7

Ogedoù an hebiantoù ha kehebiantoù Kevreizhennoù naouus d'ur gwehanadur dargouezhel

7.1 OGEDOÙ AN HEBIANTOÙ HA KEHEBIANTOÙ

7.1.1 Engortoz un oged

Bezet pevar gwehanadur dargouezhel X, Y, Z, T savelet war an un egor tebekaet ha dezho pep a engortoz jedoniel.

Despizadur — Bezet an oged $M = \begin{bmatrix} X & Z \\ Y & T \end{bmatrix}$. Savelañ a reer engortoz an oged M dre : $E(M) = \begin{bmatrix} E(X) & E(Z) \\ E(Y) & E(T) \end{bmatrix}$.

Lavarout a reer ez eo par engortoz an oged da oged an engortozioù.

7.1.2 Oged an hebiantoù ha kehebiantoù

Bezet ur gwehanadur divvent (X, Y) hevelep ma ve eus $V(X)$, $V(Y)$ ha $\text{Cov}(X, Y)$. Oged an hebiantoù ha kehebiantoù a reer eus an oged :

$$W = \begin{bmatrix} V(X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix}.$$

Delakadenn — Oged an hebiantoù ha kehebiantoù a'r gwehanadur divvent (X, Y) zo engortoz an oged liesâd :

$$\begin{bmatrix} X - \overline{X} \\ Y - \overline{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - \overline{X} & Y - \overline{Y} \end{bmatrix}.$$

Rak, mar dispakomp al liesâd e teu :

$$\begin{bmatrix} \left(X-\overline{X}\right)^2 & \left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right) \\ \left(Y-\overline{Y}\right)\left(X-\overline{X}\right) & \left(Y-\overline{Y}\right)^2 \end{bmatrix} \quad \text{a zo he engortoz :}$$

$$\begin{bmatrix} E\left[\left(X-\overline{X}\right)^2\right] & E\left[\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)\right] \\ E\left[\left(Y-\overline{Y}\right)\left(X-\overline{X}\right)\right] & E\left[\left(Y-\overline{Y}\right)^2\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix}.$$

7.1.3 Oged keflended

Oged keflended ar gwehanadur divvent (X, Y) a reer eus an oged : $R = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$.

7.1.3.1 Delakadenn 1

An oged keflended R zo par da oged an hebiantoù ha kehebiantoù eus ar gwehanadurioù reolataet (kreizet ha direet) $\frac{X-\overline{X}}{\sigma(X)}$, $\frac{Y-\overline{Y}}{\sigma(Y)}$. E gwir e c'haller skrivañ an eil oged evel henn :

$$\begin{bmatrix} E\left[\frac{\left(X-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2(X)}\right] & E\left[\frac{\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right] \\ E\left[\frac{\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right] & E\left[\frac{\left(Y-\overline{Y}\right)^2}{\sigma^2(Y)}\right] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{E\left[\left(X-\overline{X}\right)^2\right]}{\sigma^2(X)} & \frac{E\left[\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)\right]}{\sigma(X)\sigma(Y)} \\ \frac{E\left[\left(X-\overline{X}\right)\left(Y-\overline{Y}\right)\right]}{\sigma(X)\sigma(Y)} & \frac{E\left[\left(Y-\overline{Y}\right)^2\right]}{\sigma^2(Y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}.$$

7.1.3.2 Delakadenn 2

An ogedoù W, R ha $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma(X) & 0 \\ 0 & \sigma(Y) \end{bmatrix}$ zo ereet dre an daveadur :

$$\boxed{W = \Sigma R \Sigma}.$$

N'eus nemet jediñ $\Sigma R \Sigma$ evit adkavout :

$$\Sigma R \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2(X) & r\sigma(X)\sigma(Y) \\ r\sigma(X)\sigma(Y) & \sigma^2(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix} = W.$$

7.2 KEVREIZHENN NAOUUS D'UR GWEHANADUR DARGOUEZHEL

7.2.1 Despizadurioù

Bezet ur gwehanadur dargouezhel X war an egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$ ha F e gevreizhenn dasparzh. Engortoz jedoniel ar gevreizhenn gediat kemplezh e^{itX}, ma'z eo t un arventenn werc'hel, a reer eus an niver notet :

$$E\big(e^{itX}\big) \qquad \text{pe} \qquad \varphi_X(t) \qquad \text{pe, berroc'h} \qquad \varphi(t)$$

a zo par da sammegenn Stieltjes $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$. E se :

$$\boxed{E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx\, dF(x) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx\, dF(x)}.$$

Lavarout a reer ez eo φ *kevreizhenn naouus* d'ar gwehanadur X evit ar gevreizhenn dassammañ F.

7.2.2 Rezhiennoù dibarek $\varphi(t)$

7.2.2.1 Degouezh ur gwehanadur dargouezhel arskarek X (bevennek pe anvevenn)

Bezet $x_1, x_2, \ldots, x_k, ...$, gwerzhadoù ar gwehanadur X ha $p_1, p_2, \ldots, p_k, ...$, an tebegoù keñverek. A se e teu :

$$\boxed{\varphi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{itk} p_k}.$$

7.2.2.2 Degouezh ur gwehanadur dirgendalc'hek X

Bezet f tebekter X. A se e teu :

$$\boxed{\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx}.$$

An arloadur $f \mapsto \varphi$ a reer treuzfurmadur Fourier anezhañ.

7.2.3 Perzhioù

7.2.3.1 Kendalc'hegezh φ

Bezet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$. Ar parder $|e^{itx}| = 1$ a empleg :

$$\varphi(t) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |dF(x)|$$

hag o vezañ ma'z eo ar sammegenn par da 1 ez eus : $|\varphi(t)| \leqslant 1$. Dezren a reer ez eo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$ kengerc'hus dizave hag unvan e-keñver t. Neuze ez eo kengerc'hus φ.

7.2.3.2 daveadurioù

Bez' ez eus

$$\varphi_X(-t) = E\left[e^{i(-t)X}\right] = E\left[e^{-itX}\right] = \overline{\varphi_X(t)}.$$

Heñvel dra :

$$\varphi_{-X}(-t) = \varphi_X(t).$$

7.2.4 Dedalvezadur ar gevreizhenn naouus da jedadur al lankadoù

7.2.4.1 Kounañ

Sed an dispakad a-steudad :

$$e^{itx} = 1 + itx + \frac{(it)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}x^k + \cdots$$

Liesaomp an div gazel dre $f(x)$:

$$e^{itx}f(x) = f(x) + itxf(x) + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}x^k f(x) + \cdots$$

Mar kengerc'h unvan ar steudad-se ha mar bez lankadoù a bep urzh e c'haller sammegañ termen ha termen hag e teu :

$$\boxed{\varphi(t) = 1 + itm + \frac{(it)^2}{2!}m_2 + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}m_k + \cdots}\,.$$

Dezren a reer, o notañ $\varphi^{(k)}$ k-vet diarroudenn φ :

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \cdot m_k \quad \text{eleze} \quad \boxed{m_k = \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0)}\,.$$

EVEZHIADENN — Ma n'eus lankadoù nemet betek an urzh k e tiskouezer ez eo $\varphi(t)$ par d'an dispakad bevennek :

$$\varphi(t) = 1 + itm + \frac{(it)^2}{2!}m_2 + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}m_k + o(t^k).$$

7.2.4.2 Lankadoù kreizet

Sevenomp ar c'hemm gwehanadur $Y = X - m$, eleze ez eo Y ar gwehanadur kreizet.
Ar gevreizhenn naouus da Y zo :

$$\psi(t) = 1 + it\mu_1 + \frac{(it)^2}{2!}\mu_2 + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}\mu_k + \cdots$$

ma'z eo bevennek pe anvevenn dispakad an eil kazel.
Teurel evezh ez eo $\mu_1 = E(X - m) = 0$.

7.2.5 Eil kevreizhenn naouus

7.2.5.1 Despizadur

Eil kevreizhenn naouus d'ar gwehanadur X a reer eus ar gevreizhenn :

$$t \longmapsto \ln \varphi(t).$$

Mar bez gant $\varphi(t)$ un dispakad a-steudad pe un dispakad bevennek e teu :

$$\ln \varphi(t) = itc_1 + \frac{(it)^2}{2!}c_2 + \frac{(it)^3}{3!}c_3 + \frac{(it)^4}{4!}c_4 + \cdots$$

ma reer dassammantoù a'r gwehanadur dargouezhel X eus ar gwezhiaderioù $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$

7.2.5.2 Rezhiennoù dibarek

- **Gwehanadur arskarek bevennek pe anvevenn**

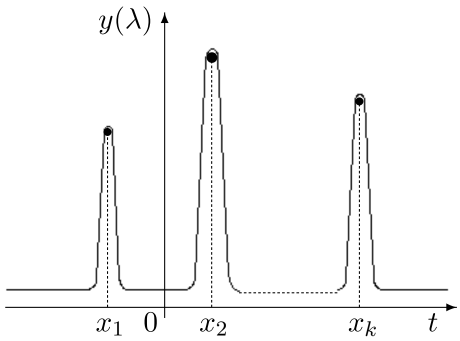
Diskouez a reer :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-it\lambda}\varphi(t)\,dt = \begin{cases} p_k & \text{mar } \lambda = x_k \\ 0 & \text{mar } \lambda \neq x_k \end{cases}$$

Kevregad ar gevreizhenn

$$y(\lambda) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-it\lambda}\varphi(t)\,dt$$

en deus an neuz-mañ da heul :



Seul vrasoc'h an arventenn T, seul dostoc'h ez eo hedennoù an eizhapoentoù ouzh $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

- **Gwehanadur dirgendalc'hek**

Diskouez a reer kement-mañ :

$\sim$ E pep poent ma'z eo f kendalc'hek :

$$f(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \varphi(t)\, dt;$$

$\sim$ E pep poent ma'z eus evit f un digendalc'h a'r c'hentañ spesad :

$$\frac{f(x^+) - f(x^-)}{2} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \varphi(t)\, dt.$$

An disoc'h-se a reer *delakadenn geveskemmded Fourier* anezhañ.

7.2.6 kemm gwehanadur

Desellomp ar c'hemm gwehanadur :

$$Y = aX + b.$$

Kevreizhenn naouus ψ da Y zo savelet dre :

$$\psi(t) = E(e^{itY}).$$

Dezren a reer alese :

$$\psi(t) = E\left[e^{it(aX+b)}\right] = E\left[e^{itaX} e^{itb}\right] = e^{itb} E\left[e^{itaX}\right],$$

eleze erziwezh :

$$\psi(t) = e^{itb} \varphi(at).$$

• Dedalvezadur d'ar gwehanadur dargouezhel kreizet

Seveniñ a reer ar c'hemm gwehanadur : $Y = X - m$ (m o vezañ an engortoz jedoniel). A se e teu :

$$\psi(t) = e^{-itm} \varphi(t).$$

7.2.7 Jediñ an dassammantoù a-gevreizh d'al lankadoù kreizet

Gwelet hon eus ez eo $\varphi(t) = e^{itm}\psi(t)$. A se :

$$\begin{aligned}\ln\varphi(t) &= itm + \ln\psi(t)\\ &= itm + \ln\left(1 - \frac{t^2}{2!}\mu_2 - i\frac{t^3}{3!}\mu_3 + \frac{t^4}{4!}\mu_4 + \cdots\right),\end{aligned}$$

pe dre zedalvout $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \cdots$

$$\ln\varphi(t) = itm - \frac{t^2}{2}\mu_2 - i\frac{t^3}{3!}\mu_3 + \frac{t^4}{4!}\mu_4 - \frac{t^4}{8}\mu_2^2 + \cdots$$

Dre hevelebadur e teu :

$$\begin{aligned}c_1 &= m\\ c_2 &= \mu_2\\ c_3 &= \mu_3\\ c_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2.\end{aligned}$$

E se, an eil kevreizhenn naouus a gevaraez jediñ dre he dispakad an dassammantoù a dalvez neuze da gaout al lankadoù kreizet kentañ.

POELLADENNOÙ

7.01 Kounañ ez eo savelet kevreizhenn dassammañ F ar gwehanadur kendalc'hek unvan X war an entremez $[0,1]$ dre :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{mar } x < 0 \\ x & \text{mar } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{mar} x \ \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Savelañ ar gevreizhenn naouus da X.

b) Dezren alese lankadoù kreizet X.

7.02 Gwehanadur dargouezhel Poisson m e arventenn a rezhienner :

$$P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

a) Savelañ an div gevreizhenn naouus d'ar gwehanadur.

b) Dezren alese dassammantoù gwehanadur Poisson.

7.03 Ar gwehanadur reol kreizet direet zo e debekter :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

a) Diskouez ez eo f un tebekter.

b) Savelañ an div gevreizhenn naouus d'ar gwehanadur.