4

Gwehanadur dargouezhel liesment

4.1 GWEHANADUR DIVVENT. HOLLEKADURIOÙ

4.1.1 Despizadurioù

4.1.1.1 Sturiadell wehaniñ div gedrann

Ouzh nep darvoud A eus un egor tebekaet $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P\big)$ e c'haller lakaat da glotañ un daouac'h werc'helion (x_i, y_j) a gevreder outi tebegezh an darvoud A, eleze $P(x_i, y_j) = P(A)$.

E degouezhioù zo ez eo anat teskad an daouac'hoù :

∼ Daouac'h poentoù bet o teurel daou ziñs a liv disheñvel.
∼ En un arc'h ez eus div voull wenn, teir boull ruz ha pemp boull wer ; tennañ a reer peder boull eus an arc'h, ar boulloù a un liv o vezañ andigemmadus. Ouzh pep disoc'h (darvoud A) e c'haller kevrediñ niver g ar boulloù gwenn ha niver r ar boulloù ruz tennet.
∼ Gorren a reer lies standilhon a-douez pezhioù oberiet en ur gwezhva A hag en ur gwezhva B. Bezet ar pezhioù siek a o tont eus A ha b o tont eus B.

An egor tebekadus $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ o vezañ festet e teseller an arloadur φ adalek Ω etrezek un isteskad bevennek eus $\mathbb{R}^2$. Bezet (x_i, y_j) poentoù an istekad-se a noter $\big(G_X \times G_Y\big)$.

Teskad parzhioù $\big(G_X \times G_Y\big)$ a vez notet $\mathcal{B}\big((G_X \times G_Y)\big)$.

Arloadur keveskemm φ a noter φ^{-1}:

$$\forall (x_i, y_j), (x_i, y_j) \in (G_X \times G_Y), \quad \varphi^{-1}(x_i, y_j) = A, \quad A \in \mathcal{F}(\Omega).$$

Ur seurt arloadur φ a reer anezhañ: daouac'h wehanadurioù gwerc'hel, pe gwehanadur dargouezhel divvent, pe c'hoazh sturiadell wehaniñ div gedrann, a noter neuze (X, Y), $V(x_i, y_j)$ pe V_{ij}.

An egor $\big((G_X \times G_Y), \mathcal{B}(G_X \times G_Y)\big)$ zo un egor tebekadus. O vezañ ma'z eo $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ tebekaet dre P, arloadur eus $\mathcal{F}$ da $[0,1]$, ez eo tebekaet enta an egor $\big((G_X \times G_Y), \mathcal{B}(G_X \times G_Y)\big)$ dre an arloadur kediat $P \circ \varphi^{-1}$. An arloadur-se eus $\mathcal{B}$ etrezek $[0,1]$ a noter P_φ.

Neuze :

$$\forall (x_i, y_j), (x_i, y_j) \in (G_X \times G_Y), \quad P_\varphi\big((x_i, y_j)\big) = P\big(\varphi^{-1}(x_i, y_j)\big) = P(A).$$

Skrivañ a reer alies :

$$\boxed{P\big((x_i, y_j)\big)} \quad \text{e-lec'h} \quad P\big(\varphi^{-1}(x_i, y_j)\big).$$

Ha dre heñvelder gant an notadur boaziet gant ur gwehanadur unvent X e skriver alies evit ur gwehanadur divvent :

$$\boxed{P(X = x_i, Y = y_j)} \quad \text{e-lec'h} \quad P\big(\varphi^{-1}(x_i, y_j)\big).$$

SKOUER — Teurel a reer lerc'h ouzh lerc'h tri fezh moneiz eorizhek. Bezet :

X = niver ar piloù diwar an daou bezh kentañ hepken ;
Y = niver ar piloù diwar hollad an tri fezh.

Teskad ar gwehanadoù zo amparet gant an daouac'hoù (x_i, y_j), elfennoù eus $(G_X \times G_Y)$, gant :

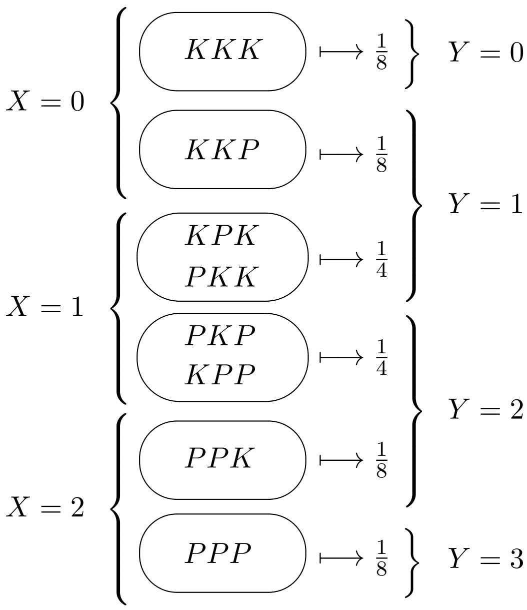
$$G_X = \{0, 1, 2\}, \qquad G_Y = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Kevreizhenn debekaat an daouac'h (X, Y) zo an arloadur :

$$\{i, j\} \longmapsto P\big((x_i, y_j)\big)$$

a roer e werzhadoù en daolenn amañ dindan :

$x \backslash y$	0	1	2	3	Hollad
0	1/8	1/8	0	0	1/4
1	0	1/4	1/4	0	1/2
2	0	0	1/8	1/8	1/4
Hollad	1/8	3/8	3/8	1/8	1



An tebekadur $P : \mathcal{F}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ zo derc'hennet el lodenn greiz eus al lun amañ diaraok. Aes eo gwelout a bep tu penaos kaout an arloadur φ adalek ar parzhioù-se eus Ω etrezek $\big(G_X \times G_Y\big)$.

Mar deseller ur gedrann hepken, ar gwehanadur X da skouer, savelet dre an arloadur eus $\mathcal{F}(\Omega)$ da $G_X = \{0,1,2\}$,

$$\forall x_i, x_i \in G_X, \quad X^{-1}(x_i) \in \mathcal{F}(\Omega).$$

Neuze emañ savelet $P(x_i)$.

4.1.1.2 Kevreizhenn dassammañ ur gwehanadur divvent

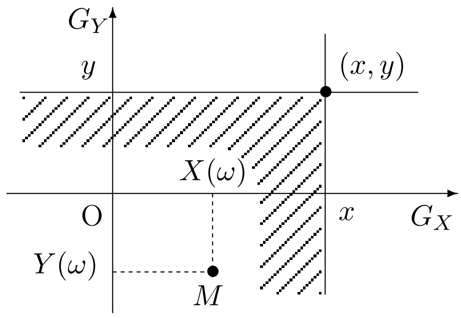
Graet e vez *kevreizhenn dassammañ* ur gwehanadur divvent (X, Y) eus ar gevreizhenn F savelet dre :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = P\big((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\big)}\,.$$

Kounañ ez eo an darvoud : $(X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)$ teskad an elfennoù ω eus ar bondeskad Ω, hevelep ma'z eo :

$$X(\omega) \leqslant x \text{ hag } Y(\omega) \leqslant y,$$

an dibarderioù-se o talvezout emañ nep poent M a zaveennoù $\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$ e-barzh al lodenn linennaouet eus ar blaenenn :



4.1.2 Kendivizad all

Aozerion 'zo a ra gant an despizadur-mañ eus ar gevreizhenn dassammañ :

$$(x,y) \longmapsto P\big((X < x) \cap (Y < y)\big).$$

Dre zedalvout aksiomenn an tebegoù hollel e tiskouezer ez eo :

$$P\big((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\big) - P\big((X < x) \cap (Y < y)\big) = P\big((X = x) \cap (Y = y)\big).$$

4.1.3 Perzhioù

Bezet kevreizhenn dassammañ F ur gwehanadur divvent savelet dre :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = P\big((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\big)\,.$$

• **$\boldsymbol{F}$ zo kengresk ledan e-keñver pep hini eus an argemmennoù (ar gwehanadoù) $\boldsymbol{x}$ ha $\boldsymbol{y}$**

E gwir :

$$\begin{aligned} x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow (X \leqslant x_1) \subseteq (X \leqslant x_2) &\Rightarrow (X \leqslant x_1) \cap (Y \leqslant y) \subseteq (X \leqslant x_2) \cap (Y \leqslant y) \\ &\Rightarrow P\big((X \leqslant x_1) \cap (Y \leqslant y)\big) \leqslant P\big((X \leqslant x_2) \cap (Y \leqslant y)\big) \\ &\Rightarrow F(x_1, y) \leqslant F(x_2, y), \end{aligned}$$

pezh a savel ar c'hengresk ledan e-keñver x.

Heñvel dra e-keñver y.

• **Gwerzh $\boldsymbol{F}$ ouzh an harzoù**

Dezren a reer :

$$F(+\infty, +\infty) = 1 \quad \text{hag} \quad F(-\infty, -\infty) = 0.$$

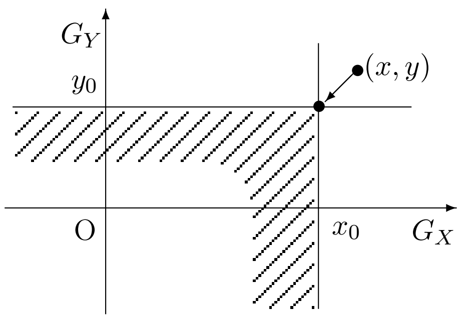
• **Kendalc'hegezh : $\quad \boldsymbol{F(x^+, y^+) = F(x, y)}$**

Dezren a reer :

$$\text{Mar } \begin{cases} x \to x_0^+ \\ y \to y_0^+ \end{cases}, \text{ neuze } F(x, y) \to F(x_0, y_0)\,.$$

Ouzhpenn se, mard eo F kendalc'hek e (x_0, y_0), neuze :

$$P\big((X = x_0) \cap (Y = y_0)\big) = 0\,.$$



4.1.4 Naouusterioù ur gevreizhenn dassammañ

Diskouez a reer ez eo ar perzhioù 1, 2, 3, 4 da heul naouus d'ur gevreizhenn dassammañ a'r gwehanadur divvent (X, Y). E se :

$$\boxed{\begin{array}{c} F(x,y) \text{ zo ur gevreizhenn} \\ \text{dassammañ eus } (X,Y) \end{array}} \Longrightarrow \begin{cases} 1.\ F \text{ zo kengresk e-keñver pep hini} \\ \quad \text{eus an argemmennoù } x \text{ ha } y \\ 2.\ \begin{cases} F(+\infty, +\infty) = 1 \\ F(-\infty, -\infty) = 0 \end{cases} \\ 3.\ F(x^+, y^+) = F(x, y) \\ \quad \text{(kendalc'hek a-zehou)} \end{cases}$$

4. Evit x_0, y_0 diforzh, hag h ha k diforzh anleiel ez eus :

$$\begin{array}{c} \forall(x_0, y_0) \\ \text{hag} \\ \forall(h, k \geqslant 0) \end{array} \begin{cases} \bullet\ F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0) \geqslant 0, \\ \bullet\ F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0) \geqslant 0, \\ \bullet\ F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0 + k) \\ \quad +F(x_0, y_0) \geqslant 0, \end{cases}$$

E gerioù all ez eo F peurangingresk, eleze angingresk e-keñver pep hini eus kedrannoù ar gwehanadur hag e-keñver an div war un dro.

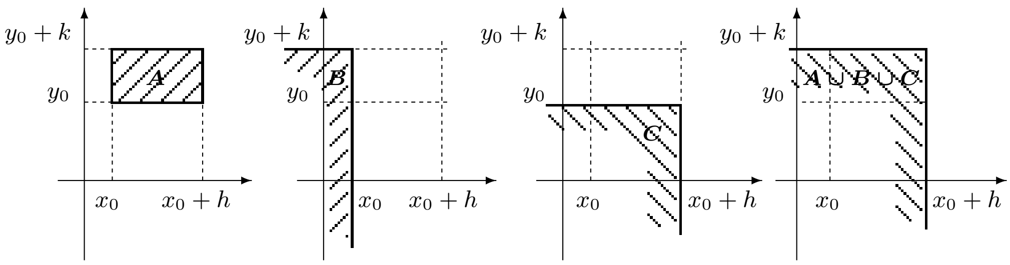
4.1.5 Kevreizhenn dassammañ ha tebegezh ur c'hensturvaeg

Desellomp ar c'hensturvaegoù[1] A, B, C savelet a-getep dre :

$$\begin{array}{rrl} x_0 < x \leqslant x_0 + h, & y_0 < y \leqslant y_0 + h & \text{(kensturvaeg } A\text{)} \\ x \leqslant x_0 \quad , & y \leqslant y_0 + h & \text{(kensturvaeg hollekaet } B\text{)} \\ x \leqslant x_0 + h, & y \leqslant y_0 & \text{(kensturvaeg hollekaet } C\text{)} \end{array}$$

Derc'hennomp amañ dindan ar c'hensturvaegoù A, B, C hag $A \cup B \cup C$ ha klaskomp jediñ tebegezh A diwar-bouez kevreizhenn dasparzh an daouac'h (X, Y).

[1] Ar c'hensturvaeg zo an hollekadur da $\mathbb{R}^n$ eus ar c'healioù a gensturieg hag a gensturdaleg. E degouezh $\mathbb{R}^2$ en hon eus kensturiegoù serzh, eleze reizhkornegoù.



Bez' ez eus :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ - P(C \cap A) - P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

hag, o vezañ ma'z eo an teir zebegezh diwezhañ par da vann (darvoudoù disparti) :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C),$$

eleze :

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = P(A) + F(x_0, y_0 + k) + F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0),$$

pe :

$$P(A) = F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0 + k) - F(x_0 + h, y_0) + F(x_0, y_0).$$

4.2 GWEHANADUR DIVVENT ARSKAREK

4.2.1 Kevreizhenn debekaat

Bezet ur sturiadell wehaniñ $\boldsymbol{V}$ div gedrann X ha Y. An daou wehanadur X ha Y zo dezho, a-getep, da zeskad delvadoù :

$$G_X = X\langle\Omega\rangle = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_r\} \text{ hag } G_Y = Y\langle\Omega\rangle = \{y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_s\},$$

ma'z eo ar gwerzhadoù — goulakaet anpar — renket war gresk. E se ez eo ar gwehanadur divvent $\boldsymbol{V}$ savelet dre deskad $\{(x_i, y_j)\}$ ar poentoù bezus al liesâd kartezel $G_X \times G_Y$ ha dre an debegezh p_{ij} kevredet ouzh pep hini anezho.

4.2.1.1 Despizadur ar c'hendebekadur

Kevreizhenn debekaat — pe : kendebekadur — ar gwehanadur divvent $\boldsymbol{V}$ a reer eus an arloadur a gevred ouzh pep daouac'h (x_i, y_j) tebegezh ar c'henskejadur :

$$P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).$$

Notañ a reer p_{ij} an debegezh-se. Neuze :

$$(x_i, y_j) \longmapsto p_{ij}.$$

An tebegoù p_{ij} a vast evel reizh da :

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} P(X = x_i \cap Y = j) = 1.$$

Evit kevregañ ar c'hendebekadur en un dealf $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e touger x_i war ahel al ledennoù, y_j war ahel an hedennoù ha p_{ij} war ahel ar savennoù.

EVEZHIADENN — E pep rikted e ve da skrivañ $P_{(X,Y)}$ pe $P_{\boldsymbol{V}}$ e-lec'h P hepken evit kevreizhenn debekaat ar sturiadell wehaniñ (X, Y). Liesañ ne sav amjestregezh ebet avat.

4.2.1.2 Taolenn an tebegoù

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_s
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1s}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{is}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_r	p_{r1}	$\dots$	p_{rj}	$\dots$	p_{rs}

4.2.2 Kevreizhenn dassammañ

Kounañ ez eo kevreizhenn dassammañ ar gwehanadur divvent $\boldsymbol{V} = (X, Y)$ ar gevreizhenn F savelet dre :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = P\big((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant y)\big)}.$$

Evit $x_i \leqslant x < x_{i+1}$ hag $y_i \leqslant y < y_{i+1}$:

$$F(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{i} \sum_{\beta=1}^{j} p_{\alpha\beta}.$$

Hewelaet eo ar sammad-se en daolenn amañ diaraok : emañ an termenoù anezhañ er reizhkorneg tev e duioù.

4.2.3 Tebekaduriuoù marzel

Tebekadurioù marzel — pe : kevreizhennoù tebekaat marzel, pe c'hoazh : dasparzhioù marzel — an daouac'h (X, Y) a reer eus tebekadurioù X ha Y, eleze ar c'hevreizhennoù :

$$x_i \longmapsto P_X(X = x_i) \qquad \text{hag} \qquad y_j \longmapsto P_Y(Y = y_j).$$

Dezren a reer e c'haller kaout an tebekadurioù marzel diwar-bouez an daolenn amañ da heul :

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_s	P_X
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1s}	$p_{1\bullet}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{is}	$p_{i\bullet}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_r	p_{r1}	$\dots$	p_{rj}	$\dots$	p_{rs}	$p_{r\bullet}$
P_Y	$p_{\bullet 1}$	$\dots$	$p_{\bullet j}$	$\dots$	$p_{\bullet s}$	1

Sammad :

$$p_{i1} + \cdots + p_{ij} + \cdots + p_{is} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = p_{i\bullet}$$

tebegoù rez an x_i-où zo par da debegezh an darvoud $(X = x_i)$. Notañ a reer $p_{i\bullet}$ ar sammad-se. E se :

$$\boxed{p_{i\bullet} = P_X(X = x_i)}\,.$$

Heñvel dra ez eo sammad $\sum_{i=1}^{r}$ tebegoù bann an y_j-où par da debegezh an darvoud $(Y = y_j)$. Arouezian̈ a reer $p_{\bullet j}$ ar sammad-se, alese :

$$\boxed{p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij} = P_Y(Y = y_j)}\,.$$

EVEZHIADENN

1° Dre sammañ an tebegoù marzel e teu :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1}\,.$$

2° An tebekadurioù P_X ha P_Y zo bet tennet diouzh kendebekadur ar gwehanadur divvent (X, Y), hogen anaoudegezh P_X ha P_Y ne spir ket peurliesañ da savelañ kendebekadur $P_{(X,Y)}$ ar gwehanadur divvent.

4.2.4 Dasparzhioù marzel

Savelet eo ar c'hevreizhennoù dassammañ marzel :

- Evit X dre :

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}[\,, \qquad \boxed{F_X(x) = P_X(X \leqslant x_i)}\,.$$

Alese :

$$F_X(x) = p_{1\bullet} + \cdots + p_{i\bullet} = \sum_{\alpha=1}^{i} P_{\alpha\bullet} = \sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=1}^{s} P_{\alpha\beta}\,.$$

- Evit Y dre :

$$\forall y \in [y_j, y_{j+1}[, \qquad \boxed{F_Y(y) = P_Y(y \leqslant y_j)}.$$

Alese :

$$F_Y(y) = p_{\bullet 1} + \cdots + p_{\bullet j} = \sum_{\beta=1}^{j} P_{\bullet \beta} = \sum_{\beta=1}^{j} \sum_{\alpha=1}^{r} P_{\alpha\beta}\,.$$

4.2.5 Dasparzhioù a-zianouez

Kevreizhenn debekaat a-zianouez ar gwehanadur Y o c'houzout an darvoud $(X = x_i)$ a reer eus an arloadur :

$$P_{X=x_i} : y_j \longmapsto P'(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} = p_{j/i}.$$

E gwir emeur e bondeskad an darvoud $(X = x_i)$ amparet gant ar bezusterioù $(Y = y_j / X = x_i)$, $j \in [1, \ldots, s]$, eleze ar rez x_i :

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = p_{i\bullet}.$$

Heñvel dra e tespizer kevreizhenn a-zianouez X o c'houzout $(Y = y_j)$:

$$x_i \longmapsto p_{i/j} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}.$$

4.2.6 Dizalc'h an div gedrann

Al liesañ, $p_{ij} \neq p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}$, eleze ned eo ket $P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$ par da liesâd an tebegoù marzel $P_X(X = x_i)$ ha $P_Y(Y = y_j)$. E gerioù all ne c'haller ket dezren $P_{(X,Y)}$ diouzh anaoudegezh P_X ha P_Y.
Lavarout a reer ez eo dizalc'h ar gwehanadurioù X ha Y, mmard eo dizalc'h an darvoudoù $(X = x_i)$ ha $(Y = y_j)$ ne vern ar menegoù i ($i \in [1, \ldots, r]$) ha j ($j \in [1, \ldots, s]$), eleze :

$$P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j).$$

E gerioù all :

$$\boxed{X \text{ hag } Y \text{ dizalc'h} \iff p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}, \quad \forall (i, j)}.$$

Da neuze e c'haller dezren dasparzh an daouac'h diwar dasparzh an div gedrann. Bez' ez eus :

$$p_{j/i} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} = \frac{p_{\bullet j}}{1}.$$

Gwelout a reer enta ez eo pep rez (dasparzhioù Y gant $(X = x_i)$ sevenet) kenfeuriek ouzh dasparzh marzel Y.

4.2.7 Hollekadur da n ment

An despizadurioù amañ diaraok a c'hell bezañ astennet d'ur gwehanadur $\boldsymbol{V}$ arskarek liesment : taolenn an tebegoù $p_{ijk\ldots l}$ stag ouzh an teskadoù a'r rezh $(x_i, y_j, z_k, \ldots, u_l)$ zo neuze un daolenn n ment, gant ma vastfe an tebegoù $p_{ijk\ldots l}$ da :

$$\sum_i \sum_j \sum_k \cdots \sum_l p_{ijk\ldots l} = 1.$$

Jediñ a reer tebegoù ar gwehanadurioù marzel (dezho nebeutoc'h eget n ment) dre holladur an tebegoù $p_{ijk\ldots l}$. Da skouer, ar gwehanadur marzel (X, Y) divvent a glot ouzh an tebegoù :

$$P(X = x_i \cap Y = y_j) = p_{ij\bullet\ldots\bullet} = \sum_k \cdots \sum_l p_{ijk\ldots l}.$$

Savelañ a reer gwehanadurioù a-zianouez dre festañ gwerzhadoù lod eus an n gwehanadur. Evit p kedrann a $\boldsymbol{V}$ festet e c'hell ar gwehanadurioù a-zianouez kaout $1, 2, \ldots, n - p$ ment. Gant se, ar gwehanadur $(X, Y)/Z = z_k$ hag $\ldots$ hag $U = u_l$ ez eus :

$$P(X = x_i \cap Y = y_j / Z = z_k \text{ hag } \ldots \text{ hag } U = u_l) = \frac{p_{ijk\ldots l}}{p_{\bullet\bullet jk\ldots l}}.$$

Heñvel dra, evit a sell ar gwehanadur $X/Z = z_k$ hag $\ldots$ hag $U = u_l$ e teu :

$$P(X = x_i / Z = z_k \text{ hag } \ldots \text{ hag } U = u_l) = \frac{p_{i\bullet k\ldots l}}{p_{\bullet\bullet jk\ldots l}}$$

oc'h aroueziañ dre ur pik $\bullet$ disoc'h ur sammata kaset war ar meneg erlec'hiet outañ ar pik.

Despizañ a reer *dizalc'h bloc'hel* ar gwehanadurioù $X, Y, Z, \ldots, U$ evel henn : $X, Y, Z, \ldots, U$ zo gwehanadurioù dizalc'h a-vloc'h, mard eo gwiriet — evit $(i, j, k, \ldots, l)$ diforzh — an daveadur :

$$p_{ijk\ldots l} = p_{i\bullet\bullet\ldots\bullet} \times p_{\bullet j\bullet\ldots\bullet} \times p_{\bullet\bullet k\ldots\bullet} \times \cdots \times p_{\bullet\bullet\bullet\ldots,l}.$$

Neuze, an holl zasparzhioù a-zianouez a glot ouzh an dasparzhioù marzel keñverek.

Despizañ a reer ivez an *dizalc'h darnel* etre ur stroll gwehanaduriou hag ur stroll all. Da skouer (X, Y) ha (Z, U) zo dizalc'h kenetrezo, mard eo — evit i, j, k, l diforzh — gwiriet an daveadur :

$$p_{ijk\bullet\ldots\bullet l} = p_{ij\bullet\bullet\ldots\bullet\bullet} \times p_{\bullet\bullet k\bullet\ldots\bullet l}.$$

Da heul e klot dasparzhioù a-zianouez gwehanaduriou a'r stroll kentañ ereet ouzh gwehanaduriou a'n eil stroll ouzh an dasparzhioù marzel keñverek.

Heñvel dra e tespizer an *ere kevreizhel* : ar gwehanadur (X, Y) zo ereet ent kevreizhel ouzh ar gwehanadur (Z, U) mard eo kaougant ar gwehanadur a-zianouez $(X, Y)/Z = z_k \cap U = u_l$.

SKOUERIOÙ

1. Desellomp an arnod tebegouriel a c'hoarvez a zasparzhañ dre zargouezh ar 52 gartenn eus ur spletad bridj etre pevar c'hoarier. Ar bondeskad zo amparet gant an $52!(13!)^4$ doare keittebek da ingalañ ar c'hartoù. Kevredomp ouzh pep ingaladenn ar pemp niver :

$$\begin{array}{c} \text{Sturiadell} \\ \boldsymbol{V} \\ \text{pemp kedrann} \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} X & : & \text{niver ar c'hoarierion o tegemer born ebet;} \\ Y & : & \text{niver ar c'hoarierion o tegemer ur born rik;} \\ Z & : & \text{niver ar c'hoarierion o tegemer daou vorn rik;} \\ U & : & \text{niver ar c'hoarierion o tegemer tri born rik;} \\ W & : & \text{niver ar c'hoarierion o tegemer pevar born rik.} \end{array} \right.$$

Bez' ez eus pemp gwerzhad bezus evit ar sturiadell $\boldsymbol{V}$ hag an tebegoù stag ouzh ar gwerzhadoù-se a erouezer en daolenn amañ dindan :

Gwerzhadoù bezus ar sturiadell $\boldsymbol{V}$					Tebegezh keñverek	gwerzhad niverel
X	Y	Z	U	W		
3	0	0	0	1	$\frac{4!}{3!1!}\binom{13}{4}/\binom{52}{4}$	0,01056
2	1	0	1	0	$\frac{4!}{2!1!1!}\binom{13}{1}\binom{13}{3}/\binom{52}{4}$	0,16480
2	0	2	0	0	$\frac{4!}{2!2!}\binom{13}{2}^2/\binom{52}{4}$	0,13484
1	2	1	0	0	$\frac{4!}{2!1!1!}\binom{13}{1}^2\binom{13}{2}/\binom{52}{4}$	0,58430
0	4	0	0	0	$\frac{4!}{4!}\binom{13}{1}^4/\binom{52}{4}$	0,10550
					Hollad :	1,00000

Ar gwehanadurioù X, Y, Z, U, W zo ereet a-gevreizh dre an daou zaveadur linennek :

$$\begin{aligned} X+Y+Z+U+W &= 4 \quad \text{(niver ar c'hoarierion)}, \\ Y+2Z+3U+4W &= 4 \quad \text{(niver ar bornoù)}, \end{aligned}$$

e doare m'emañ ar 5 poent $\boldsymbol{v}$, en egor pemp ment, en ur blaenenn teirment.

En degouezh-mañ ez eus un toullad ereoù kevreizhel. Da skouer :

W zo ereet ouzh	:	$X, (X,Y), (Y,Z), \ldots$
U zo ereet ouzh	:	$Y, (X,Y), (X,Z), \ldots$
(W,U) zo ereet ouzh	:	$(X,Y), (X,Z), (Y,Z), \ldots$
(X,W,U) zo ereet ouzh	:	(Y,Z),
hag all.		

2. Bezet ar gwehanadur teirment $\boldsymbol{V} = (X, Y, Z)$, teskad gwehanadoù an teir c'hedrann o vezañ $G_X = \{x_1, x_2\}$, $G_Y = \{y_1, y_2\}$, $G_Z = \{z_1, z_2\}$, tebekaet hervez al lun amañ dindan :

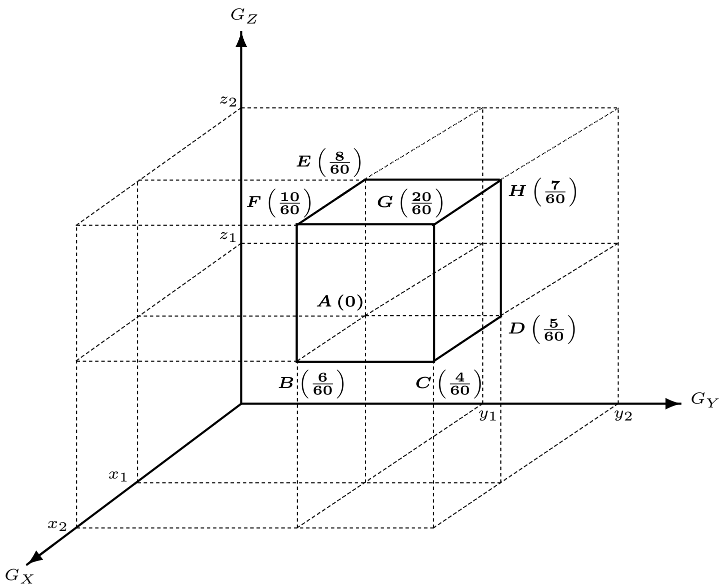
Bezet enta ar poentoù :

$$A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_1,z_1), C(x_2,y_2,z_1), \ldots, G(x_2,y_2,z_2),$$

derc'hennadur gwehanadoù $\boldsymbol{V}$.

Roet enta :

$$p_{111} = 0,\ p_{211} = \frac{6}{60},\ p_{221} = \frac{4}{60},\ p_{121} = \frac{5}{60},$$
$$p_{112} = \frac{8}{60},\ p_{212} = \frac{10}{60},\ p_{222} = \frac{20}{60},\ p_{122}.$$



Savelañ ar gwehanadurioù marzel

- Kevreizhennoù tebekaat ar gwehanadurioù marzel divvent :

Gwerzhadoù ar c'hevreizhennoù-se a c'hell bezañ jedet o sammata hervez ur meneg, eleze ez eus tri gwehaniñ divvent : $p_{ij\bullet}$, $p_{i\bullet k}$ ha $p_{\bullet jk}$. An tebegoù ketep a c'hounezer dre vannañ war an deir flaenenn daveennoù ar sammadoù daou ha daou :

X \ Y	y_1	y_2	
x_1	$\frac{8}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{20}{60}$
x_2	$\frac{16}{60}$	$\frac{24}{60}$	$\frac{40}{60}$
	$\frac{24}{60}$	$\frac{36}{60}$	

X \ Z	z_1	z_2	
x_1	$\frac{5}{60}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{20}{60}$
x_2	$\frac{10}{60}$	$\frac{30}{60}$	$\frac{40}{60}$
	$\frac{15}{60}$	$\frac{45}{60}$	

Z \ Y	y_1	y_2	
z_1	$\frac{6}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{15}{60}$
z_2	$\frac{18}{60}$	$\frac{27}{60}$	$\frac{45}{60}$
	$\frac{24}{60}$	$\frac{36}{60}$	

• Kevreizhennoù tebekaat ar gwehanadurioù marzel unvent :
En teir zaolenn amañ diaraok e weler kevreizhennoù tebekaat pep hini eus an tri gwehanadur X, Y, Z.

Da skouer ez eo $x_i \longmapsto P_X(x_i) = p_{i\bullet\bullet}$ kevreizhenn debekaat ar gwehanadur unvent X.
Jediñ a reer :

$p_{1\bullet\bullet} = \frac{20}{60}$	$p_{2\bullet\bullet} = \frac{40}{60}$
$p_{\bullet 1 \bullet} = \frac{24}{60}$	$p_{\bullet 2 \bullet} = \frac{36}{60}$
$p_{\bullet\bullet 1} = \frac{15}{60}$	$p_{\bullet\bullet 2} = \frac{45}{60}$

An tebekadurioù marzel-se a c'hounezer ivez dre vannañ pevar ha pevar an tebegoù teirment war an ahelioù daveennoù.

Dizalc'h

• Stadañ a reer war an teir zaolenn amañ diaraok ez eo pep hini eus an teir daouac'h (X,Y), (X,Z), (Z,Y) amparet gant kedrannoù dizalc'h. Da skouer :

$$p_{ij\bullet} = p_{i\bullet\bullet} \times p_{\bullet j \bullet}.$$

• Neoazh e c'haller gwiriañ ez eo :

$$p_{ijk} \neq p_{i\bullet\bullet} \times p_{\bullet j\bullet} \times p_{\bullet\bullet k}.$$

Da skouer en A ez eo $p_{111} = 0$, tra ma'z eo anvannel $p_{1\bullet\bullet}$, $p_{\bullet 1\bullet}$ ha $p_{\bullet\bullet 1}$. Neuze ez eo dizalc'h an tri gwehanadur X, Y ha Z daou ha daou, hogen ned int dizalc'h a-vloc'h.

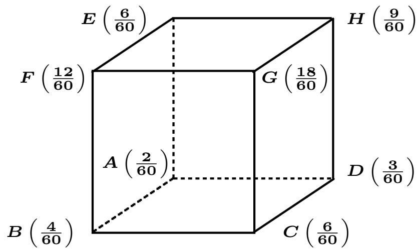
Reizhiad gwehanadurioù dizalc'h a-vloc'h

Diwar an tebekadurioù marzel unvent e c'haller tebekaat ar sturiadell wehaniñ teirment (X,Y,Z) en un anvevennad a zoareoù. Da skouer :

$$p_{111} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{60}, \qquad p_{112} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{60},$$

$$p_{121} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{60}, \qquad p_{221} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{60},$$

E se e tisoc'her gant an derc'hennadur egorel amañ dindan :



4.3 GWEHANADUR DIVVENT DIRGENDALC'HEK

4.3.1 Kevreizhenn $F(x, y)$ dirgendalc'hek

Lavarout a reer ez eo dirgendalc'hek ur gevreizhenn savelet war $\mathbb{R}^2$, mmard eus ur gevreizhenn f, hevelep ma'z eo :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv.$$

4.3.2 Gwehanadur divvent dirgendalc'hek. Tebekter gorreel

Bezet ur gwehanadur dargouezhel divvent, an daouac'h (X, Y) a wehanadurioù — pe : ar sturiadell wehaniñ divvent — war un egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$. Lavarout a reer ez eo dirgendalc'hek ar gwehanadur divvent (X, Y) mmard eo dirgendalc'hek e gevreizhenn dasparzh :

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv.$$

Ar gevreizhenn f a reer anezhi *tebekter gorreel* ar gwehanadur divvent (X, Y).

Perzhioù

1° Ar gevreizhenn dassammañ :

$$(x, y) \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$$

o vezañ kengresk e-keñver pep hini eus an argemmennoù x hag y e c'haller dezren ez eo $f \geqslant 0$.

2° Gallout a reer diarroudañ, nemet e poentoù goubar 'zo, ha neuze :

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = f(x,y)}\,.$$

4.3.3 Tebegezh ur reizhkorneg

Desellomp ar reizhkorneg K savelet dre $a < x \leqslant b$, $c < y \leqslant d$. Goût a ouzer :

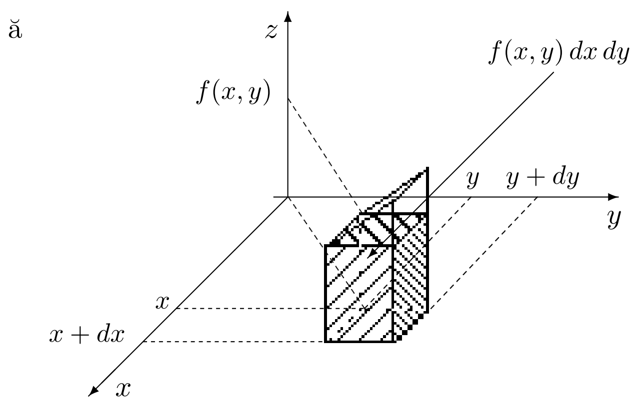
$$P(K) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c),$$

eleze :

$$P(K) = \int_a^b \int_c^d f(u,v)\, du\, dv.$$

An debegezh a c'hell bezañ derc'hennet dre an ec'honenn dindan ar c'horreenn $z = f(x,y)$ he atalad.

• **Tebegezh elfennel** — Tebegezh elfennel a reer eus an elfenn orgemmel $f(x,y)\, dx\, dy$, $f(x,y)$ o vezañ an tebekter gorreel er poent (x,y). Sl. al lun amañ dindan.



• **Tebegezh en ur poent** — Evit a sell ur gwehanadur dirgendalc'hek ez eus :

$$P\big((X = a) \cap (Y = b)\big) = 0.$$

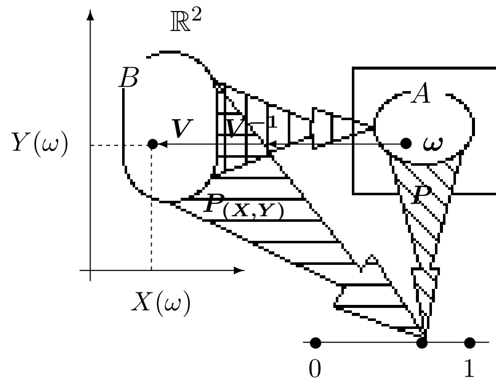
4.3.4 Tebegezh un domani Borel

Domani Borel B a reer eus nep teskad bet diwar kembodañ (pe kenskejañ) lerc'hiadoù eriñvadus a reizhkornegoù, a c'hell bezañ heuliet gant an tremen d'ar glokaenn. Dezren a reer ez eo an teskad :

$$A = \{\omega, \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \ \in \ B\}$$

a zo endalc'het er bondeskad Ω, enbeziat er σ-aljebr $\mathcal{F}(\Omega)$ ha tebegezh A zo :

$$P(A) = P \circ V^{-1}(B) = P_{(X,Y)}(B) = \iint_B f(u,v)\, du\, dv.$$



Alese ez eo tebegezh un domani mannel e c'horread par da vann : nep krommenn a'r blaenenn zo dezhi un debegezh vannel.

SKOUER — Dibab a reer dre zargouezh ur poent er c'harrez unanenn e vegoù er poentoù:

$$(x = 0,\ y = 0), \quad (x = 0,\ y = 1), \quad (x = 1,\ y = 0) \quad \text{hag} \quad (x = 1,\ y = 1).$$

Bezet X ha Y daveennoù ar poent bet evel-se.

Teskad gwerzhadoù ar gwehanadur divvent zo ar c'harrez unanenn :

$$G_{(X,Y)} = \{x \in [0,1] \text{ hag } y \in [0,1]\}.$$

Pep poent eus ar c'harrez-se zo dezhañ un debegezh vannel, dre berzh an dibab dargouezhek. Darbenn a reomp — dre berzh an dargouezh-se end-eeun — ez eus d'un domani D endalc'het er c'harrez unanenn un debegezh kenfeuriek ouzh e c'horread S :

$$P\left[D \in G_{(X,Y)}\right] = kS \quad \text{mar} \quad D \subseteq G_{(X,Y)}.$$

An arstalenn k a saveler dre ar werzhad 1 a'n debegezh kevredet ouzh ar c'harrez unanenn :

$$P\left[G_{(X,Y)}\right] = k = 1.$$

Alese kevreizhenn debekaat ar gwehanadur divvent dirgendalc'hek (X, Y) :

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{mar} \quad x \leqslant 0 & \text{pe} \quad y \leqslant 0, \\ xy & \text{mar} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 & \text{hag} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \min(x,y) & \text{mar} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant y & \text{pe} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \leqslant x, \\ 1 & \text{mar} \quad x \geqslant 1 & \text{hag} \quad y \geqslant 1. \end{cases}$$

An tebekter gorreel zo kalz eeunoc'h :

$$f(M) = \begin{cases} 1 & \text{mar} \quad M \in G_{(X,Y)}, \\ 0 & \text{mar} \quad M \notin G_{(X,Y)}. \end{cases}$$

Ankendalc'hek eo an tebekter gorreel-se war vevenn ar c'harrez $G_{(X,Y)}$.

4.3.5 Tebekaduriòù ha tebekteriòù marzel

Diwar ar gevreizhenn dassammañ F e c'haller savelañ an dasparzhiòù marzel :

- Evit X, dre :

$$F(x,+\infty) = F(x_{\bullet}) = P_X(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\, dv\right] du.$$

Ar gwehanadur X zo dirgendalc'hek, rak ar gevreizhenn $F(x, +\infty)$ zo kendalc'hek he-unan ha dezhi da ziarroudenn an tebekter regel er poent x :

$$f(x_{\bullet}) = F'(x_{\bullet}),$$

eleze :

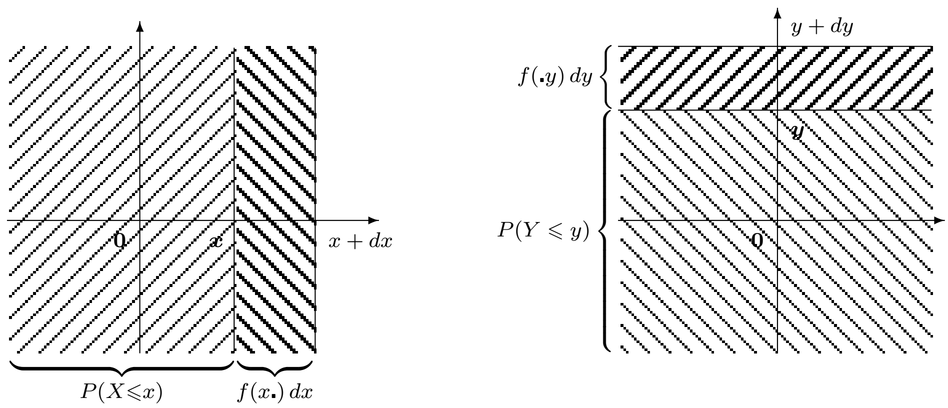
$$f(x_{\bullet}) = F'_x(x,+\infty) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy.$$

• Heñvel dra evit Y, dre :

$$F(+\infty, y) = F(\centerdot y) = P_Y(Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du \right] dv,$$

$$f(\centerdot y) = F'_y(+\infty, y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Setu amañ dindan derc'hennadur kevregat kevreizhennoù dassammañ ha tebekaat marzel ar gwehanadur divvent (X, Y) :



EVEZHIADENN — Liesañ ne vez ket savelet dasparzh ar gwehanadur divvent (X, Y) dre ar c'hevreizhennoù tebekaat marzel X ha Y.

• Tebekter gorreel keitat

Tebekter gorreel keitat an darvoud $(x < X \leqslant x + h) \cap (y < Y \leqslant y + k)$ a reer eus ar c'heñver :

$$\frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y)}{hk},$$

dre heñveliezh ouzh douester gorreel ur blakenn.

SKOUER — Adkemeromp ar skouer amañ diaraok : poent dibabet dre zargouezh er c'harrez unanenn. Teskad gwerzhadoù an daouac'h (X, Y) zo ar c'harrez $G_{(X,Y)} = G_X \times G_Y$. Teskad gwerzhadoù $Y/X = x$ ar gwehanadur Y evit x

festet — eleze : kenskejadur an domani $G_{(X,Y)}$ gant an eeunenn x he ledenn — zo par da werzhadoù Y, ha heñvel dra evit $X/Y = y$ hag X, rak $G_{(X,Y)}$ zo liesâd kartezel X ha Y :

$$\begin{aligned} \forall y: &\quad G_{(X/Y=y)} = G_X = [0,1], \\ \forall x: &\quad G_{(Y/X=x)} = G_Y = [0,1]. \end{aligned}$$

Neuze :

$$f(x_{\bullet}) = \int_0^1 dy = 1, \qquad G_X = [0,1],$$

ha heñvel dra :

$$f({}_{\bullet}y) = \int_0^1 dx = 1, \qquad G_Y = [0,1].$$

Ar gwehanadurioù marzel zo dezho un dasparzh unvan war ar regenn $[0,1]$.

4.3.6 Dasparzhioù a-zianouez

Kounañ ez eo tebegezh a-zianouez an darvoud $[Y \leqslant y/(x < X \leqslant x + dx)]$:

$$P\left[Y \leqslant y/(x < X \leqslant x + dx)\right] = \frac{P\left[(Y \leqslant y) \cap (x < X \leqslant x + dx)\right]}{P(x < X \leqslant x + dx)}.$$

Bez' ez eus neuze :

$$\boxed{P\left[Y \leqslant y/(x < X \leqslant x + dx)\right] = \frac{\int_{-\infty}^{y} \left[\int_x^{x+dx} f(u,v)\,du\right] dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_x^{x+dx} f(u,v)\,du\right] dv}},$$

pezh a savel ur gevreizhenn da y anvet kevreizhenn dassammañ a-zianouez Y o c'houzout $(x < X \leqslant x + dx)$.

An tebekter o klotañ outi a reer anezhañ tebekter a-zianouez Y o c'houzout $(x < X \leqslant x + dx)$. Par eo da :

$$\frac{\int_x^{x+dx} f(u,v)\,du}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_x^{x+dx} f(u,v)\,du\right] dv} \qquad \text{eleze} \qquad \frac{\int_x^{x+dx} f(u,v)\,du}{\int_x^{x+dx} f(u_{\bullet})\,du}.$$

Dre gevamsaviñ X ha Y e saveler ivez kevreizhenn dassammañ ha tebekter a-zianouez X o c'houzout $(y < Y \leqslant y + dy)$.

EVEZHIADENN — Ne c'haller ket savelañ en doare-se tebegezh an darvoud :

$$(Y \leqslant y)/(X = x),$$

rak $P(X = x) = 0$.

4.3.7 Dizalc'h evit un daouac'h wehanadurioù dargouezhel

Diwar despizadur dizalc'h daou zarvoud ez eur kaset d'an despizadur-mañ da heul eus dizalc'h un daouac'h :

Despizadur — Bezet ur gwehanadur divvent (X, Y) ha f, g, h a-getep tebekterioù (X, Y), X ha Y.
Lavarout a reer ez eo dizalc'h X ha Y mmar :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{f(x, y) = g(x) \times h(y)}.$$

Hollekoc'h, ar gwehanadurioù $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dezho an tebekterioù ketep $g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots, g_n(x_n)$, an tebekter bloc'hel o vezañ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zo dizalc'h mmar :

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \times g_2(x_2) \times \ldots \times g_n(x_n)}.$$

SKOUER — Daveennoù ur poent dibabet a-zargouezh er c'harrez unanenn zo daou wehanadur dizalc'h, rak bodet eo an daou amplegad-mañ da heul :

$$G_{(X,Y)} = [0, 1] \times [0, 1] \quad \text{ha} \quad f(x, y) = 1.$$

Teurel evezh : ma ne revez ket ar c'hentañ amplegad ne c'hell ket ar gwehanadurioù X ha Y bezañ dizalc'h. Bez' ez eus :

$$\text{Mar bez :} \begin{cases} f(x, y) = 1 & \forall (x, y) \in G_{(X,Y)} \\ f(x, y) = 0 & \forall (x, y) \notin G_{(X,Y)} \end{cases}$$

Ar gwehanadur divvent (X, Y) dezhañ an tebekter $f(x, y)$ a lavarer unvan.

4.3.8 Ere kevreizhel

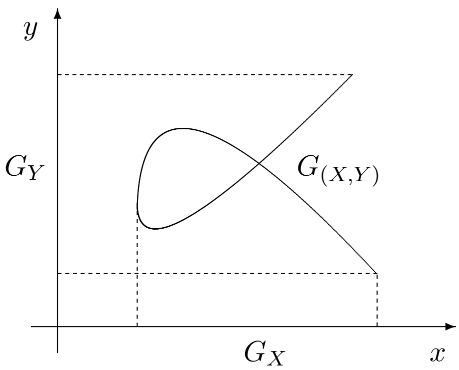
Lavarout a reer ez eo an daou wehanadur dirgendalc'hek X ha Y liammet ent kevreizhel dre an daveadur φ :

$$\varphi(X, Y) = 0,$$

pa vez teskad ar poentoù bezus $G_{(X,Y)}$ ur warenn pe gembodadur gwarennoù ur grommenn (anvannel o hed) $\mathcal{C}$ he atalad :

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Da neuze ned eo ket mui dirgendalc'hek ar sturiadell wehaniñ (X, Y), hogen dibarek : ar gevreizhenn dassammañ $F_{(X,Y)}$ a vez peurliesañ ur gevreizhenn gendalc'hek da (x, y), hogen he eil diarroudenn zo mannel e-maez $G_{(X,Y)}$ hag ansavelet war $G_{(X,Y)}$.



Gallout a reer neuze savelañ ar gwehanadur (X, Y) dre ur gwehanadur marzel, X da skouer, ha dre familh ar gwehanadurioù a-zianouez, $Y/X = x$ mard eo bet dibabet X. Ar gwehanadur marzel X en deus da debekter ur gevreizhenn aroueziet dre $f(x_\bullet)$.

Evit $X = x_0$ ez eo arskarek ar gwehanadur $Y/X = x_0$ ma n'eus regenn eeun ebet, gant un debegezh anvannel ha kenstur da ahel an hedennoù. Neuze, gwerzhadoù bezus $Y/X = x_0$ zo gwrizioù an atalad $\varphi(x_0, y) = 0$:

$$[y \in G_{X=x_0}] \iff [\varphi(x_0, y) = 0].$$

Gallout a reer despizañ an tebekter regel war ar grommenn $G_{(X,Y)}$ evel harz rannad an tebekter stag ouzh ur warenn elfennel dre regad ds ar warenn-se, pa denn ds war-du mann.

Un degouezh dibarek a ere kevreizhel etre daou wehanadur zo an hini ma c'haller rezhiennañ an atalad φ evel henn :

$$y = \alpha(x).$$

Neuze ez eo ar gwehanadur a-zianouez $Y/X = x_0$ ar gwehanadur kaougant $\mathcal{C}[\alpha(x_0)]$. Lavarout a reer ez eo ereet Y ouzh X en degouezh-se. A-gemparzh, mar bez ereet X ouzh Y (eleze mar savel ar gevreizhenn α ur c'hesaezhadur) e lavarer ez eo keveskemm an ere kevreizhel.

4.3.9 Hollekadur da n ment

Ur gwehanadur dargouezhel n-ment zo dirgendalc'hek mard eo kendalc'hek e gevreizhenn dassammañ ha dezhi un diarroudenn a'n urzh n :

$$F^{(n)}_{(X_1,..,X_n)}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \ldots \partial x_n},$$

a skrivimp $f(x_1,\ldots,x_n)$ pe c'hoazh $f(\boldsymbol{v})$. Teskad ar gwehanadoù $G_{(X_1,\ldots,X_n)}$ pe $G_{\boldsymbol{V}}$ zo neuze un domani (pe ur c'hembod domanioù) a'n egor $\mathbb{R}^n$, teskad poentoù $\{\boldsymbol{v}\}$ dezhañ goulud an didorr ouzh un n-ec'honad anvannel.

Diskouez a reer neuze ez eo an tebekter en ur poent $\boldsymbol{v}$ eus $G_{(X_1,..,X_n)}$, keñver an debegezh stag ouzh ur gourdiñs boc'hedel gant ec'honad ar gourdiñs-se, $f(\boldsymbol{v})$. Gwerzhadoù ar gevreizhenn f zo anleiel, gallout a ra e poentoù zo eus $G_{(X_1,..,X_n)}$ dont da vezañ anvevenn, hogen par eo he sammegenn en teskad-se da 1.

$$\int_{G_{\boldsymbol{V}}} f(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} = 1.$$

Ar gwehanadur marzel $(X_1,\ldots,X_p) = \boldsymbol{V}^{(p)}$ zo ur gevreizhenn dirgendalc'hek dezhi p ment ha tennañ a reer he zebekter $f(x_1,\ldots,x_p,\cdot,\ldots,\cdot)$ eus $f(\boldsymbol{v})$ dre sammegañ :

$$f(x_1,\ldots,x_p,\cdot,\ldots,\cdot) = \int f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_{p+1}\ldots dx_n,$$

ar sammegenn o vezañ kaset war genskejadur $G_{(X_1,..,X_n)}$ gant ar gourflaenenn p ment savelet dre $(x_1,\ldots,x_p)$, domani aroueziet $G_{x_1,..,x_p} = G^{(p)}$.

Teskad gwehanadoù $G^{(p)}$ eus $\boldsymbol{V}^{(p)} = (X_1,\ldots,X_p)$ zo bannad $G_{(X_1,..,X_n)}$ war egor ar p ahel daveennoù kentañ.

Savelañ a reer ivez gwehanadurioù a-zianouez a zo dirgendalc'hek. Da skouer ar gwehanadur p ment :

$$(X_1,\ldots,X_p)/X_{p+1} = x_{p+1} \text{ hag } \ldots \text{ hag } X_q = x_q$$

zo e debekter :

$$f(x_1,\ldots,x_p;x_{p+1},\ldots,x_q) = \frac{f(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_q,\centerdot,\ldots,\centerdot)}{f(\centerdot,\ldots,\centerdot,x_{p+1},\ldots,x_q,\centerdot,\ldots,\centerdot)}.$$

Dizalc'h bloc'hel ar gwehanadurioù $X_1,\ldots,X_n$ zo savelet dre ar parder :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\centerdot,\ldots,\centerdot,\centerdot) \times \cdots \times f(\centerdot,\centerdot,\ldots,\centerdot,x_n),$$

talvoudek evit $x_1,\ldots,x_n$ diforzh : tebekter ar gwehanadur liesment $\boldsymbol{V}$ zo par da liesâd an tebekterioù marzel unvent. Neuze ez eo an domani $G_{(X_1,..,X_n)}$ liesâd kartezel teskad ar gwehanadoù marzel :

$$G_{(X_1,..,X_n)} = G_{X_1} \times G_{X_2} \times \cdots \times G_{X_n}.$$

Savelañ a reer ivez *an dizalc'h darnel* : stroll ar gwehanadurioù $(X_1,\ldots,X_p)$ zo dizalc'h ent darnel diouzh stroll ar gwehanadurioù $(X_{p+1},\ldots,X_q)$ mard eo tebekter ar gwehanadur marzel q ment $(X_1,\ldots,X_q)$ par da liesâd tebekterioù ar gwehanadurioù marzel $(X_1,\ldots,X_p)$ p ment ha $(X_{p+1},\ldots,X_q)$ $q-p$ ment. Neuze, teskad ar gwehanadoù $G_{x_1,..,x_q} = G^{(q)}$ ar gwehaniñ $(X_1,\ldots,X_q)$ zo liesâd kartezel an teskadoù $G_{x_1,..,x_p} = G^{(p)}$ ha $G_{x_{p+1},..,x_q} = G^{(q-p)}$, a rezhienner

$$G^{(q)} = G^{(p)} \times G^{(q-p)}.$$

Un amveziad ret ha spirus a zizalc'h darnel etre ar stroll gwehanadurioù $(X_1,\ldots,X_p)$ ha hini ar gwehanadurioù $(X_{p+1},\ldots,X_q)$ zo war un dro :

- Teskad ar gwehanadoù $G^{(q)}$ zo liesâd kartezel an daou deskad $G^{(p)}$ ha $G^{(q-p)}$;
- Tebekter marzel $(X_1,\ldots,X_q)$ zo liesâd ur gevreizhenn da $x_1,\ldots,x_q$ dre ur gevreizhenn da $x_{p+1},\ldots,x_q$.

Heñvel dra ez eo diogelet an dizalc'h bloc'hel etre ar gwehanadurioù $X_1, \ldots, X_n$ adal ma'z eo en ur ser :

• $G_{(X_1,..,X_n)}$ zo liesâd kartezel an teskadoù $G_{(X_1)}, \ldots, G_{(X_n)}$;
• Tebekter ar gwehanadur dargouezhel $(X_1, \ldots, X_n)$ zo liesâd n kevreizhenn da un dianavenn, unan anezho da x_1, …, an hini diwezhañ da x_n.

Savelañ a reer c'hoazh un ere kevreizhel e degouezh ur gwehanadur n ment $\boldsymbol{V}$ andirgendalc'hek, dezhañ avat gwehanaduriou marzel zo — gant nebeutoc'h eget n ment — dirgendalc'hek.

Desellomp an degouezh deurus-mañ : teskad ar gwehanadoù $G_{(X_1,..,X_n)}$ zo en $\mathbb{R}^n$ ur c'horreenn $n-p$ ment ha pep hini eus an $\binom{n}{p}$ gwehanadur marzel p ment zo dirgendalc'hek. Lavarout a reer neuze ez eo ar gwehanaduriou $X_1, \ldots, X_n$ ereet dre $n-p$ daveadur kevreizhel : ar c'hevreizhennoù o savelañ ar c'horreenn S a zo $G_{(X_1,..,X_n)}$ ur parzh anezhi :

$$\text{Gorreenn } S : \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-p}(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

En degouezh-se, ar gwehanaduriou a-zianouez $n-p$ ment (p dianavenn eren) a vez arskarek peurliesañ, teskad ar gwehanadoù o klotañ ouzh diskoulmoù an ataladoù o savelañ S.

POELLADENNOÙ

4.01 En ur sac'h ez eus seizh boull wenn ha teir boull du. Tennañ a reer div voull dre zargouezh hep azlakaat. Bezet X ar gwehanadur dargouezhel a zo e werzhadoù :

- 0 mard eo gwenn ar gentañ boull tennet,
- 1 mard eo du ar gentañ boull tennet,

ha bezet Y ar gwehanadur a zo e werzhadoù :

- 0 mard eo gwenn an eil boull tennet,
- 1 mard eo du an eil boull tennet.

a) Sevel taolenn kendebekadur ar sturiadell wehaniñ (X, Y) hag erouezañ war an daolenn kevreizhennoù tebekaat X ha Y.

b) Savelañ kevreizhenn dassammañ $F(x, y)$ an daouac'h dargouezhel.

4.02 Bezet ar gwehanadur divvent (X, Y), unvan war ar c'harrez $C = [0, 1] \times [0, 1]$.

a) Pehini eo kevreizhenn dassammañ ar gwehanadur dargouezhel $Z = X + Y$?

b) Dezren alese tebekter gorreel Z.

c) Kevregañ F ha f daveet da bep a zealf.

4.03 Bezet (X, Y) ur gwehaniñ divvent dirgendalc'hek. Teskad $G_{(X,Y)}$ ar gwehanadoù zo an tric'horn savelet dre an orin, ar poentoù $(0, 1)$ ha $(1, 1)$. An tebekter gorreel e teskad an gwehanadoù zo :

$$f(x, y) = \frac{k}{\sqrt{xy}}.$$

a) Savelañ an arstalenn k.

b) Savelañ tebekadurioù marzel ha tebekadurioù a-zianouez (kevreizhennoù dassammañ ha tebekterioù) ar sturiadell wehaniñ (X, Y).

4.04 En un arc'h ez eus 4 boull wenn, 2 voull du ha 4 boull ruz. Anezhi e tenner 3 boull dre zargouezh, hep azlakaat. Bezet X niver ar boulloù gwenn ha Y niver ar boulloù du a zo er standilhon.

a) Savelañ tebegezh pep hini eus an daouac'hoù (x, y) ha sevel neuze taolenn an tebegoù.

b) Savelañ ar c'hevreizhennoù tebekaat marzel.

c) Savelañ an tebekadur a-zianouez $P(Y = y_j / X = 1)$.

4.05 Dasparzhañ a reer 4 boull e 3 c'hombod A, B, C, an dasparzh o vezañ keittebek. Bezet :

- x niver ar boulloù er c'hombod A,
- y niver ar boulloù er c'hombod B.

Pal ar boelladenn zo studiañ dasparzh an daouac'h (X, Y).

a) Savelañ tebekadur marzel X.

b) Studiañ da heul tebekadurioù a-zianouez ketep Y o c'houzout X, da skouer :

$$\begin{array}{lll} \text{Mard eo } X = 0, & P(Y = y_j / X = 0), & y_j \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \text{Mard eo } X = 1, & P(Y = y_j / X = 1), & y_j \in \{0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

n'eus mui neuze 3 boull da lakaat er c'hombodoù B ha C gant tebegoù par.

$$\text{Mard eo } X = 2, \quad P(Y = y_j / X = 2), \quad y_j \in \{0, 1, 2\}.$$

Savelañ erziwezh $P(Y = y_j / X = 3)$ ha $P(Y = y_j / X = 4)$.

c) Dezren alese taolenn tebegoù an daouac'h (X, Y).

d) Denesadur all :

1. Eriñvañ an arloadurioù eus teskad ar 4 boull da deskad an 3 c'hombod.
2. Eriñvañ ar re a-douez an arloadurioù-se :

$$\begin{array}{lll} \text{hevelep ma'z eo} & X = 2, & Y = 1. \\ \text{hevelep ma'z eo} & X = 3, & Y = 1. \end{array}$$

4.06 Ur voest zo enni 2 voull ruz, 3 boull wenn ha 5 boull c'hlas. Tennañ a reer 3 boull, gant azlakadur, ha bezet X o reiñ niver ar boulloù gwenn ha Y niver ar re ruz a-douez an 3 boull tennet.

a) War-benn studiañ dasparzh an daouac'h (X, Y), savelañ da gentañ an dasparzh marzel X.

b) Da c'houde savelañ an tebekadurioù a-zianouez Y o c'houzout $X = x_i$:

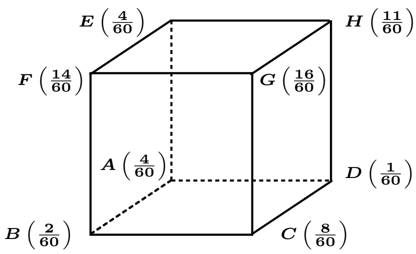
$$P(Y = y_i / X = x_i), \quad 0 \leqslant y_j \leqslant 3 - x_i.$$

Teurel evezh, mar fester $X = x_i$, e c'hoarvez an tebekadur a-zianouez eus tenn-adur $(3 - x_i)$ boull diouzh an isteskad amparet gant ar boulloù gwenn ha glas.

c) Sevel taolenn tebegoù an daouac'h (X, Y).

4.07 Adober ar boelladenn a-raok, an 3 boull o vezañ tennet hep azlakadur.

4.08 Ha dizalc'h a-vloc'h eo kevrannoù ar gwehanadur teirment savelet en derc'hennadur egorel amañ dindan ? Ha dizalc'h daou ha daou ez int ?



4.09 Desellout a reer an daou wehanadur X ha Y a zo o c'hendebekadur roet (un darn hepken) en daolenn amañ dindan :

X \ Y	-1	0	1	2
-2	$\frac{1}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{3}{40}$	
-1	$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{40}$		
0			$\frac{1}{40}$	$\frac{2}{40}$
1		$\frac{3}{40}$		$\frac{1}{40}$

Spisaat a reer ez eo unvan an tebekadurioù marzel, eleze ez int keittebek.

a) Klokaat an daolenn.

b) Ha dizalc'h eo X ha Y ?

4.10 Desellout a reer ar bondeskad $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o terc'hennañ bezusterioù keittebek an arnod dargouezhel teurel daou ziñs. Bezet X niver ar poentoù bet gant an diñs kentañ ha Y gant an eil.

a) Diskouez ez eo dizalc'h X ha Y.

b) Studiañ kendebekadur X ha $X + Y$; ha dizalc'h eo an daou wehanadur-se ?

4.11 En ur voest ez eus tri jedouer : unan du warnañ ar sifrenn 1, unan du warnañ ar sifrenn 2 hag unan gwenn warnañ ar sifrenn 1. Tennañ a reer ur jedouer kentañ, notañ ar sifrenn hag e adlakaat er voest. Tennañ a reer un eil, notañ ar sifrenn. Andigemmadus eo ar jedoueroù d'ar stekiñ.

Bezet an daou wehanadur :

- X = niver ar jedoueroù du tennet ;
- X = sammad ar poentoù.

a) Savelañ tebekadurioù marzel ar gwehanioù X ha Y.

b) Savelañ tebekadur ar sturiadell wehaniñ (X, Y).

c) Sevel taolenn debegoù ar c'hendebekadur. Ha dizalc'h eo an div gedrann X ha Y a'r sturiadell wehaniñ divvent ?

4.12 Bezet un daouac'h (X, Y) a wehanioù dizalc'h. Roet an dasparzhioù marzel X :

$$\left[\left(0, \frac{3}{10}\right), \left(1, \frac{4}{10}\right), \left(2, \frac{3}{10}\right)\right],$$

hag Y :

$$\left[\left(-1, \frac{2}{10}\right), \left(0, \frac{5}{10}\right), \left(1, \frac{1}{10}\right), \left(2, \frac{2}{10}\right)\right].$$

Savelañ taolenn debegoù ar gwehaniñ divvent.