5

Naouusterioù ur gwehanadur unvent

Gallout a reer dezverkañ ur gwehanadur dargouezhel X dre reiñ dasparzh klok an tebegoù stag ouzh ar gwerzhadoù anezhañ. Pa vez re vras teskad ar gwerzhadoù-se avat — ar gwehanadoù — e c'haller kendodiñ an ditouroù roet gant an dasparzh klok, kuit a lezel a-gostez un darn eus ar stlenn. An div elfenn bennañ eus ar c'hendod-se zo amparet da gentañ gant ar menegerioù savlec'h — savelañ a reont *savlec'h* kreizel an dasparzh — ha da c'houde gant menegerioù strewadur. E gwir, naouiñ a ra nep dasparzh da gentañ dre an urzh a vraster eus ar gwehanadoù (10^{-1}, 10, 10^1, 10^2, . . ., 10^8, h.a.), eleze e dued kreizel, ha da c'houde dre an doare ma forc'h ar gwehanadoù diouzh ar werzhad kreiz. E se en hon eus daou seurt arventennoù naouus d'an dasparzh en araez da ditouriñ ar gwehanadur.

5.1 NAOUUSTERIOÙ TUED KREIZEL

5.1.1 Pementrannerioù

Pementranner a'n urzh α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) ur gwehanadur X, F o vezañ e gevreizhenn dassammañ, zo ar werzhad x_α — pe ar gwerzhadoù diouzh an dro —, hevelep ma'z eo :

$$F(x_\alpha) = \alpha,$$

eleze,

$$P(X \leqslant x_\alpha) = \alpha.$$

- Kreizad ur gwehanadur dargouezhel eo ar pementranner a'n urzh $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$M(X) = x_{1/2},$$
$$F\left[M(X)\right] = \frac{1}{2}.$$

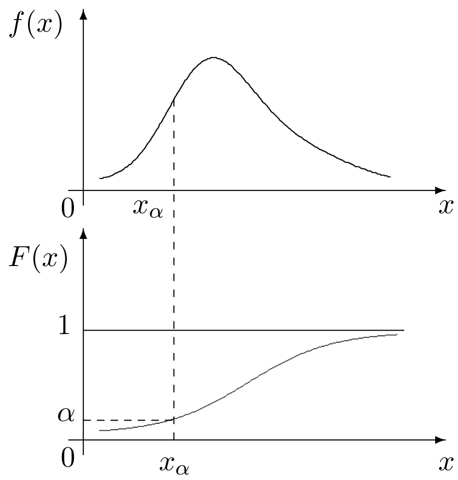
- Ar *perrannerioù*, notet Q_1, $Q_2 = M$ ha Q_3, a glot a-getep ouzh $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ hag $\alpha = \frac{3}{4}$.
- Savelañ a reer ivez *dekrannerioù* : ar $k - vet$ dekrann ($k = 1, 2, \ldots, 9$) o vezañ ar pementranner a'n urzh $\alpha = \frac{k}{10}$.
- Henvel dra evit ar *c'hantrannerioù*, ar *milrannerioù*...

5.1.1.1 Gwehanadur kendalc'hek

Mard eo kendalc'hek ar gwehanadur X ha mard eo kengresk strizh e gevreizhenn dassammañ F, neuze ez eus pementrannerioù a bep urzh hag unel ez int.

Ar c'henglot etre x ha $F(x)$ zo kevuntal enta hag ur gevreizhenn geveskemm unel F^{-1} zo da F :

$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha).$$



SKOUER — Pementranner ar gwehanadur unvan $\mathcal{U}(0, 1)$ a'n urzh α zo par da α.

Rak ar gevreizhenn dassammañ F a gemer an holl werzhadoù gavaelet etre 0 hag 1 gant an despizadur : F(x)=x. Alese : $F^{-1}(\alpha) = \alpha$.

5.1.1.2 Gwehanadur arskarek

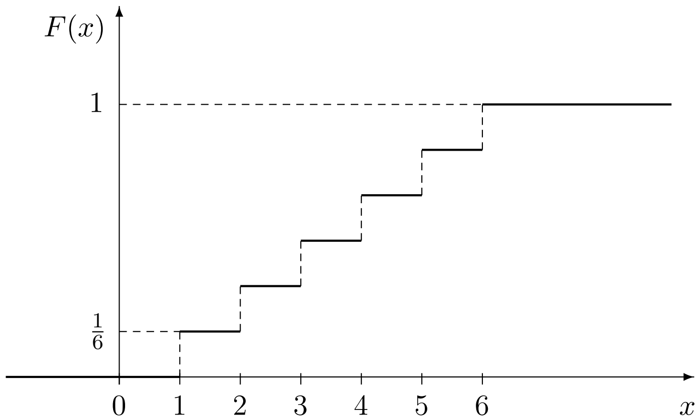
Pa vez arskarek ar gwehanadur X, an atalad : $F(x) = \alpha$, zo dezhañ pe un anvevennad diskoulmoù — an entremez gavaelet etre div werzhad vezus kenheuilh —, pe diskoulm ebet.

SKOUER — Bezet ar gwehanadur dargouezhel X : niver tennet o teurel un diñs. Nep gwerzhad eus an entremez $[1, 2[$ a vast da zespizadur ar pementranner a'n urzh $\frac{1}{6}$:

$$\alpha = \frac{1}{6} : \quad \left[F(x) = \frac{1}{6}\right] \iff [1 \leqslant x < 2] \,.$$

Endra n'eus ket a pementranner a'n urzh $\frac{1}{10}$:

$$\alpha = \frac{1}{10} : \quad F(x) = \frac{1}{10} \text{ n'en deus diskoulm ebet.}$$



E se ne arverer ket alies keal ar pementranner, nemet e degouezh gwehanaduriou dargouezhel kendalc'hek, dezho ur gevreizhenn dassammañ F kengresk strizh.

5.1.2 Mod

Mod ur gwehaniñ eo ar werzhad M_0 a zo ar c'hevreg a-vizhier pe an tellun en e uc'hegenn. E gerioù all ez eo ar mod ar werzhad tebekañ, an hini lañs ganti. E se e lavarer ivez *lañs* ar gwehanadur e-lec'h ar mod.

Liesañ e vez unel ar mod.

*Mod daveel*a reer eus ur werzhad m_0 a zo un uc'hegenn lec'hel eus ar c'hevreg a-vizhier pe eus an tellun. Anv a reer neuze a-wechoù eus kentañ lañs, eil lañs, hag all.

Ur gwehanadur dargouezhel dezhañ ur mod hepken ha mod daveel ebet a lavarer *unvod.*

5.1.2.1 Gwehanadur kendalc'hek

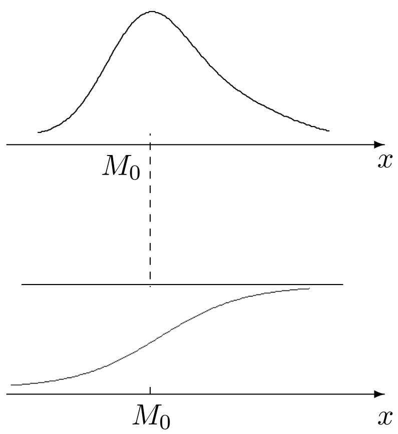
Pa vez an tebekter f ur gevreizhenn gendalc'hek dezhi an diarroudennoù f' ha f'' e vast ar mod M_0 da :

$$f'(M_0) = 0, \quad f''(M_0) < 0,$$

eleze :

$$F''(M_0) = 0, \quad F'''(M_0) < 0.$$

E se e klot ar mod ga mmenn dassammadel :



5.1.2.2 Gwehanadur arskarek

Ar mod zo ar werzhad vezus x_i stag outi an debegezh vrasañ :

$$\text{Uc'hek eo } p_i = P(X = x_i).$$

5.1.3 Engortoz jedoniel

Desellomp ur gwehaniñ X a zo teskad e werzhadoù G_X un entremez $[a, b]$ a hed bevennek. Bezet F e gevreizhenn dassammañ.
Rannomp an entremez $[a, b]$ en n entremez δ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ eus ar rezh :

$$\delta_j : \quad x_{j-1} \leqslant x < x_j \quad (x_0 = a, x_n = b).$$

Bezet ξ_j ur werzhad diforzh enbeziat e δ_j.
Engortoz jedoniel ar gwehanadur X a reer eus harz ar sammad :

$$E(X) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ l(\delta_j) \to 0}} \sum_{j=1}^{n} \left[\xi_j \big(F(x_j) - F(x_{j-1}) \big) \right],$$

pa gresk anvevenn niver an entremezioù δ_j, ken ma tenn $l(\delta_j)$, hed pep hini, war-du mann. Notet e vez ivez $\overline{X}$, μ.
Harz ar sammad-se zo sammegenn Stieltjes :

$$E(X) = \int_a^b x d\,[F(x)],$$

a goazh d'ur sammata $\sum$ pe d'ur sammegenn Riemann hervez ma'z eo X arskarek pe zirgendalc'hek :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i \,[F(x_i + 0) - F(x_i - 0)] \\ &= \sum x_i p_i \end{aligned}$$

mard eo X ur gwehanadur arskarek, ha :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x d\,[F(x)] \\ &= \int_a^b x f(x) dx \end{aligned}$$

mard eo X ur gwehanadur dargouezhel dirgendalc'hek. Gwelomp an daou zegouezh-se lerc'h ouzh lerc'h.

5.1.3.1 Gwehanadurioù arskarek

Mard eo arskarek ar gwehanadur X ez eo an engortoz jedoniel $E(X)$ keitad ar gwerzhadoù x_i daspouezet gant an tebegoù keñverek p_i :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i}.$$

Mar bez d'ar gwehanadur un anvevennad eriñvadus a werzhadoù x_i ez eo an engortoz jedoniel savelet dre :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i} p_i x_i},$$

gant ma ve ar steudad kengerc'hus ent dizave. Da skouer, mard eo teskad G_X ar gwehanadoù hini ar c'hevanion naturel e rank ar steudad :

$$\sum_{x=1}^{\infty} x p_x$$

bezañ kengerc'hus. Mard eo G_X teskad an naturelion muiel pe leiel e rank ar sammad :

$$\sum_{x=-a}^{x=b} x p_x, \quad a, b \text{ kevanion muiel},$$

tennañ war-du un harz bevennek, pa lakaer a ha b da dennañ ent dizalc'h etrezek an anvevenn.

Pa na vez ket kengerc'hus ent dizave ar steudad e lavarer : n'eus engortoz jedoniel ebet.

SKOUERIOÙ

1. Ar gwehanadur kaougant $\mathcal{K}(a)$ en deus da engortoz jedoniel :

$$E\left[\mathcal{K}(a)\right] = 1 \times a = a.$$

2. Gwehanadur Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ en deus da engortoz jedoniel :

$$E\left[\mathcal{B}(1,p)\right] = q \times 0 + p \times 1 = p.$$

E se, gwehanadur dargouezhel meneger un darvoud A zo dezhañ da engortoz jedoniel tebegezh A :

$$E\left[\mathcal{I}(A)\right] = P(A).$$

3. Ar gwehanadur dargouezhel : *poent diwar deurel un diñs* en deus da engortoz jedoniel :

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 1 + \cdots + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{7}{2}.$$

4. Ar gwehanadur dargouezhel : *niver an taolioù rekis (er c'hoari pil pe groaz) da gaout pil evit ar wech kentañ* en deus da engortoz jedoniel :

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{2^x} = 2.$$

E gwir, evit $|\alpha| < 1$ ez eus :

$$(1-\alpha)^{-2} = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots = \sum_{x=1}^{\infty} x\alpha^{x-1} = \frac{1}{\alpha}\sum_{x=1}^{\infty} x\alpha^x.$$

Alese evit $\alpha = 1/2$:

$$4 = 2\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{2^x}$$

ha da heul :

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{2^x} = 2.$$

5. Ar gwehanadur dargouezhel a zo e werzhadoù ar c'hevanion muiel ha leiel :

$$G_X = (\ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots),$$

stag outo an tebegoù :

$$P(X = x) = \frac{3}{(\pi x)^2},$$

n'en deus engortoz jedoniel ebet.

E gwir, mard eo kengerc'hus ar steudad a dermen hollek $\frac{1}{x^2}$ ez eo :

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

alese :

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(X = x) = 1,$$

ar steudad a dermen hollek $\frac{1}{x}$ ned eo ket kengerc'hus. Padal ar sammad :

$$\sum_{x=-a}^{a} xP(X = x) \text{ zo mannel}$$

ha

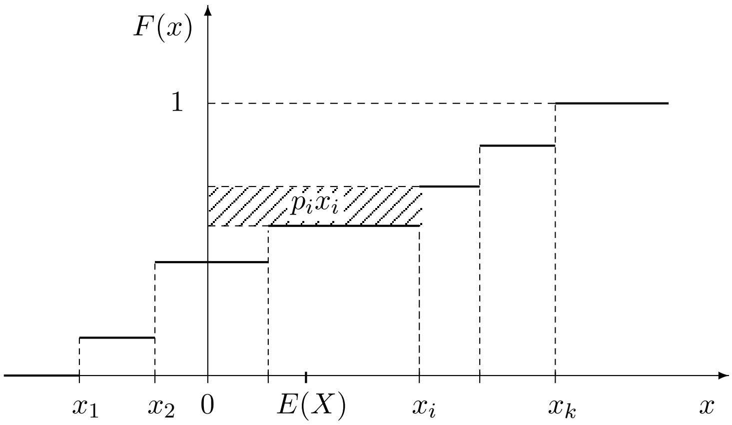
$$\lim_{a\to\infty} \sum_{x=-a}^{a} xP(X = x) = 0.$$

O vezañ ma ned eo ket kengerc'hus ent dizave ar sammad o savelañ $E(X)$, n'en deus X engortoz jedoniel ebet.

Derc'hennadur kevregat

Derc'hennomp kevregad ar gevreizhenn dassammañ (anvet ivez *kevreizhenn dasparzh*). An termenoù $p_1x_1,\ p_2x_2,\ \ldots, p_ix_i$ eus ar sammad $\sum_i p_ix_i$ zo par pep hini da c'horread aljebrel ur reizhkorneg linennaouet, evel diskouezet evit an hini o klotañ ouzh p_ix_i war ar c'hevregad amañ dindan.

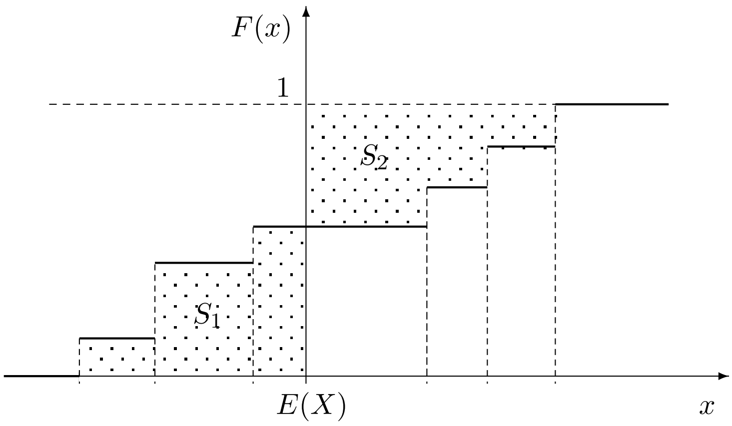
Hervez despizadur ar gorread aljebrel dindan ur grommenn ez eo an engortoz jedoniel par d'ar gorread aljebrel endalc'het etre ar grommenn dassammadel hag ahel an hedennoù. Rak an termen p_ix_i — gorread ar reizhkorneg a ziaz $(0, x_i)$ hag a sav p_i — zo dezhañ arouez x_i, eleze muiel pa vez muiel x_i ha leiel pa vez leiel x_i.



Teurel evezh ez eo :

$$\sum_i \left[\, p_i\big(x_i - E(X)\big)\right] = 0,$$

a dalvez ez eo mannel engortoz jedoniel ar forc'had diouzh engortoz jedoniel ar gwehanadur, pezh a ziskouezer war ar c'hevregad amañ dindan dre an devoud e savel an eeunenn a ledenn $E(X)$ daou c'horread par S_1 ha S_2.



EVEZHIADENN 1 — Emaomp o paouez skrivañ :

$$\sum_i \left[\, p_i\big(x_i - E(X)\big)\right] = 0,$$

a c'haller rezhiennañ ivez :

$$\boxed{E\left(X - \overline{X}\right) = 0}.$$

Ar gwehanadur dargouezhel $X - \overline{X}$ a reer *kreizet* anezhi ha gwelet hon eus ez eo engortoz jedoniel ar gwehanadur dargouezhel kreizet par da vann.

EVEZHIADENN 2 — An termen *engortoz jedoniel* zo bet degaset gant Pascal a-zivout ar c'hoarioù dargouezh : engortoz jedoniel savad ar c'hoarier, en un abadenn bennak, zo keitad ar savadoù bezus daspouezet gant an tebegoù keñverek. Lavarout a reer ez eo *kevion* ur c'hoari mard eo ar skod par da engortoz jedoniel ar savad, eleze mard eo engortoz jedoniel ar savad par d'ar priz da dalañ evit kaout ar gwir da c'hoari.

An engortoz jedoniel a vez arveret evel dezverk rummañ daou pe lies c'hoari, lakaet er-maez nep dangoregezh.

5.1.3.2 Gwehanadurioù kendalc'hek

Mard eo dirgendalc'hek ar gwehanadur dargouezhel X ez eo engortoz jedoniel X sammegenn $xf(x)$ war deskad gwehanadoù X :

$$E(X) = \int_{G_X} xf(x)\, dx.$$

Mard eo anvevenn G_X ned eo savelet an engortoz jedoniel nemet en degouezh ma'z eo *kengerc'hus ent dizave* ar sammegenn. Da skouer, mard eo G_X an entremez $\mathbb{R}^+$, e rank ar sammegenn :

$$\int_{x=0}^{\infty} xf(x)\, dx$$

bezañ kengerc'hus. Mard eo $G_X =]-\infty, +\infty[$ e rank ar sammegenn :

$$\int_{-a}^{b} xf(x)\, dx, \quad a, b > 0,$$

tennañ war-du un harz bevennek, pa lakaer da dennañ a ha b ent dizalc'h war-du an anvevenn.

Pa na vez ket kengerc'hus ent dizave ar sammegenn o savelañ $E(X)$ e lavarer n'eus engortoz jedoniel ebet.

SKOUERIOÙ

1. Ar gwehanadur kendalc'hek unvan war an entremez $[0, 1]$ zo dezhañ da engortoz jedoniel :

$$E(X) = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2},$$

rak $f(x) = 1$ war $G_X = [0, 1]$.

2. Ar gwehanadur kendalc'hek savelet war an entremez $[1, +\infty[$ dre an tebekter regel :

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{x^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

zo dezhañ an engortoz jedoniel :

$$\begin{aligned} E(X) = \int_1^\infty \frac{\alpha-1}{x^{\alpha-1}}\, dx &= \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \qquad \text{mar} \quad \alpha > 2, \\ &= +\infty \qquad\quad \text{mar} \quad 1 < \alpha \leqslant 2. \end{aligned}$$

E se n'eus ket evit X a engortoz jedoniel mard eo α bihanoc'h pe bar ouzh 2.

3. Gwehanadur Cauchy savelet war an entremez $]-\infty, +\infty[$ dre an tebekter regel :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

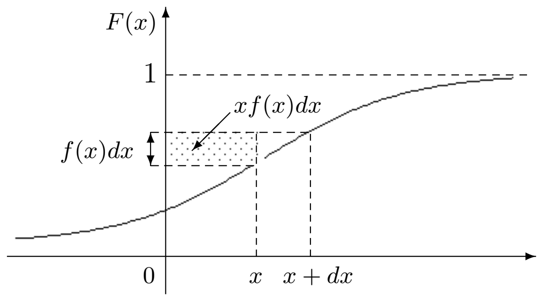
n'en deus ket a engortoz jedoniel. E gwir :

$$\int_{-a}^{b} x f(x)\, dx = \int_{-a}^{b} \frac{x dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right)$$

ha, mar tenn a pe b war-du an anvevenn ez eo anvevenn an harz : ned eo ket ar sammegenn kengerc'hus ent dizave.

Padal, mar lakaer a ha b da dennañ war-du an anvevenn en ur ser gant $a = b$, ez eo mannel ar sammegenn ha dezhi 0 da harz.

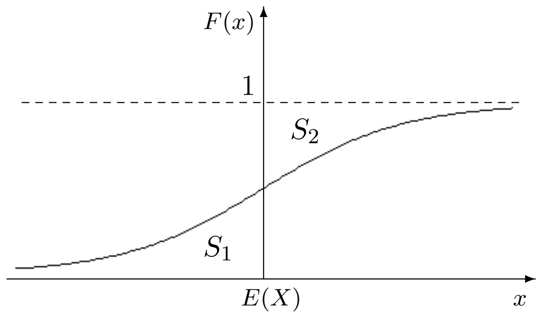
Engortoz jedoniel ur gwehanadur kendalc'hek zo dezhañ perzhioù heñvel ouzh re ar gwehanadurioù arskarek : ar gorread *aljebrel* endalc'het etre ar grommenn dassammadel hag ahel an hedennoù zo par d'an engortoz jedoniel :



Ar parder :

$$\int_{G_X} [x - E(X)]\, f(x)dx = 0,$$

a dalvez ez eo mannel engortoz jedoniel ar forc'had diouzh engortoz jedoniel ar gwehanadur a zerc'henner war ar c'hevregad amañ dindan dre an devoud ez eo par ar gorreadoù S_1 hag S_2, endalc'het etre ar grommenn dassammadel hag an eeunenn a ledenn $E(X)$:



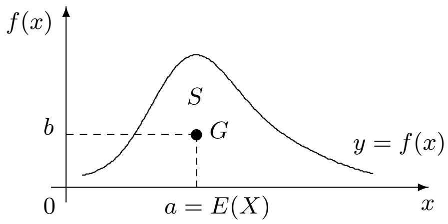
Gallout a reer c'hoazh desellout an engortoz jedoniel e doareoù all :

- Evel kreiz kerc'hell teskad ar gwehanadoù dasparzhet warnañ ent kendalc'hek hollad an debegezh (par da 1), an tebekter regel o vezañ $f(x)$ er poent x ;

- Evel ledenn kreiz kerc'hell hollad an debegezh (par da 1) dasparzhet unvan war ar c'horreenn S endalc'het etre an tellun hag ahel al ledennoù. Rak ar c'hreiz kerc'hell-se en deus an daveennoù-mañ :

$$a = \iint_S x\,dx\,dy = \int_{G_X} x \left[\int_0^{f(x)} dy\right] dx = \int_{G_X} xf(x)\,dx = E(X),$$

$$b = \iint_S y\,dx\,dy = \int_{G_X} \left[\int_0^{f(x)} ydy\right] dx = \frac{1}{2}\int_{G_X} f^2(x)\,dx.$$



Engortoz jedoniel $\varphi(X)$

Bezet φ ur gevreizhenn savelet evit nep x enbeziat e teskad ar gwehanadoù G_X a'r gwehanadur X. Engortoz jedoniel $\varphi(X)$ a reer eus sammegenn Stieltjes :

$$E\big[\varphi(X)\big] = \int_{G_X} \varphi(x)\,d\big[F(x)\big],$$

dindan an amplegad ma ve kengerc'hus ent dizave. En degouezh kontrol e lavarer n'eus ket eus $E\big[\varphi(X)\big]$.

Kempoell eo an despizadur-se war un dro gant despizadur an niñvader E ha gant ar c'heal a wehanadur kevreizh d'ur gwehanadur dargouezhel all : mard eo $Y = \varphi(X)$ ur gwehanadur dezhañ un engortoz jedoniel, neuze ez eo par $E(Y)$ hag $E\big[\varphi(X)\big]$. Ma ned eo ket Y ur gwehanadur dargouezhel, pe, Y o vezañ ur gwehanadur hep ma ve eus $E(Y)$, neuze n'eus ket eus $E\big[\varphi(X)\big]$.

A-walc'h e vo gwiriañ an disoc'h-se en degouezh ma'z eo X ur gwehanadur dargouezhel arskarek. Goulakaomp ez eus eus $E\big[\varphi(X)\big]$:

$$E\big[\varphi(X)\big] = \sum_{x \in G_X} \big[\varphi(x)P(X = x)\big].$$

Bezet $G_X^{(y)}$ teskad gwerzhadoù eus G_X, hevelep ma'z eo $\varphi(x) = y$. Ar sammad o savelañ $E\big[\varphi(X)\big]$ o vezañ kengerc'hus ent dizave e c'haller skrivañ :

$$\begin{aligned} E\big[\varphi(X)\big] &= \sum_{y \in G_Y} \sum_{x \in G_X^{(y)}} \big[\varphi(x)P(X = x)\big] \\ &= \sum_{y \in G_Y} \left[y \sum_{x \in G_X^{(y)}} P(X = x) \right]. \end{aligned}$$

O vezañ ma'z eo kengerc'hus ent dizave ar sammad-se e tezreer ez eo mannel an debegezh stag ouzh $G_X^{(y)}$ evit $y = -\infty$ ha $y = +\infty$ (mard eo an elfennoù-se enbeziat e G_Y). Y zo enta ar gwehanadur dargouezhel arskarek a zo ar gwerzhadoù bezus an elfennoù eus G_Y gant an tebegoù keñverek :

$$P(Y = y) = \sum_{x \in G_X^{(y)}} /!P(X = x)$$

hag

$$E\big[\varphi(X)\big] = E(Y).$$

Linennegezh an niñvader engortoz jedoniel

Perzh diazez an niñvader engortoz jedoniel E — niñvader o kevrediñ ouzh ur gwehanadur dargouezhel X ur gwerc'hel notet $E(X)$, mar bez un engortoz da X da nebeutañ — zo al *linennegezh.* Dezgeriañ a reer ar perzh-se en doare-mañ : mard eo φ_1 ha φ_2 kevreizhennoù hevelep ma'z eus eus $E\big[\varphi_1(X)\big]$ ha $E\big[\varphi_2(X)\big]$, nep kedaozadur linennek eus φ_1 ha φ_2 en deus da engortoz jedoniel kedaozadur linennek an engortozioù jedoniel :

$$E\big[a\varphi_1(X) + b\varphi_2(X)\big] = aE\big[\varphi_1(X)\big] + bE\big[\varphi_2(X)\big].$$

Disoc'h a ra ar perzh-se diouzh perzhioù sammegenn Stieltjes :

$$\int_{G_X} \big[a\varphi_1(X) + b\varphi_2(X)\big]\, d\big[F(x)\big] = a \int_{G_X} \varphi_1(x)\, d\big[F(x)\big] + b \int_{G_X} \varphi_2(x)\, d\big[F(x)\big]$$

ha sammegenn ar gazel gentañ zo kengerc'hus ent dizave, mar ha nemet mard eo kengerc'hus ent dizave ivez an div sammegenn en eil kazel.

Ar perzh-se, talvoudek evit un niver bennak a gevreizhennoù $\varphi_i(x)$, a c'haller dezgeriañ evel henn : *an niñvader engortoz jedoniel zo un niñvader linennek en egor Φ ar c'hevreizhennoù φ dezho un engortoz jedoniel $E\big[\varphi(X)\big]$.*

Menegomp ur perzh c'hoazh eus an engortoz jedoniel a c'haller dezren diouzh perzhioù sammegenn Stieltjes : mard eo evit nep $x \in G_X$:

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x),$$

ez eo engortoz $\varphi_1(X)$ brasoc'h pe bar ouzh engortoz $\varphi_2(X)$:

$$\forall x \in G_X \;:\; \varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \iff E\big[\varphi_1(x)\big] \geqslant E\big[\varphi_2(x)\big].$$

5.2 NAOUUSTERIOÙ STREWADUR

5.2.1 Forc'had dizave keitat

Forc'had dizave keitat ur gwehanadur dargouezhel X e-keñver a a reer eus engortoz jedoniel gwerzhadoù dizave ar forc'hadoù $|X - a|$:

$$e_a(X) = E\big[|X - a|\big].$$

Ne vez ket arveret alies an naouuster strewadur-se en arbenn eus ar werzh dizave, diaes da embreger ent aljebrel.

5.2.2 Strewant

Forc'had rizh ur gwehanadur dargouezhel X a reer eus forc'had keitat *pervalel* diouzh an engortoz jedoniel :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{E\Big[\big(X - E(X)\big)^2\Big]}}\,,$$

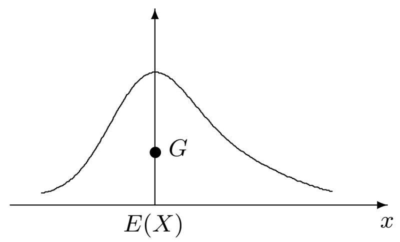
eleze :

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \sqrt{\sum_i p_i\big[x_i - E(X)\big]^2} && \text{mard eo arskarek } X,\\ &= \sqrt{\int_{G_X}\big[x - E(X)\big]^2 f(x)\,dx} && \text{mard eo kendalc'hek } X,\end{aligned}$$

da nebeutañ pa vez kengerc'hus ent dizave ar steudad pe ar sammegenn. En degouezh kontrol e lavarer ez eo anvevenn ar forc'had rizh pe c'hoazh n'en deus ar gwehanadur X forc'had rizh ebet. Karrez ar forc'had rizh a vez graet *hebiant* anezhañ :

$$V(X) = E\Big[\big(X - E(X)\big)\Big]^2 = \sigma^2.$$

EVEZHIADENN — Ar forc'had rizh a zezverk ar forc'had diouzh ar c'heitad evit a sell hollad ar gwehanadoù, eleze ur rizh strewadur. Setu perak e vez graet ivez **strewant** eus ar forc'had rizh. Liesañ e raimp gant an termen-se el levr-mañ. Bez' ez eo σ^2 keitad karrezioù ar forc'hadoù diouzh ar c'heitad, eleze keitad pervalel ar forc'hadoù diouzh ar c'heitad. A se ez eo karrez ar strewant par d'an hebiant. An hebiant a c'hell bezañ deveizet evel lankad anniñv hollad ar gwehanadoù G_X en-dro d'an ahel o tremen dre $E(X)$.



Mar aroueziomp $E(X) = \overline{X}$ e skrivomp :

$$V(X) = E\big[(X - \overline{X})^2\big] = E\Big[X^2 - 2\overline{X}X + \overline{X}^2\Big]$$

ha dre berzh linennegezh an niñvader E :

$$\begin{aligned}V(X) &= E\big(X^2\big) - 2\overline{X}E(X) + \overline{X}^2\\ &= E\big(X^2\big) - \overline{X}^2.\end{aligned}$$

An disoc'h-se, anvet delakadenn König, a rezhienner evel henn :

$$V(X) = E\big(X^2\big) - \big[E(X)\big]^2.$$

5.2.3 Lankadoù ankreizet

Bezet k ur gwerc'hel muiel.

• **Ur gwehanadur arskarek bevennek** : Lankad X a'n urzh k a reer eus ar gwerc'hel :

$$m_k(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i^k.$$

A-wechoù e skriver ivez m_k e-lec'h $m_k(X)$.

• **Ur gwehanadur arskarek anvevenn** : Mar kengerc'h ent dizave an termen hollek $p_i x_i^k$ e reer lankad X a'n urzh k eus ar gwerc'hel :

$$m_k(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i^k.$$

• **Ur gwehanadur dirgendalc'hek** : Mar kengerc'h ent dizave ar sammegenn $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$ e reer lankad x a'n urzh k eus ar gwerc'hel :

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx.$$

5.2.4 Daveadur $m_k(X) = E(X^k)$

Gwir eo an daveadur evit $k = 1$, dre zespizadur $m_1(X)$ hag an engortoz. Heñvel dra evit ur c'hevan k muiel diforzh.

5.2.5 Lankadoù kreizet

5.2.5.1 Despizadur

Lankad kreizet X a'n urzh k — notet $\mu_k(X)$ — a reer eus lankad ar gwehanadur kreizet $X - E(X)$ a'n urzh k. E se en hon eus :

$$\mu_k(X) = m_k\big(X - E(X)\big),$$

eleze :

- ***X* zo ur gwehanadur bevennek** :

$$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i\big(x_i - E(X)\big)^k.$$

A-wechoù e skriver μ_k e-lec'h $\mu_k(X)$.

- ***X* zo ur gwehanadur arskarek anvevenn** :

$$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i\big(x_i - E(X)\big)^k.$$

- ***X* zo ur gwehanadur dirgendalc'hek** :

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - E(X)\big)^k f(x)\,dx.$$

EVEZHIADENN

Dre berzh an daveadur $m_k(Y) = E(Y^k)$ e tezreer evit $Y = X - E(X)$:

$$\boxed{\mu_k(X) = E\left[\big(X - E(X)\big)^k\right]}.$$

5.2.5.2 Degouezhioù dibarek

Diwar an despizadurioù e wirier :

$$\mu_1(X) = 0 \quad \text{ha} \quad \mu_2(X) = V(X).$$

Ha da heul en hon eus :

$$\boxed{E\big(X - E(X)\big) = 0} \quad \text{ha} \quad \boxed{E\left[\big(X - E(X)\big)^2\right] = V(X)}.$$

5.2.6 Reollun König ha lankadoù

Kounañ :

- **Gwehanadur dargouezhel bevennek** :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i^2 - \big(E(X)\big)^2.$$

- **Gwehanadur dargouezhel arskarek anvevenn** :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i^2 - \big(E(X)\big)^2.$$

- **Gwehanadur dargouezhel dirgendalc'hek**

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \big(E(X)\big)^2.$$

An tri reollun a skriver :

$$\mu_2(X) = m_2(X) - [m_1(X)]^2\,,$$

a verraer dre :

$$\boxed{\mu_2 = m_2 - m_1^2}\,.$$

EVEZHIADENN — **Amveziad spirus evit bezoud $V(X)$** :

Mard eus eus $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ e tisoc'h diouzh an dibarder $|x| f(x) \leqslant x^2 f(x)$ evit $|x| \geqslant 1$ ez eus eus $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$, ha da heul $V(X)$ ivez. Un dezreadur heñvel a reer pa vez X ur gwehanadur dargouezhel arskarek anvevenn (gant steudadoù). Ret eo an amveziad-se ivez.

5.2.7 Kemm gwehanadur en engortozioù ha hebiantoù

Savelañ a reer an daveadurioù-mañ da heul, a ha b o vezañ arstalennoù :

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X) + b} \qquad \text{pe :} \quad \overline{aX+b} = a\overline{X} + b,$$

$$\boxed{V(aX+b) = a^2 V(X)} \qquad \text{pe :} \quad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X).$$

5.2.8 Gwehanadur dargouezhel kreizet direet

- **Despizadur** : Lavarout a reer ez eo Z ur gwehanadur kreizet ha direet — pe c'hoazh : gwehanadur reolataet — mard eo e geitad par da vann hag e strewant par da 1.

- **Delakadenn** : Ar gwehanadur

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma}$$

zo ur gwehanadur dargouezhel reolataet. E gwir, hervez ar reollunioù gwelet amañ diaraok, e teu :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{\sigma} E\left(X - \overline{X}\right) = 0, \\ V(Z) &= \frac{1}{\sigma^2} V\big(X - \overline{X}\big) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \end{aligned}$$

5.2.9 Skouerioù a engortozioù hag a hebiantoù

- **Gwehanadur peuzkaougant** :

Gwerzhadoù	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$
Tebegoù	0	0	$\ldots$	1	$\ldots$

$$E(X) = 1 \times x_k = x_k,$$

$$V(X) = \big(x_k - \overline{X}\big)^2 \times 1 = (x_k - x_k)^2 = 0.$$

- **Gwehanadur meneger** :

Gwerzhadoù	$x_1 = 1$	$x_2 = 0$
Tebegoù	$p_1 = p$	$p_2 = q$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times p + 0 \times q = p, \\ V(X) &= \left(x_1 - \overline{X}\right)^2 \times p_1 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 \times p_2 \\ &= (1-p)^2 \times p + p^2 q \\ &= q^2 p + p^2 q = pq(p+q) \\ &= pq \end{aligned}$$

- **Gwehanadur unvan**

Gwerzhadoù	x_1	$\dots$	x_N
Tebegoù	$p_1 = \frac{1}{N}$	$\dots$	$p_N = \frac{1}{N}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{N}(x_1 + \cdots + x_N), \\ V(X) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{N} \end{aligned}$$

5.2.10 Lankadoù dasperiadel

Lankad dasperiadel ar gwehanadur X a'n urzh k, notet $\mu_{[k]}(X)$ — pe $\mu_{[k]}$ — a reer eus ar gwerc'hel :

- **Gwehanadur arskarek bevennek** :

$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i (x_i - 1) \dots (x_i - k + 1).$$

- **Gwehanadur arskarek anvevenn** :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i (x_i - 1) \dots (x_i - k + 1),$$

gant ma ve kengerc'hus ar steudad e dermen hollek $p_i x_i (x_i - 1) \dots (x_i - k + 1)$.

- **Gwehanadur dirgendalc'hek**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(x-1) \dots (x-k+1) f(x)\, dx,$$

gant ma ve kengerc'hus ar sammegenn.

Dienaat a reer ar reollunioù-mañ da heul :

1. $\boxed{\mu_{[k]} = E\big[X(X-1)\dots(X-k+1)\big]}$.

2. **Daveadurioù etre al lankadoù ordinal ha dasperiadel**

$$\begin{aligned}
&\mu_{[1]} = m_1 && m_1{=}\mu_{[1]}\\
&\mu_{[2]} = m_2 - m_1 && m_2{=}\mu_{[2]} - \mu_{[1]}\\
&\mu_{[3]} = m_3 - 3m_2 + 2m_1 && m_3{=}\mu_{[3]} + 3\mu_{[2]} + \mu_{[1]}\\
&\mu_{[4]} = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1 && m_4{=}m_4 + 6\mu_{[3]} - 4\mu_{[2]} - \mu_{[1]}
\end{aligned}$$

Daveadurioù pep bann a c'hell bezañ dezreet diwar reollunioù ar bann all. E degouezhioù 'zo ez eo talvoudus jediñ war-eeun al lankadoù dasperiadel ha dezren diouto al lankadoù ordinal, dreist holl pa vez dasperiadoù e despizadur an tebekadur.

5.2.11 Al lankadoù e rezh sammegennoù Stieltjes

Diwar despizadurioù al lankadoù ha sammegenn Stieltjes e tezreer ar reollunioù da heul :

$$\begin{aligned}
m_k(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \, dF(x) \ ; \\
\mu_k(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - \overline{X}\big)^k \, dF(x) \ ; \\
\mu_{[k]}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(x-1)\dots(x-k+1) \, dF(x) \, .
\end{aligned}$$

5.2.12 Kevreizhenn c'haner lankadoù ur gwehanadur

5.2.12.1 Delakadenn ha despizadur

- **Delakadenn**

Bezet war an egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$ ar gwehanadur dargouezhel X dezhañ gwerzhadoù kevan muiel pe vannel : $0, 1, 2, \dots, k, \dots$, an tebegoù keñverek o vezañ : $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$

Desellomp ar steudad a dermen hollek $p_k t^k$ ma'z eo t un arventenn werc'hel a'r regenn $[-1, 1]$. Bez' ez eus :

$$t \in [-1, 1] \iff |p_k t^k| \leqslant p_k.$$

Ar steudad a dermen hollek p_k o vezañ kengerc'hus — e sammad zo 1 — e tezreer an delakadenn-mañ da heul :

Ar steudad a dermen hollek $p_k t^k$ a gengerc'h ent dizave hag ent unvan.

Bez' ez eus :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|p_k t^k\right| \leqslant 1.$$

- **Despizadur**

Kevreizhenn c'haner lankadoù ar gwehanadur dargouezhel X eus ar gevreizhenn notet g_X (pe g hepken) hevelep ma'z eo :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k.$$

Dezren a reer an daveadur-mañ da heul :

$$\boxed{g(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k},$$

eleze ez eo $g(t)$ par da engortoz jedoniel ar gevreizhenn gediat t^X.

5.2.12.2 Perzhioù ar gevreizhenn c'haner

- Kendalc'hek eo ar gevreizhenn g o vezañ ma'z eo $g(t)$ sammad ur steudad kengerc'hus ent unvan.
- Gwelet hon eus $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k\right| \leqslant 1$, neuze en hon eus $|g(t)| \leqslant 1$.
- Gwiriañ a reer ez eo : $g(0) = 0$ ha $g(1) = 1$.

5.2.12.3 Dedalvezadur evit jediñ al lankadoù dasperiadel

Goulakaomp ez eus eus al lankad dasperiadel $\mu_{[n]}(X)$. O vezañ ma'z eo $-1 \leqslant t \leqslant 1$ en hon eus :

$$\left|p_k k(k-1)\ldots(k-n+1)t^{k-n}\right| \leqslant p_k k(k-1)\ldots(k-n+1).$$

Ar steudad a dermen hollek $p_k k(k-1)\ldots(k-n+1)$ o vezañ kengerc'hus — pa'z eus eus al lankad dasperiadel $\mu_{[n]}(X)$ — e tisoc'h e kengerc'h ar steudad a dermen hollek

$$p_k k(k-1)\ldots(k-n+1)t^{k-n}$$

ent dizave hag ent unvan evit nep $t \in [-1,1]$. Dezren a reer alese he deus ar gevreizhenn c'haner g diarroudennoù betek an urzh k hag o gounit a reer dre ziarroudañ termen ha termen ar steudad o savelañ g. Neuze :

$$g^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k k(k-1)\ldots(k-n+1)t^{k-n},$$

hag evit $t = 1$,

$$\boxed{g^{(n)}(t) = \mu_{[n]}(X)}\,.$$

Savelet hon eus an devoud-mañ : mar bez eus $\mu_{[n]}(X)$ ez eo par da $g^{(n)}(1)$.

POELLADENNOÙ

5.01 Desellout a reer kevreizhenn debekaat ar gwehanadur X savelet dre an daolenn-mañ :

x_i	7843	7845	7847	7849	7851
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

a) Savelañ kevreizhenn debekaat ar gwehanadur dargouezhel :

$$Y = \frac{X - 7847}{2}.$$

b) Savelañ engortoz jedoniel ha hebiant Y.

c) Dezren alese engortoz ha hebiant X.

5.02 Bezet ar gevreizhenn f savelet dre :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{evit } x < 0 \\ e^{-x} & \text{evit } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Dienaat e c'hell f bezañ desellet evel tebekter ur gwehanadur dargouezhel dirgendalc'hek X.

b) Jediñ engortoz jedoniel X.

c) Jediñ hebiant ha strewant X.

5.03 Bezet X ur gwehanadur savelet war un egor tebekaet $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P\big)$ gant an dasparzh-mañ da heul :

$$\left[\left(-6, \frac{2}{10}\right), \left(-3, \frac{3}{10}\right), \left(0, \frac{2}{10}\right), \left(3, \frac{1}{10}\right), \left(4, \frac{2}{10}\right)\right].$$

a) Jediñ $E(X)$, $V(X)$ ha $\sigma(X)$.

b) Dezren alese ar gwehanadur kreizet direet X' kevredet ouzh X.

5.04 En un arc'h ez eus pemp boull : teir du ha div wenn. Tennañ a reer ur voull teir gwech lerc'h ouzh lerc'h hep he adlakaat e-barzh. Jediñ engortoz jedoniel, hebiant ha strewant ar gwehanadur X savelet evel henn : niver ar boulloù gwenn tennet.

5.04 1° En un arc'h ez eus 4 fezh 1 € ha 6 pezh 2 € Tennañ a reer war un dro daou bezh moneiz eus an arc'h. Bezet ar gwehanadur dargouezhel X sammad gwerzh an daou bezh tennet.

a) Savelañ kevreizhenn debekaat X.

b) Savelañ an engortoz jedoniel $E(X)$.

2° Goulakaat a reer ez eus en arc'h a pezh 1 € ha b pezh 2 €, niver hollel ar pezhioù o vezañ 10. Tennañ a reer c'hoazh daou bezh eus an arc'h ha bezet X sammad gwerzh an daou bezh tennet.

a) Diskouez ez eo $E(X)$ ur gevreizhenn eeun da a. Kevregañ ar gevreizhenn-se.

b) Evit pe werzhioù a ez eus : $6 < E(X) < 9$?

5.05 En ur sac'h ez eus n boull, en o zouez unan wenn hepken. Evit he adkavout e tenner ar boulloù unan hag unan betek kaout an hini wenn.

Bezet X ar gwehanadur dargouezhel a zo e werzhadoù par da niver an tennadennoù d'ober da gaout ar voull wenn. Ne adlakaer ket ar voull tennet er sac'h en-dro.

Dodiñ a reer : $p_k = P(X = k)$.

a) Ezrevellañ gwerzhadoù X.

b) Jediñ p_1, p_2 ha p_3, an tebegoù evit kaout ar voull wenn er gentañ tennadenn, en eil tennadenn hag en trede. Diskouez n'emañ ket p_k e dalc'h k.

c) Pe sammad eo $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$? Gwiriañ.

d) Jediñ engortoz jedoniel X.

e) Jediñ strewant X.

5.06 Un arnod dargouezhel a gas d'an dazeilad :

$$\begin{cases} A & \text{tebegezh } p \\ B & \text{tebegezh } q = 1 - p. \end{cases}$$

Arren a reer an arnod k gwech, betek kaout A.

a) Gant $p = \frac{1}{3}$: jediñ an debegezh p_5, eleze $k = 5$, e gerioù all an debegezh da gaout A er pempet arnod.

Jediñ an debegezh da gaout A gant 6 arnod *d'ar muiañ.*

b) p o vezañ diforzh $(0 < p \leqslant 1)$: bezet ar gwehanadur X, e werzhadoù o vezañ niver an arnodoù da gaout A evit ar wech kentañ.

1. Reiñ kevreizhenn debekaat X.

2. Savelañ ar gevreizhenn dassammañ $F(X)$.
3. Jediñ engortoz jedoniel ha strewant X.

Evit savelañ an hebiant e vo jedet da gentañ :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)p_k$$

ha daznavezet e vo en dispakad-se eil diarroudenn ur steudad anavezet. Dezreet e vo :

$$m_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p_k, \qquad \text{ha goude } V(X).$$

5.07 Teurel a reer en ur ser un diñs c'hwec'h tal niverennet eus 1 da 6 hag ur pezh moneiz. Bezet, kevredet ouzh an arnod-se, ar gwehanadur X savelet evel henn : gwerzhadoù X zo an niveroù bet gant an diñs mar bez pil gant ar pezh moneiz hag an daougement mar bez kroaz gant ar pezh moneiz.

a) Jediñ an debegezh p_k kevredet ouzh pep gwehanad.

b) Jediñ engortoz jedoniel ha strewant X.

5.08 Un emstriver en ur c'hoari a rank respont da bemp goulenn lerc'h ouzh lerc'h, o tibab a-douez tri c'hinnig evit pep goulenn.

Da skouer : *Deiziad krouidigezh Gwalarn ?* 1917, 1925, 1935.

Nep goulenn faos zo ezvevennus.

Pe debegoù zo — evit un emstriver a respont dre zargouezh da bep goulenn — da reiñ : 1, 2, 3, 4, 5 respont reizh ?

Ar respont mat kentañ a ro ur savad 5 €

An eil respont mat a gas ar savad-se da 10 €

An trede respont mat a gas ar savad-se da 20 €

Ar pevare respont mat a gas ar savad-se da 40 €

Ar pempet respont mat a gas ar savad-se da 80 €

Jediñ engortoz jedoniel ar savad, mar mir an emstriver ezvevennet ar savad gounezet.

5.09 Desellout a reer ar gwehanadur $X = \frac{Y}{4}$ a zo e werzhadoù par da niver ar piloù bet o teurel pevar fezh moneiz, rannet dre bevar.

a) reiñ kevreizhenn debekaat ar gwehanadur X ?

b) Jediñ :

1. An engortoz jedoniel $E(X)$.
2. Ar forc'had tebek $E\Big[\big|X - E(X)\big|\Big]$.
3. Ar strewant σ, gant $\sigma^2 = E\big[X - E(X)\big]^2$.

5.10 Tennañ a reer ur sifrenn dre zargouezh a-douez ar sifroù eus 0 da 9, an arnod o vezañ keittebek. Bezet ar gwehanadur o kevrediñ ouzh pep tennadenn gwerzh ar sifrenn. Jediñ engortoz jedoniel ha strewant ar gwehanadur.

5.11 Diskouez a reer ez eo ar pad etre daou ec'hod ur rannig gant ur vammenn skin-oberiek renet gant ur savelenn argemmvac'hel eus ar rezh :

$$f(x) = h\mathrm{e}^{-kx} \qquad \text{gant } x \geqslant 0.$$

Bezet ar gwehanadur dirgendalc'hek X, e werzhadoù par d'ar pad $f(x)$ etre daou ec'hod.

a) Pe werzhad eo an arventenn h evit ma ve f un tebekter war an entremez $[0, +\infty[$.

b) Jediñ engortoz jedoniel ha strewant ar gwehanadur X.

5.12 Bezet ur gwerc'hel $p \in [0,1]$ ha dodiñ a reer $q = 1 - p$. Bezet ur c'hevan n hag an tebekadur o kevrediñ ouzh nep $k \in [0, n]$ an debegezh :

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Jediñ al lankadoù dasperiadel a'n urzhioù 1 ha 2.

5.13 Desellout a reer ur gwerc'hel λ muiel hag an tebekadur a gevred ouzh nep kevan k an debegezh :

$$p_k = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Jediñ al lankadoù dasperiadel a'n urzhioù 1 ha 2.

5.14 Bezet ar gwehanadur dargouezhel X a zo e werzhadoù an niveroù bet o teurel un diñs eorizhek.

a) Savelañ al lankadoù ankreizet a'n urzhioù 1 ha 2.

b) Dezren alese an hebiant hag ar strewant.

5.15 *Gwehanadur binomel* a arventennoù n ha p a reer eus ar gwehanadur dargouezhel arskarek savelet dre :

$$G_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

gant

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad \text{ma'z eo} \quad p = 1 - q, \ (p, q) \geqslant 0.$$

a) Savelañ al lankad dasperiadel a'n urzh k (evit $k \leqslant n$).

b) Dezren alese $\mu_{[1]}$, $\mu_{[2]}$, m_1 ha m_2.

c) Jediñ hebiant X.