. Dedalvezet e vez da studiañ an anadennoù prin, degouezhel, da skouer : niver ar pezhioù siek en ur standilhon bras tennet diouzh ul lod a zo lav kenfeur ar pezhioù siek ennañ ; niver ar fazioù en ul lerc'hiad hir a wezhiadennoù ; h.a.

8.6.2.6 Sammad daou wehanadur Poisson dizalc'h

Sammad daou wehanadur Poisson dizalc'h zo ur gwehanadur Poisson. E gwir :

$$\begin{aligned} X = \mathcal{P}(\lambda_1) \quad &\Longleftrightarrow \quad g_X(t) = e^{\lambda_1(t-1)} \\ Y = \mathcal{P}(\lambda_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad g_Y(t) = e^{\lambda_2(t-1)}. \end{aligned}$$

Alese :

$$g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)} \quad \Longleftrightarrow \quad X+Y = \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2).$$

Anat eo e c'haller astenn an disoc'h-se da sammad un niver bennak a wehanadurioù Poisson dizalc'h :

$$\sum_{h=1}^{k}\left[\mathcal{P}(\lambda_h)\right] = \mathcal{P}\left(\sum_{h=1}^{k}\lambda_h\right).$$

E se ez eo familh gwehanadurioù Poisson ur familh unarventenn a wehanadurioù dargouezhel dezho un hebiant bevennek, kloz e-keñver ar sammañ. Ouzhpenn se ez eo an engortoz jedoniel kenfeuriek (amañ : par) ouzh an arventenn. Da heul e kengerc'h gwehanadur Poisson kreizet direet a-fet dasparzh etrezek ar gwehanadur reol kreizet direet.

SKOUERIOÙ — Ar gwehanadur X a zeskriv niver ar galvoù a zegouezh en ur greizenn bellgomz en ur mare bennak eus an deiz e-pad ur munud. Ar gwehanadur X zo dasparzhet ent poasonat gant an arventenn 2,65. Neuze e tewerzher an tebegoù evel henn :

$$P(X=k)=\frac{2,65^k}{k!}\cdot e^{-2,65} \quad \text{evit } k=0,1,2,\ldots$$

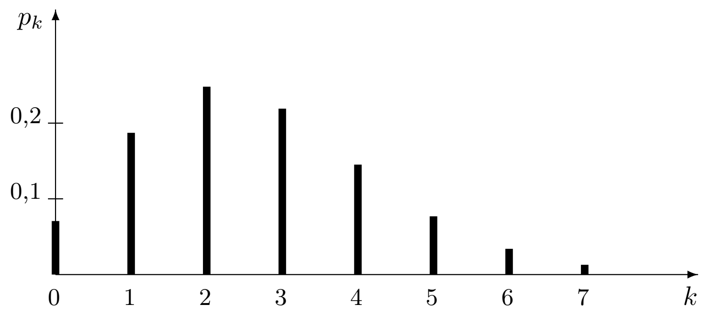
Da gentañ e jedomp $p_0 = P(X=0) = e^{-2,65} \simeq 0,0707$ (rontaet). Ar gwerzhadoù da heul a jeder bennozh d'an daveadur darren :

$$p_{k+1} = P(X=k+1) = \frac{2,65}{k+1}\cdot_k \quad \text{evit } k=0,1,2,\ldots$$

Setu amañ dindan taolenn ar gwerzhadoù kentañ rontaet eus an dasparzh :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0,0707	0,1872	0,2481	0,2191	0,1452	0,0769	0,0340	0,0129

Setu amañ dindan derc'hennadur kevregat an dasparzh Poisson X :



An debegezh e tegouezhfe e-doug ur munud seizh galv d'ar muiañ zo :

$$P(X \leqslant 7) = \sum_{k=0}^{7} p_k \approx 0,9941.$$

Neuze e-doug ur munud e tegouezh er greizenn muioc'h eget seizh galv gant an debegezh $1 - P(X \leqslant 7) \approx 0,0059$. Eleze an holl werzhadoù adalek $k = 8$ zo dezho en ur ser an debegezh 0,0059. N'hon eus ket enskrivet an debegezh vihan-se en daolenn amañ diaraok.

Ar gwehanadur dargouezhel X desellet zo dezhañ an engortoz hag an hebiant :

$$E(X) = V(X) = 2,65.$$

EVEZHIADENN — Argerzh poasonat

Argerzh Poisson pe *argerzh poasonat* a reer eus delvan tebegouriel ar plegennoù ma c'hoarvez, ent dargouezhek ha hep koshadur, ul lanvad darvoudoù kenheuilh $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n, \ldots$,: degouezhadurioù, ganedigezhioù, chanadoù, digevanidigezhioù atom (skinoberiegezh), h.a. An argerzh a lakaer boas da zeraouiñ er pred $t = 0$, ha daou zoare kenglokaus zo d'e zeskrivañ. Da gentañ e c'haller desellout, evit nep t, ar gwehanadur dargouezhel arskarek N_t dezhañ da werzhadoù niver hollel an darvoudoù c'hoarvezet etre ar pred 0 hag ar pred t, eleze ur gwehanadur a zo ur gevreizhenn da t. D'an eil e c'haller desellout ar gwehanadurioù dargouezhel kendalc'hek "pred ma c'hoarvez an darvoudoù kenheuilh, $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots, T_n, \ldots$ E se e lavarer ez eus d'ul lerc'hiad anvevenn a zarvoudoù $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n, \ldots$ sevenet d'ar predoù dargouezhek $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots, T_n, \ldots$ un argerzh poasonat mar bez bastet d'ar c'hentreadoù mañ da heul :

1. Niver an darvoudoù A o c'hoarvezout etre ar predoù t ha $t+h$ zo dizalc'h diouzh niver an darvoudoù c'hoarvezet etre ar predoù 0 ha t ;
2. An debegezh e c'hoarvezfe un darvoud A d'an nebeutañ etre ar predoù t ha $t+h$ zo par da : $c \cdot h + o(h)$, ma'z eo c un arstalenn e-keñver t hag $o(h)$ un trabihan a urzh vrasoc'h eget h pa denn h war-du mann, eleze : $\lim_{h \to 0} o(h)/h = 0$;
3. An debegezh e c'hoarvezfe daou zarvoud A pe vuioc'h etre ar predoù t ha $t+h$ zo a-urzh gant $o(h)$.

Da skoueraat kement-se e c'haller daveiñ da dremen ar c'harbedoù en ur poent bennak eus un hent. Ar c'hentread kentañ zo kefleuniet mard eo dizalc'h degouezhadurioù ar c'harbedoù. Kefleuniet eo an eil mard eo arstalek kellusk degouezhout ar c'harbedoù (muzuliet dre c), e-doug an amzervezh arselliñ da nebeutañ, e gerioù all mard eo ungenezh an kez amzervezh arselliñ. Evit an trede kentread a dalvez ez eo bihan kenan tebegezh degouezhadur daou garbed pe vuioc'h e-keñver tebegezh degouezhadur ur c'harbed hepken, a zo bihan ivez a du 'rall, e-doug un entremez amzer boc'hedel.

Aroueziomp dre $p_x(t)$ an debegezh e tegouezhfe x karbed e-doug an entremez $[0,t]$ ha dre $\pi_x(h,t)$ an debegezh e tegouezhfe x karbed etre ar predoù t ha $t+h$. A se e teu :

$$p_x(t+h) = \sum_{y=0}^{x} p_y(t) \cdot \pi_{x-y}(h,t),$$

pa'z eo dizalc'h an eil diouzh egile niver an degouezhadurioù e-doug an entremezioù $[0,t]$ ha $[t,t+h]$, dre berzh ar c'hentread 1). A du 'rall, dre berzh 2) ha 3) :

$$\begin{aligned}
\pi_0(h,t) &= 1 - ch + o(h), \\
\pi_1(h,t) &= ch + o(h), \\
\pi_z(h,t) &= o(h) \quad \text{mar } z \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Neuze :

$$p_x(t+h) = p_x(t)[1-ch] + p_{x-1}(t)ch + o(h),$$

eleze :

$$p_x(t+h) - p_x(t) = -hc\big[p_x(t) - p_{x-1}(t)\big] + o(h).$$

Pa denn h war-du mann dre werzhadoù muiel e tenn kazel dehou an atalad war-du mann, evit x ha t diforzh, pezh a ziskouez ez eo ar gevreizhenn $p_x(t)$ *kendalc'hek a-zehou* evit nep t, x o vezañ diforzh.

Dre erlec'hiañ $t-h$ ouzh t e teu :

$$p_x(t) - p_x(t-h) = -hc\big[p_x(t-h) - p_{x-1}(t-h)\big] + o(h),$$

hag, o poellata heñvel, e saveler ez eo $p_x(t)$ *kendalc'hek a-gleiz* evit nep t, x o vezañ diforzh. Neuze ez eo $p_x(t)$ ur gevreizhenn gendalc'hek da t evit nep x.

Ar parderioù amañ diaraok a c'haller skrivañ en doare-mañ :

$$\begin{aligned}
\frac{p_x(t+h) - p_x(t)}{h} &= -c\big[p_x(t) - p_{x-1}(t)\big] + \frac{o(h)}{h}, \\
\frac{p_x(t) - p_x(t-h)}{h} &= -c\big[p_x(t-h) - p_{x-1}(t-h)\big] + \frac{o(h)}{h},
\end{aligned}$$

ha pa denn h war-du mann dre werzhadoù muiel, dre berzh kendalc'hegezh $p_x(t)$ evit nep x :

$$\begin{aligned}
\frac{p_x(t+h) - p_x(t)}{h} &\to -c\big[p_x(t) - p_{x-1}(t)\big], \\
\frac{p_x(t) - p_x(t-h)}{h} &\to -c\big[p_x(t-h) - p_{x-1}(t-h)\big].
\end{aligned}$$

E se ez eus da $p_x(t)$, evit x diforzh, un diarroudenn gentañ evit nep t a vast da :

$$\frac{\mathrm{d}p_x(t)}{\mathrm{d}t} = -c\big[p_x(t) - p_{x-1}(t)\big],$$

atalad orgemmel diazez an argerzhioù poasonat.
Evit $x = 0$ e teu an atalad orgemmel da vezañ, pa'z eo $p_{-1}(t) = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -cp_0(t),$$

a zo an diskoulm a'r rezh :

$$p_0(t) = Ae^{-ct}.$$

An arstalenn A zo par da 1, rak $p_0(0) = 1$ dre berzh ar c'hentread 2) :

$$p_0(t) = e^{-ct}.$$

Diskouezomp dre zarren ez eo :

$$p_x(t) = \frac{e^{-ct}(ct)^x}{x!}.$$

Gwir eo evit $x = 0$. Darbennomp ez eo gwir evit $x - 1$ ha dodomp :

$$p_x(t) = \frac{e^{-ct}(ct)^x}{x!}\theta(t;x).$$

An atalad orgemmel a zeu :

$$t\theta'_t(t;x) + x\theta(t;x) = x,$$

atalad orgemmel linennek a zo e ziskoulm hollek eus ar rezh :

$$\theta(t;x) = 1 + A_x t^{-x}.$$

Alese :

$$p_x(t) = \frac{e^{-ct}(ct)^x}{x!}\left(1 + \frac{A_x}{t^x}\right).$$

Hogen gant $t = 0$ e ranker kaout $p_x(0) = 0$ dre berzh 2), evit $x > 1$. Da heul ez eo mannel an arstalenn A_x ha neuze :

$$p_{x-1}(t) = \frac{e^{-ct}(ct)^{x-1}}{(x-1)!} \Longrightarrow p_x(t) = \frac{e^{-ct}(ct)^x}{x!}.$$

E se ez eo bet dienaet an disoc'h rakdodet ha niver an degouezhadurioù o c'hoarvezout etre ar predoù 0 ha t zo dezho dasparzh Poisson $\mathcal{P}(ct)$.

Diskouezomp ez eus ivez da niver an degouezhadurioù etre t ha $t+h$ dasparzh Poisson $\mathcal{P}(ct)$, evit nep t.

Aroueziomp dre Y ar gwehanadur dargouezhel-se ha dre $\varphi_Y(u)$ e gevreizhenn naouus. Dre berzh 1) ez eo dizalc'h X ha Y :

$$\varphi_{X+Y}(u) = \varphi_X(u) \cdot \varphi_Y(u).$$

Dre berzh an disoc'h emaomp o paouez dienaat o deus X ha $X+Y$ dasparzh Poisson :

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \exp\left[ct(e^{iu}-1)\right] \\ \varphi_{X+Y}(u) &= \exp\left[c(t+h)(e^{iu}-1)\right]. \end{aligned}$$

Neuze ez eo ar gevreizhenn naouus da Y :

$$\varphi_Y(u) = \frac{\varphi_{X+Y}(u)}{\varphi_X(u)} = \exp\left[ch(e^{iu}-1)\right].$$

E se en deus Y dasparzh Poisson $\mathcal{P}(ch)$, pezh a ziskouez ez eo c engortoz jedoniel niver an degouezhadurioù dre unanenn amzer $(h=1)$.

An disoc'h-se a hollekaer diouzhtu : niver an degouezhadurioù o c'hoarvezout e-doug an entremezioù $[0,t_1], [t_1,t_2], \ldots, [t_{k-1},t_k]$ zo gwehanadurioù Poisson dizalc'h a-vloc'h a arventennoù :

$$ct_1, c(t_2-t_1), \ldots, c(t_k-t_{k-1}).$$

Hollekoc'h, niveroù an degouezhadurioù o c'hoarvezout e-doug amzervezhioù disparti $\tau_1, \ldots, \tau_k$ zo dezho ent dizalc'h dasparzhioù Poisson a zo o arventennoù $c\tau_1, \ldots, c\tau_k$ e dalc'h pad an entremezioù ha n'eo ket o orin.

Evit klozañ an evezhiadenn-mañ, lavaromp e c'haller astenn c'hoazh an disoc'hoù-se o c'houlakaat ez eo c ur gevreizhenn gendalc'hek d'ar pad t, dezhañ gwerzhadoù muiel : $c = c(t)$, o virout ar c'hentreadoù all avat.

POELLADENNOÙ

8.01 Bezet un diñs eorizhek c'hwec'h tal.

a) Pe debegezh eo an darvoud kaout ur wech d'an nebeutañ an niver 6 o teurel c'hwec'h gwech an diñs?

b) Keñveriañ an debegezh-se ouzh hini an darvoud kaout d'an nebeutañ 2 wech an niver 6 o teurel 12 gwech an diñs.

8.02 En ul lotiri ez eo gounidek ur bilhed diwar n bilhed. Un den a bren n bilhed.

a) Pe debegezh eo en defe an den ur bilhed gounit hepken?

b) Pe debegezh eo en defe an den ur bilhed gounit d'an nebeutañ?

c) Pe harz zo d'an div debegezh-se pa denn n war-du $+\infty$?

8.03 En un arc'h ez eus 3 boull wenn, 2 voull louet, 1 voull du.

a) Tennañ a reer 2 voull eus an arc'h, gant azlakadur. Pe debegezh eo tennañ ur voull louet hag ar voull du?

b) Hevelep goulenn, hep azlakadur avat.

8.04 Goulakaat a reer ez eus ur mezeg ent keitat diwar 1000 den o veajiñ gant an tren en ur mare roet. Pe debegezh eo na gavout mezeg ebet en un treniad 1000 den?

8.05 En un arc'h ez eus 100 boull en o zouez unan ruz.

a) Seveniñ a reer n tennadenn oc'h azlakaat bewech. Pe debegezh eo tennañ ar voull ruz ur wech d'an nebeutañ?

b) Pet tennadenn zo ret ober evit ma ve an debegezh da gaout ar voull ruz ur wech d'an nebeutañ brasoc'h eget 0,95?

c) Diskoulmañ ar goulenn a-raok dre arnesaat an dasparzh binomel dre zasparzh Poisson.

8.06 Un destenn voulet zo enni k vi koukoug. Da geñver un adlennadenn ez eo tebegezh dinoadur ur fazi par da $p = 0,75$, ha pep dinoadenn zo dizalc'h diouzh ar re all.

a) Jediñ engortoz jedoniel ar gwehanadur dargouezhel niver ar fazioù dinoet.

b) Jediñ da heul an engortoz jedoniel mar greer div adlennadenn dizalc'h.

8.07 Mard eo kant vloaz un den diwar 80, jediñ an debegezh e ve ur c'hantvloaziad d'an nebeutañ:

a) En ur stroll 100 den kemeret dre zargouezh ?

b) En ur stroll 500 den kemeret dre zargouezh ?

8.08 Bezet un arc'h enni 4 boull c'hlas ha 2 voull wenn. Seveniñ a reer un tennadur hep azlakadur eus 3 boull ha bezet N ar gwehanadur dargouezhel niver ar boulloù glas.

a) Savelañ dasparzh N ha jediñ e engortoz hag e strewant.

b) Keñveriañ gant arventennoù ar gwehanadur binomel $\mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right)$.

8.09 En ur magva e tenner 6 loen dre zargouezh. Pep loen en deus an debegezh 0,5 da vezañ ur par hag ivez 0,5 da vezañ ur barez. Bezet C ar gwehanadur dargouezhel niver ar c'houbladoù a c'haller ober gant ar 6 loen. Savelañ dasparzh C ha jediñ $E(C)$.

8.10 Ar steredenn lugernusañ eus an oabl zo steredenn ar C'hi. Goulakaat a reer ez eo 1/43 tebegezh distro ur steredenn lostek lugernusoc'h eget steredenn ar C'hi ur bloaz roet. Jediñ an debegezh ne ve e-pad 100 vloaz kenheuilh steredenn lostek ebet lugernusoc'h eget ar C'hi.

8.11 Bezet un teskad amparet gant 8 paotr hag 8 plac'h, ha tennañ a reer anezhañ d'ar blouzenn ur stroll 8 den. Bezet N ar gwehanadur dargouezhel par da niver ar baotred er stroll. Jediñ an debegezh $P(3 \leqslant N \leqslant 5)$ ha goude he c'heñveriañ gant tebegezh an darvoud heñvel evit ur gwehanadur binomel $\mathcal{B}(8, \frac{1}{2})$.

8.12 Desellout a reer un trevnad T amparet gant n parzh gant pep hini anezho an debegezh p da chanañ ent dizalc'h diouzh ar re all. An trevnad a chom sac'het e unan adalek ar mare ma chan ur parzh anezhañ. Pe debegezh a-zianouez zo d'an darvoud unan hepken eus e n parzh zo sac'het o c'houzout ez eo sac'het an trevnad T ?

8.13 Oberidigezh un traezad en ur greanti a vez sevenet gant 4 % a draezadoù siek.

a) Jediñ an debegezh p_k e ve en ul lod a 35 traezad (dibabet dre zargouezh) k traezad siek, evit $k = 0, 1, 2, 3$.

b) Adober ar jedadurioù oc'h erlec'hiañ ouzh ar gwehanadur dik e arnesadur poasonat.

8.14 Daou zen a c'hoari pil pe groaz n gwech pep hini. Klask a reer an debegezh o defe an un niver a groazioù.

a) Savelañ ur reollun o tewerzhañ an debegezh-se evel ur sammad amparet gant gwezhiaderioù binomel.

b) Dre skrivañ $(a+b)^{2n}$ da gentañ e rezh e zispakad binomel klasel, ha d'an eil e rezh karrez dispakad binomel $(a+b)^n$, rezhiennañ an debegezh jedet en *a*) diwar-bouez ur gwezhiader binomel hepken.

8.15 En ur genstrivadeg kudoned pri en deus un tenner daou denn, goulakaet dizalc'h. Da bep tenn en deus un debegezh par da 0,8 da dizhout ar vukenn.

a) Pe debegezh eo e tizhfe ar vukenn ur wech hepken gant daou denn ?

a) Pe debegezh eo e tizhfe ar vukenn ur wech da nebeutañ gant daou denn ?

8.16 Teurel a reer ur pezh moneiz n gwech lerc'h ouzh lerc'h, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Savelañ teskad gwerzhadoù n, hevelep ma ve tebegezh kaout pil nebeutoc'h eget div wech brasoc'h pe bar ouzh $\frac{1}{2}$. (Ali : gallout a reer diforc'hañ an degouezhioù $n < 4$ hag $n \leqslant 4$, ha diskouez ez eo $2^{n-1} > n + 1$ en eil degouezh diwar-bouez ur poellata dre zarren).

8.17 Bezet ur spletad 32 gartenn. Tennañ a reer ur gartenn dre zargouezh, notañ he liv (pikez, karo, keur, treflez) hag he adlakaat er c'hoari. Arren a reer 4 gwech an amprouenn-se en hevelep amveziadoù (ar peder zennadenn a c'houlakaer dizalc'h). Bezet Z ar gwehanadur dargouezhel o reiñ niver an treflez bet da geñver pep hini eus ar peder zennadenn-se. Savelañ dasparzh Z ha jediñ engortoz, hebiant ha strewant ar gwehanadur Z.