6

Naouusterioù ur gwehanadur div- ha liesment

6.1 ENGORTOZ JEDONIEL

Bezet $\boldsymbol{V}$ ur gwehanadur n ment a zo e gedrannoù $X_1, \ldots, X_n$ ha teskad ar gwehanadoù $G_{\boldsymbol{V}} \subset \mathbb{R}^n$. Bezet φ ur gevreizhenn o kevrediñ ouzh pep poent $\boldsymbol{v}$ eus teskad ar gwehanadoù ur poent $\boldsymbol{w}$ eus $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$. *Engortoz jedoniel* $\varphi(\boldsymbol{V})$ a reer eus ar sturiadell $\boldsymbol{m}$ eus $\mathbb{R}^p$ a zo ar c'hedrannoù m_i par da :

$$m_i \begin{cases} \displaystyle\sum_{\boldsymbol{v} \in G_{\boldsymbol{V}}} \varphi_i(\boldsymbol{v}) P(\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}) & \text{mard eo } \boldsymbol{V} \text{ arskarek ;} \\[2ex] \displaystyle\int_{G_{\boldsymbol{V}}} \varphi_i(\boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} & \text{mard eo } \boldsymbol{V} \text{ dirgendalc'hek a debekter } f \text{ ;} \end{cases}$$

dindan an amplegad ma ve pep hini eus ar sammadoù pe eus ar sammegennoù ($i = 1, 2, \ldots, p$) kengerc'hus ent dizave. En degouezh kontrol e lavarer n'eus ket a engortoz jedoniel evit $\varphi(\boldsymbol{V})$.

Gwelet e vo amañ dindan an degouezh ma'z eo $n = 2$, eleze hini ur gwehanadur divvent.

6.1.1 Engortoz jedoniel un daouac'h

Bezet (X, Y) ur gwehanadur divvent e werzhadoù (x_i, y_j) elfennoù eus $\mathbb{R}^2$. Engortoz jedoniel an daouac'h (X, Y) a reer eus ar sturiadell $\big(E(X), E(Y)\big)$, hevelep ma'z eo :

$$E(X) = \sum_i x_i p_{i\bullet} \qquad \text{hag} \qquad E(Y) = \sum_j x_j p_{\bullet j}.$$

EVEZHIADENN — Engortoz ar gwehanadur divvent zo amparet gant daouac'h engortozioù an dasparzhioù marzel. Gallout a reer desellout c'hoazh ez eo engortoz jedoniel ar sturiadell $\boldsymbol{V}_{ij}$ savelet dre ar sturiadell $\boldsymbol{E}$ a zaveennoù $\big(E(X), E(Y)\big)$.

Mar kevreder ouzh nep sturiadell $\boldsymbol{V}_{ij}$ an daouboent (O, A_{ij}) deverket outañ ar gwezhiader p_{ij} ha mar kevreder (O, G) ouzh ar sturiadell $\boldsymbol{E}$, neuze ez eo ar poent G trommgreiz ar poentoù A_{ij} dezho pep a wezhiader p_{ij}.

• Bezet ur gwehanadur divvent (X, Y) hag un arloadur f eus $\mathbb{R}^2$ da $\mathbb{R}$, hevelep ma'z eo :

$$(x_i, y_j) \longmapsto z_{ij}, \qquad z_{ij} = f(x_i, y_j).$$

Tebekaet eo ar gwehanadur nevez Z-se dre $P(z_{ij}) = P(x_i, y_j) = p_{ij}$.

Anat eo e c'haller jediñ $E(Z)$ ha $V(Z)$ diwar o despizadurioù, hogen evit kevreizhennoù f 'zo ha dindan amplegadoù 'zo e c'haller kaout $E(Z)$ ha $V(Z)$ war-eeun diwar $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

• **Dezren a reer an delakadenn da heul** :

Delakadenn — Bezet daou wehanadur dargouezhel X ha Y savelet war an un egor. O sammad $X + Y$ hag o liesâd XY zo daou wehanadur dargouezhel war an egor-se.

6.1.2 Engortoz jedoniel sammad div gedrann un daouac'h

Bezet ar gevreizhenn f hevelep ma'z eo :

$$(x_i, y_j) \longmapsto z_{ij}, \qquad z_{ij} = x_i + y_j.$$

Dre berzh linennegezh an niñvader engortoz e saveler an disoc'h-mañ :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y),$$

a zo gwir na pa ve ar gwehanadurioù dizalc'h pe get.

Taolennomp argerzh ar jediñ :

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j p_{ij}(x_i + y_j) &= \sum_i \sum_j p_{ij}x_i + \sum_i \sum_j p_{ij}y_j \\
&= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij} \\
&= \sum_i x_i p_{i\bullet} + \sum_j y_j p_{\bullet j} \\
&= E(X) + E(Y).
\end{aligned}$$

Adlakadenn

$$E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z),$$
$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad a \text{ ha } b \text{ gwerzhadoù kaougant.}$$

Ent dibarek mard eo $a = 1$ ha $b = -1$, e teu :

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y).$$

Heñvel dra :

$$E(X - a) = E(X) - a \quad \text{hag} \quad E\big(X - \overline{X}\big) = 0.$$

Seurt perzhioù a grenner dre lavarout ez eo an engortoz jedoniel un niñvader linennek.

6.1.3 Engortoz liesâd daou wehanadur dizalc'h

Bezet ar gevreizhenn f hevelep ma'z eo :

$$(x_i, y_j) \longmapsto z_{ij}, \qquad z_{ij} = x_i y_j.$$

Mard eo dizalc'h kedrannoù X ha Y ar gwehanadur divvent (X, Y) :

$$\boxed{E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)}\,.$$

E gwir, dre zespizadur ez eus : $E(X \times Y) = \sum_i \sum_j p_{ij} x_i y_j$.

Dizalc'h ar c'hedrannoù a zezgerier dre : $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$. Da neuze :

$$E(X \times Y) = \sum_i \sum_j p_{i\bullet}p_{\bullet j}x_i y_j = \sum_i p_{i\bullet}x_i \sum_j p_{\bullet j}y_j = E(X) \times E(Y).$$

EVEZHIADENN

$$(X, Y) \text{ dizalc'h} \Longrightarrow E(X \times Y) = E(X) \times E(Y).$$

Ned eo ket gwir ar geveskemmenn.

• **Dedalvezadur d'ar c'hevreizhennoù ganer** — Bezet u ha v daou werc'hel muiel ; diskouez a reer : mard eo X ha Y daou wehanadur dargouezhel dizalc'h o gwerzhadoù kevanion muiel, neuze ez eo u^X ha v^Y daou wehanadur dizalc'h ivez. Bez' ez eus :

$$X, Y \text{ dizalc'h} \Longrightarrow E(u^X \times v^Y) = E(u^X) \times E(v^Y).$$

Ar gazel gentañ $E(u^X \times v^Y)$ a reer kevreizhenn c'haner an daouac'h (X, Y) anezhi. E se, evit daou wehanadur dizalc'h X ha Y ez eo kevreizhenn c'haner an daouac'h (X, Y) par da liesâd kevreizhennoù ganer X ha Y.

6.2 NAOUUSTERIOÙ STREWADUR HA KEFLEN

6.2.1 Kehebiant

Desellomp daou wehanadur dargouezhel X ha Y, o engortozioù jedoniel o vezañ $\overline{X}$ hag $\overline{Y}$.

6.2.1.1 Despizadur

Kehebiant daou wehanadur dargouezhel X ha Y — ha notañ a reer $\text{Cov}(X, Y)$ — a reer eus engortoz jedoniel al liesâd $\big(X - \overline{X}\big)\big(Y - \overline{Y}\big)$ ar gwehanadurioù kreizet. E se :

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = E\big[\big(X - \overline{X}\big)\big(Y - \overline{Y}\big)\big]}.$$

EVEZHIADENN — Mard eo X ur gwehanadur dargouezhel dezhañ gwerzhadoù arstalek a, neuze ez eo $X - \overline{X}$ ur gwehanadur mannel, heñvel dra evit al liesâd

$\big(X-\overline{X}\big)\big(Y-\overline{Y}\big)$. Da heul :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(a,Y) &= E(0) = 0\\ \operatorname{Cov}(X,a) &= E(0) = 0.\end{aligned}$$

6.2.1.2 Kemparzhegezh

Dre berzh an despizadur ez eus :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X)$$

6.2.1.3 Uelinennegezh ar c'hehebiant

Er bomm $\operatorname{Cov}(X,Y)$ erlec'hiomp ouzh X ar c'hedaozad linennek $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2$. A se e teu :

$$\operatorname{Cov}(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2,Y) = E\left[\big(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2-\overline{\alpha_1X_1+\alpha_2X_2}\big)\big(Y-\overline{Y}\big)\right],$$

hag dre zedalvout linennegezh an engortoz :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2,Y) &= E\big[\big(\alpha_1\big(X_1-\overline{X_1}\big)+\alpha_2\big(X_2-\overline{X_2}\big)\big)\big(Y-\overline{Y}\big)\big],\\ &= E\big[\alpha_1\big(X_1-\overline{X_1}\big)\big(Y-\overline{Y}\big)\big]+E\big[\alpha_2\big(X_2-\overline{X_2}\big)\big(Y-\overline{Y}\big)\big];\end{aligned}$$

bezet

$$\boxed{\operatorname{Cov}(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2,Y) = \alpha_1\operatorname{Cov}(X_1,Y)+\alpha_2\operatorname{Cov}(X_2,Y)}\,.$$

Dre gemparzhegezh e tezreer :

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X,\beta_1Y_1+\beta_2Y_2) = \beta_1\operatorname{Cov}(X,Y_1)+\beta_2\operatorname{Cov}(X,Y_2)}\,.$$

Dianlenad : kemm linennek a wehanadur dargouezhel

Dodomp $X = x_0+hX'$, $Y = y_0+kY'$. Bez' ez eus :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= \operatorname{Cov}(x_0+hX',y_0+kY')\\ &= \operatorname{Cov}(x_0,y_0)+h\operatorname{Cov}(X',y_0)+k\operatorname{Cov}(x_0,Y')+hk\operatorname{Cov}(X',Y').\end{aligned}$$

Mannel eo an holl dermenoù en eil kazel, nemet $hk\operatorname{Cov}(X',Y')$. Neuze o lemel an askoù :

$$\boxed{\operatorname{Cov}(x_0+hX,y_0+kY) = hk\operatorname{Cov}(X,Y)}\,.$$

6.2.1.4 Reollun König hollekaet

Hervez an despizadur ez eus :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E\big[\big(X-\overline{X}\big)\big(Y-\overline{Y}\big)\big] = E\big(XY-\overline{X}Y-X\overline{Y}+\overline{X}\,\overline{Y}\big)\\ &= E(XY)-\overline{X}E(Y)-\overline{Y}E(X)+\overline{X}\,\overline{Y}\\ &= E(XY)-\overline{X}\,\overline{Y}-\overline{Y}\,\overline{X}+\overline{X}\,\overline{Y},\end{aligned}$$

eleze :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY)-\overline{X}\,\overline{Y}},$$

a c'haller skrivañ ivez evit daou wehanadur diforzh :

$$\boxed{E(X\times Y) = E(X)\times E(Y)+\mathrm{Cov}(X,Y)}.$$

6.2.2 Kehebiant gwehanadurioù dargouezhel dizalc'h

Hervez reollun König hollekaet :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY)-\overline{X}\,\overline{Y}.$$

Mard eo dizalc'h X ha Y ez eus :

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \overline{X}\,\overline{Y},\ \text{alese}\ \mathrm{Cov}(X,Y)=0.$$

E se :

$$\boxed{X\ \text{hag}\ Y\ \text{dizalc'h}} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)=0}.$$

Diskouez a reer ez eo faos ar geveskemmenn.

6.2.3 Kehebiant ha hebiant

6.2.3.1 Prientad

Hebiant X zo :

$$V(X) = E\big[\big(X-\overline{X}\big)^2\big] = E\big[\big(X-\overline{X}\big)\big(X-\overline{X}\big)\big] = \mathrm{Cov}(X,Y),$$

E se :

$$\boxed{V(X) = \mathrm{Cov}(X,X)}.$$

6.2.3.2 Hebiant ur sammad $\boldsymbol{X+Y}$

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) \\ &= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y,Y), \end{aligned}$$

alese :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y)}\,.$$

Evel reizh, mard eo dizalc'h ar gwehanadurioù ez eus $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ hag e teu :

$$\boxed{X \text{ hag } Y \text{ dizalc'h } \Longrightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)}\,.$$

6.2.3.3 Hebiant ur sammad $\boldsymbol{n}$ gwehanadur dargouezhel

Bezet $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n gwehanadur dargouezhel dizalc'h daou ha daou ha dezho an un hebiant $V(X)$. Dezren a reer dre zarren :

$$V(X_1, X_2, \ldots, X_n) = nV(X).$$

E se :

$$\boxed{\begin{array}{c} X_1, X_2, \ldots, X_n \\ \text{dizalc'h daou ha daou hag} \\ \text{a un hebiant gant } X \end{array} \Longrightarrow V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = nV(X)}\,.$$

Adlakadenn — Evit X ha Y dizalc'h ez eus :

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y).$$

Alese, mard eo $\alpha = 1$ ha $\beta = -1$ e teu :

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y).$$

6.2.4 Keflended linennek, keidadur

6.2.4.1 Dibarder Schwarz

Bezet daou wehanadur dargouezhel X ha Y. Desellomp ar gwehanadur $\alpha X + Y$ ma'z eo α un arventenn diforzh.

Hebiant $\alpha X + Y$ zo :

$$V(\alpha X + Y) = \alpha^2 V(X) + 2\alpha \operatorname{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

Eil kazel ar parder-se zo ur polinom eil derez en α, a zo muiel pe vannel evit α diforzh, pa'z eo muiel pe vannel un hebiant. E se :

$$\forall \alpha, \quad \alpha^2 V(X) + 2\alpha \operatorname{Cov}(X, Y) + V(Y) \geqslant 0.$$

Ar polinom eil derez-se o vezañ muiel pe vannel ez eo e zisparzhant (direet) leiel pe vannel. A se :

$$\boxed{\left[\operatorname{Cov}(X, Y)\right]^2 - V(X) \times V(Y) \leqslant 0}\,.$$

6.2.4.2 Gwezhiader keflended linennek

Eus an dibarder diaraok e tidennomp :

$$\frac{|\operatorname{Cov}(X, Y)|}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \leqslant 1\,.$$

Despizadur — *Gwezhiader keflended linennek* ar gwehanadurioù dargouezhel X ha Y a reer eus ar c'heñver :

$$\boxed{r = \frac{|\operatorname{Cov}(X, Y)|}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}}\,.$$

O vezañ ma'z eo $|r| \leqslant 1$ e c'haller skrivañ :

$$\boxed{-1 \leqslant r \leqslant 1}\,.$$

Diskouez a reer ez eus $|r| = 1$ mmard eus daou werc'hel a ha b, hevelep ma'z eo : $Y = aX + b$. Pe, hervez boaz ar riñverezed e c'haller skrivañ ivez : $Y = A + BX$.

EVEZHIADENN — Mard eo dizalc'h ar gwehanadurioù ez eo $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, hag a se $r = 0$. Neuze :

$$\boxed{X \text{ hag } Y \text{ dizalc'h} \Longrightarrow r = O}\,.$$

Faos eo ar geveskemmenn.

6.2.4.3 Kemm gwehanadur

Mar doder :

$$X = x_0 + hX'$$
$$Y = y_0 + kY'$$

ma'z eo h ha k daou werc'hel muiel.

Goût a ouzomp ez eo :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = hk\,\mathrm{Cov}(X',Y'), \quad V(X) = h^2 V(X'), \quad V(Y) = k^2 V(Y'),$$

alese :

$$\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{hk\,\mathrm{Cov}(X',Y')}{h\sqrt{V(X')}\cdot k\sqrt{V(Y')}} = \frac{\mathrm{Cov}(X',Y')}{\sqrt{V(X')}\sqrt{V(Y')}}.$$

Ar gwezhiader keflen zo anargemmat dre ar c'hemm gwehanadur.

Ent dibarek, mard eo X' hag Y' a-getep gwehanadurioù reolataet X ha Y ez eus $V(X') = V(Y') = 1$, alese $r = \mathrm{Cov}(X',Y')$. E se :

$$\boxed{X' \text{ hag } Y' \text{ reolataet } \implies r = \mathrm{Cov}(X',Y')}.$$

6.2.4.4 Eeunenn geidañ

Bezet ar gwehanadur dargouezhel $Z = Y - aX - b$ ma'z eo a ha b daou werc'hel diforzh. Pa argemm a ha be tezreer ez eo izekaet $E(Z^2)$ evit :

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)} \qquad \text{ha} \qquad b = \overline{Y} - a\overline{X},$$

ha par eo an izegenn da :

$$(1 - r^2)\cdot V(Y).$$

An eeunenn Δ he atalad :

$$\boxed{y - \overline{Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}\big(x - \overline{X}\big)}$$

a reer anezhi *eeunenn geidañ* pe *eeunenn argizañ* eus Y en X (pe eus X da Y). Heñvel dra, an eeunenn Δ' he atalad :

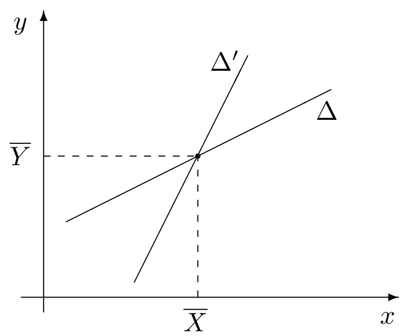
$$\boxed{x - \overline{X} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(Y)}\big(y - \overline{Y}\big)}$$

a reer anezhi *eeunenn geidañ* pe *eeunenn argizañ* eus X en Y. Bezet :

$$a' = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}.$$

Teurel evezh :

$$\boxed{aa' = r^2}.$$



EVEZHIADENN — An div eeunenn geidañ a dremen dre ar poent keitat $G(\overline{X}, \overline{Y})$. Da heul emaint en arun, mar ha nemet mard eo par o gwezhiader roud

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)} \quad ha \quad \frac{1}{a'} = \frac{V(Y)}{\mathrm{Cov}(X,Y)},$$

eleze, mmar :

$$a = \frac{1}{a'} \iff aa' = 1 \iff r^2 = 1.$$

En degouezh-se ez eo izegenn $E(Z^2)$ par da $(1-1)V(Y) = 0$.

POELLADENNOÙ

6.01 Bezet an egor $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Goulakaat a reer ez eo keittebek an darvoudoù elfennel. A hent all e teseller daou wehanadur X hag Y war Ω savelet dre :

$$X(a,b) = a, \qquad Y(a,b) = b$$

hevelep ma'z eo :

$$P(X = a) = P(Y = b) = \frac{1}{2}, \qquad \forall (a,b) \in \Omega.$$

a) Gwiriañ ez eo dizalc'h X ha Y.

b) Savelañ kevreizhenn debekaat $Z = X + Y$ ha kevreizhenn dassammañ Z.

c) Hevelep goulenn evit $T = XY$.

d) Jediñ engortoz jedoniel ha hebiant T.

6.02 Bezet an egor tebekaus $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$, gant $\Omega = \{1,2,3,4\}^2$. Desellout a reer ar gwehanadurioù dargouezhel X ha Y savelet dre :

$$\forall (i,j) \in \Omega, \qquad X(i,j) = i, \qquad Y(i,j) = j.$$

Hag eñ zo un tebekadur P war $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$, hevelep ma ve dizalc'h ar gwehanadurioù X ha Y ha ma ve unvan ar gwehanadur $X + Y$.

6.03 Bezet an egor $\Omega = \{1,2,3\} \times \{0,1,2\}$. Desellout a reer ar gwehanadurioù dargouezhel savelet evel henn :

$$\forall (i,j) \in \Omega, \qquad X(i,j) = i + j, \quad Y(i,j) = |i - j|.$$

a) Ezplekaat an darvoudoù $(X = k)$ hag $(Y = l)$ ma c'hell k kemer ar gwerzhadoù 0, 1, 2, 3, 4 ha l ar gwerzhadoù 0, 1, 2.

b) Dezren alese an darvoudoù $(X + k) \cap (Y = l)$ evit ar gwerzhadoù meneget diaraok evit k ha l.

c) Goulakaat a reer keittebek darvoudoù elfennel Ω. Sevel taolenn kendebekadur (X, Y) ha menegiñ an dasparzhioù marzel.

d) Ha dizalc'h eo X ha Y ?

e) Jediñ kehebiant an daouac'h (X, Y).

6.04 Daou zen o deus un emgav etre 19 ha 20 eur. Goulakaat a reer e c'haller kevrediñ ar predoù ma teu an daou zen ouzh daou wehanadur X ha Y, kendalc'hek, dizalc'h hag unvan war an entremez $[0,1]$.

a) Savelañ dasparzh ha tebekter ar gwehanadur dargouezhel Z a c'haller kevrediñ ouzh gedvezh ar c'hentañ den deuet ?

b) Jediñ an engortoz jedoniel $E(Z)$.

c) An daou zen a emglev ez ay kuit an hini kentañ degouezhet goude ur gedvezh par da $2E(Z)$. Pe debegezh eo e c'hoarvezfe an emgav ?

6.05 Tennañ a reer ur voull eus ur sac'h ennañ 10 boull niverennet eus 0 da 9. Bezet X ar gwehanadur dargouezhel o kevrediñ ouzh pep niverenn dennet dilerc'h he rannadur dre 2.

Heñvel dra, bezet Y ar gwehanadur dargouezhel o kevrediñ ouzh pep niverenn dennet dilerc'h he rannadur dre 3.

a) Savelañ an darvoudoù $(X = i)$, $(Y = j)$ ma c'hell i kaout ar gwerzhadoù 0 pe 1 ha j ar gwerzhadoù 1 pe 2.

b) Pep tennadenn o vezañ keittebek, sevel taolenn kendebekadur an daouac'h (X, Y). Diskouez an dasparzhioù marzel.

c) Ha dizalc'h eo X ha Y ?

d) Jediñ gwezhiader keflended linennek ar gwehanadurioù X ha Y.

e) Savelañ ataladoù an div eeunenn argizañ. Tresañ en un dealf.

6.06 En un arc'h ez eus a boull ruz ha b boull glas. Tennañ a reer ur voull dre zargouezh, he adlakaat e-barzh en-dro en ur ouzhpennañ c boull eus an hevelep liv ; ha goude e tenner ur voull eus an arc'h gant he c'henaoz nevez. Bezet X_i $(i = 1, 2)$ gwehanadur Bernoulli par da 1 mar bez ruz ar voull dennet d'an i-vet tennadenn, da 0 mar bez glas.

a) Sevel taolenn kendebekadur X_1 hag X_2 o tiskouez an dasparzhioù marzel.

b) Jediñ an engortozioù hag an hebiantoù.

c) Jediñ kehebiant ha gwezhiader keflen X_1 hag X_2.

6.07 Teurel a reer daou ziñs ha notañ a reer X_1 hag X_2 ar gwehanadurioù niver ar poentoù. Bezet $Z = \max(X_1, X_2)$.

Savelañ dasparzh, engortoz ha strewant Z.