3

Gwehanadur dargouezhel unvent

3.1 DESPIZADURIOÙ

3.1.1 Erouezadur ar meizad

Emeur aze er poent kej etre jedoniañ ha kantouezañ. Ar c'hantouezour a venn lakaat krap war an anadennoù dargouezhel emañ o studiañ. Pezh a vern evitañ ez eo embreger ar muzuliañ war ar bondeskad — an egor tebekaet — diouzh pezh zo perzhek en e zesell. E se e ray un dibab e-touez darvoudoù ar bondeskad : diouzh un tu ar re berzhek a vo derannet dezho ur muzul hag ar re all anperzhek a vo lezet a-gostez. A zo gwell : an darvoudoù perzhek a c'haller krouerian̄ e meur a zoare o tebarzh dezho muzulioù hervez durc'hadur ar studi a venner ren.

Seurt debarzh — a zo un dibarzh ivez — a vez graet *gwehaniñ dargouezhel* anezhañ. Pa na vez forc'hellegezh ebet ha sklaer an amgant e tremener hep an adanv *dargouezhel*. Sed aze ar meizad hag ar benveg jedoniel a gevaraez ober al liamm etre riñverezh an tebegoù (eleze studi an egorioù tebekaet evit savelañ an disoc'hoù bezus e-sell d'un arnod kantouezel da vezañ graet) hag ar stadegouriezh (eleze studi an disoc'hoù beziat e-sell da savelañ un delvan tebegouriel hag e arventennoù).

A se e vo jedoniekaet seurt gwezhiañ war ar bondeskad dre savelañ un arloadur eus ar bondeskad Ω war $\mathbb{R}$. Ouzh pep ω_i ag Ω e vo kevredet ur gwerc'hel x_i dre an arloadur anvet *gwehaniñ, gwehanadur*. Gant al lostger *-adur* e verker ar gwezh, hogen ivez an disoc'h anezhañ, eleze delvad ar bondeskad Ω dre ar gwehaniñ. Hag ivez : delvad an darvoud elfennel ω_i dre ar gwehaniñ zo ar *gwehanad* (dargouezhel) x_i.

EVEZHIADENN — En degouezh ma vez an darvoudoù elfennel ω_i (elfennoù Ω) gwerc'helion e c'haller o c'hemer alies da wehanadoù, ar gwehaniñ o vezañ neuze an arloadur aruniñ : poentoù bet o teurel un diñs, niver ar chanadoù e-doug un amzer bennak, niver ar glañvourion tizhet gant un naoued bennak e lies standilhon tennet eus ur boblañs, h.a.

A-wechoù e laz gouzout hag eñ zo ur perzh roet gant an darvoudoù pe get. Savelañ a reer *gwehanadur Bernoulli* dre arloiñ an darvoudoù dezho ar perzh war ar gwerc'hel 1 ha war 0 ar re n'o deus ket ar perzh. Seurt arloadur zo meneger ar perzh desellet, kevreizhenn naouus anezhañ.

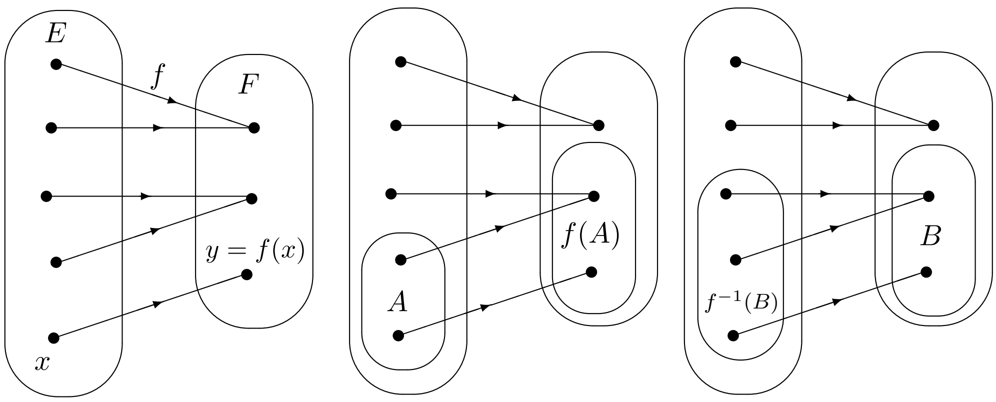
3.1.2 Kounaat keal an arloadur keveskemm

Rekis eo degas ar c'heal a arloadur keveskemm askouezhet da barzhioù un teskad. Mar roer un arloadur f eus un teskad E en un teskad F e c'haller askouezhañ an arloadur-se da deskadoù ar parzhioù eus E hag eus F en doaremañ :

Mar $A \subseteq E : f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A \text{ hag } y = f(x)\}$.

Mar $B \subseteq F : f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} = \{x \in E \mid \exists y \in B \text{ hag } y = f(x)\}$.

Ar parzh $f(A)$ a vez anvet delvad ar parzh A hag ar parzh $f^{-1}(B)$ delvad keveskemm ar parzh B. Sellout al lun amañ dindan :



Bezet bremañ un teskad diforzh E hag un arloadur f eus E da $\mathbb{R}$. Bezet un isteskad B eus $\mathbb{R}$. Delvad keveskemm B dre f zo teskad an elfennoù eus E a zo an delvadoù anezho elfennoù eus B :

$$f^{-1}(B) = \{x \mid x \in E \text{ hag } f(x) \in B\}.$$

Arveret e vo an notadurioù-mañ da heul :

$$\begin{aligned}
(f < x) &= f^{-1}\left(]-\infty, x[\right) \ ; \\
(f \leqslant x) &= f^{-1}\left(]-\infty, x]\right) \ ; \\
(f > x) &= f^{-1}\left(]x, +\infty[\right) \ ; \\
(f \geqslant x) &= f^{-1}\left([x, +\infty[\right) \ ; \\
(f = x) &= f^{-1}\left(\{x\}\right) \ ; \\
(x < f < y) &= f^{-1}\left(]x, y[\right) \ ; \\
(x \leqslant f < y) &= f^{-1}\left([x, y[\right) \ ; \\
(x < f \leqslant y) &= f^{-1}\left(]x, y]\right) \ ; \\
(x \leqslant f \leqslant y) &= f^{-1}\left([x, y]\right) \ ;
\end{aligned}$$

Kounaomp ouzhpenn, mard eo f un arloadur eus un teskad E d'un teskad F ha B_1 ha B_2 daou isteskad eus F, an daveadurioù-mañ da heul :

$$\begin{gathered}
f^{-1}\left(B_1 \cup B_2\right) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \ ; \\
f^{-1}\left(B_1 \cap B_2\right) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \ ; \\
B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \ ; \\
f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}\left(B\right)}.
\end{gathered}$$

Da skouer : $(f < x) \cap (f \geqslant y) = (y \leqslant f < x)$.

Teurel evezh n'he deus ket ar gevreizhenn f perzhioù ken eeun. Skrivañ ne c'haller ken :

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

3.1.3 Despizadur ar gwehaniñ dargouezhel

Bezet ur bondeskad Ω a zo an elfennoù anezhañ ω-où ha bezet $\mathcal{F}$ ur σ-aljebr a barzhioù eus Ω. Bezet ivez P an arloadur o kevrediñ ouzh nep A eus $\mathcal{F}$ e debegezh :

$$A \subseteq \Omega, A \in \mathcal{F} \quad \xrightarrow{P} \quad P(A) \in [0,1].$$

Bezet X un arloadur o kevrediñ ouzh pep elfenn ω eus ar bondeskad Ω ur gwerc'hel $X(\omega)$:

$$\omega \in \Omega \quad \overset{X}{\longmapsto} \quad X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Bezet A_x ar parzh eus Ω delvad keveskemm an entremez leddigor $]-\infty, x]$:

$$\omega \in A_x \iff X(\omega) \in \,]-\infty, x],$$

eleze :

$$\omega \in A_x \iff X(\omega) \leqslant x.$$

An arloadur X a vez anvet *gwehaniñ, gwehanadur* mard eo A_x enbeziat e $\mathcal{F}$ evit nep x. An amplegad-se (daou amplegad a vo ouzhpennet : b) ha c) amañ dindan) a dalvez da savelañ tebegezh nep entremez eus ar rezh $]-\infty, x]$ dre hantererezh P hag X^{-1}.

Da heul ez eo naouet ar gwehaniñ X dre an arloadur :

$$F : x \mapsto P(A_x)$$

a skrivomp ivez :

$$F(x) = P(A_x) = P\big(X(\omega \leqslant x)\big)$$

a rezhienner boas evel-henn :

$$\boxed{F(x) = P(X \leqslant x)},$$

a zezreveller evel henn : tebegezh an ω_i-où a zo o delvadoù dre an arloadur X bihanoc'h pe bar ouzh x, pe : tebegezh ez eo ar gwehanadoù (ar gwehanadur) bihanoc'h pe bar ouzh x.

Ar gevreizhenn F a vez anvet *kevreizhenn ingalañ* pe *kevreizhenn dasparzh dassammadel* pe c'hoazh *kevreizhenn dassammañ* ar gwehanadur X. Spisaomp c'hoazh : teskad G_X disoc'hoù bezus ar gwehaniñ X, eleze teskad delvadoù $X(\omega)$ elfennoù ω eus ar bondeskad Ω zo teskad gwerzhadoù X, eleze ar gwehanadoù.

E stern an despizadur-se eo dav notañ ez eo $F(b) - F(a)$ an debegezh kevredet ouzh an entremez $]a, b]$, serr a-zehou ha digor a-gleiz.

Da studiañ ar gwehanadur X e tiskouezer ned eo ket ret kenderc'hel da zaveiñ ent ezpleg d'ar bondeskad Ω, d'ar σ-aljebr amparet gant parzhioù Ω ha d'an tebekadur P o savelañ tebegezh ar parzhioù eus Ω elfennoù eus $\mathcal{F}$. Spirus eo ar gevreizhenn dassammañ F ha teskad ar gwehanadoù G_X da zezverkañ ar gwehanadur X.

Evit ma ve F ur gevreizhenn dassammañ e rank bastañ d'an amplegadoù-mañ da heul :

a) gavaelet eo he gwerzhadoù etre 0 hag 1 :

$$\forall x : 0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \ ;$$

b) kaout ar werzhad 1 evit $+\infty$:

$$x \to +\infty \Longrightarrow F(x) \to 1 \ ;$$

c) kaout ar werzhad 0 evit $-\infty$:

$$x \to -\infty \Longrightarrow F(x) \to 0 \ ;$$

d) bezañ angingresk :

$$x_2 \geqslant x_1 \iff F(x_2) \geqslant F(x_1) \ ;$$

e) bezañ kendalc'hek a-zehou :

$$F(x+\epsilon) \to F(x), \text{ mar } \epsilon \to 0^+,$$

a skriver dre gendivizad :

$$F(x+0) = F(x).$$

An amplegad *a*) a zispleger dre an devoud ez eo $F(x)$ un debegezh. Heñvel dra evit an amplegadoù *d*) hag *e*) :

$$x_2 \geqslant x_1 : F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X(\omega) \leqslant x_2) \geqslant 0,$$
$$\epsilon > 0 : F(x+\epsilon) - F(x) = P(x < X(\omega) \leqslant x+\epsilon) \to P(\emptyset) = 0, \text{ mar } \epsilon \to 0.$$

An amplegadoù *b*) ha *c*) a dalvez ez eo mannel an tebegoù kevredet ouzh ar poentoù $-\infty$ hag $+\infty$:

$$\begin{aligned} &P(X(\omega) \leqslant x) \to 0 \quad \text{mar} \quad x \to -\infty, \\ &P(X(\omega) \leqslant x) \to 1 \quad \text{mar} \quad x \to +\infty \end{aligned}$$

An daou amplegad-se zo kendivizadoù evit gwir. Merzhout ne c'hell ket ar gevreizhenn F bezañ kendalc'hek a-gleiz :

$$F(x) - F(x-\epsilon) = P(x-\epsilon < X(\omega) \leqslant x)$$

ha mar tenn ϵ war-du mann dre werzhadoù muiel :

$$F(x) - F(x-\epsilon) \to P(X(\omega) = x) \geqslant 0$$

a skriver dre gendivizad :

$$F(x) - F(x-0) = P(X = x).$$

E se ned eo ar gevreizhenn kendalc'hek a-gleiz er poent x nemet mard eo mannel an debegezh $P(X = x)$: un hevelep poent a vez graet poent a gendalc'hegezh F anezhañ.

Darbenn a reomp ez eo spirus an amplegadoù a) hag e) evit ma ve F kevreizhenn dassammañ ur gwehanadur.

Hervez natur ar gevreizhenn F ha hini teskad ar gwehanadoù G_X e tigemmer tri rizh diazez a wehanadurioù : ar rizh arskarek (bevennek pe anvevenn eriñvadus eo teskad ar gwehanadoù), ar rizh dirgendalc'hek, ar rizh kendalc'hek dibarek.

EVEZHIADENN 1 — Mard eo Ω bevennek (pe eriñvadus) ez eo $X(\Omega)$ bevennek (pe eriñvadus). Hogen $X(\Omega)$ a c'hell bezañ bevennek hep ma ve bevennek Ω. Da skouer ar gwehanadur meneger $\mathcal{B}_A$ savelet war un isteskad roet A eus Ω dre ar parderioù :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_A(a) &= 1 \quad \text{mar} \quad a \in A. \\ \mathcal{B}_A(a) &= 0 \quad \text{mar} \quad a \notin A. \end{aligned}$$

Merzhout ivez ez eus lies rizh a wehanadurioù nag arskarek na kendalc'hek, da skouer ar re a zo ar gwehanadoù :

$$X(\Omega) = \mathbb{Z}, \quad X(\Omega) =]a, +\infty[, \quad X(\Omega) = \mathbb{N} \cup [a, b], \quad X(\Omega) = \mathbb{Q} \cap [a, b], \ldots$$

EVEZHIADENN 2 — Gwelet hon eus penaos ez arverer an arloadur keveskemm da debekaat ar gwehanadoù. Dav pouezañ war ur c'hraf : bez' ez eus atav eus an arloadur keveskemm evit ar parzhioù, hep ma ve ret d'an arloadur rageeun bezañ kesaezhat. Eilskrivomp amañ despizadur ar gwehaniñ :

Roet ur bondeskad Ω tebekaet gant an tebekadur P, graet e vez gwehaniñ (gwehanadur) gwerc'hel war an egor-se eus nep arloadur X adalek Ω en $\mathbb{R}$ (pe en ur parzh eus $\mathbb{R}$) :

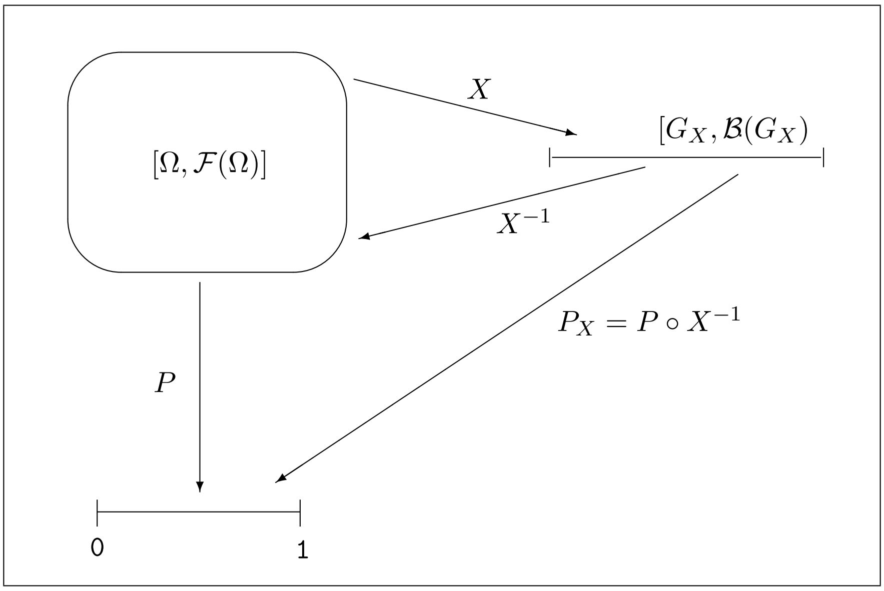
$$X : \omega \in \Omega \ \longmapsto \ X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

3.1.4 Tebekaat ur gwehanadur

Mard eo $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$ tebekaet gant P, arloadur tebekaat eus $\mathcal{F}(\Omega)$ da $[0,1]$ ez eo an egor $(G_X, \mathcal{B}(G_X))$ tebekaet dre an arloadur eus $\mathcal{B}(G_X)$ da $[0,1]$, notet P_X, savelet dre : $P_X = P \circ X^{-1}$.

Neuze : $P_X(B) = P(X^{-1}\langle B \rangle)$.

Pe c'hoazh : $P_X(B) = P(\omega \mid X(\omega) \in B)$.



EVEZHIADENN

- An daveadur X^{-1} eus G_X da Ω a savel un arloadur eus $\mathcal{B}(G_X)$ da $\mathcal{F}(\Omega)$.

• An arloadur P_X zo un tebekadur war $(G_X, \mathcal{B}(G_X))$. E gwir :

$$P_X(G_X) = P(X^{-1}\langle G_X\rangle) = P(\Omega) = 1.$$

Ne vern ar parzhioù B_1, B_2 eus G_X mard eo goullo $B_1 \cap B_2$, neuze ez eo goullo $X^{-1}\langle B_1\rangle \cap X^{-1}\langle B_2\rangle$. Da neuze :

$$\begin{aligned} P_X(B_1 \cup B_2) &= P\big(X^{-1}\langle B_1 \cup B_2\rangle\big) = P\big(X^{-1}\langle B_1\rangle \cup X^{-1}\langle B_2\rangle\big). \\ &= P\big(X^{-1}\langle B_1\rangle\big) + P\big(X^{-1}\langle B_2\rangle\big). \end{aligned}$$

Alese :

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset \Longrightarrow P_X(B_1 \cup B_2) = P_X(B_1) + P_X(B_2).$$

Bezet G_X un teskad gwerc'helion bevennek $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ ma'z eo pep x_i delvad un darvoud elfennel ω_i eus un egor tebekaet bevennek dre an arloadur (ar gwehaniñ) X :

$$\omega_i \ \mapsto \ X(\omega_i), \quad \text{hag} \quad X(\omega_i) = x_i.$$
$$P_X(x_i) = P\big(X^{-1}(x_i)\big) = P(\omega_i \mid X(\omega_i) = x_i).$$

Skrivañ a reer boas tebegezh an darvoud amparet gant an ω_i-où, hevelep ma'z eo $X(\omega_i) = x_i$:

$$\boxed{P(X = x_i)}.$$

Merzhout mat ez eo $X = x_i$ un darvoud eus Ω. An notadur-se a gevaraez embreger en $\mathbb{R}$ — war-bouez ar gwehanadur X — tebegoù a-gentouez savelet war Ω. Disoc'h a ra dre se gant tebekaat ar gwehanadur.

Despizadur — Ar reollunioù :

$$P_X(x) = P(X = x),$$
$$F(x) = P_X\big(]-\infty, x]\big) = P(X \leqslant x)$$

a savel a-getep *kevreizhenn debekaat* (*tebekadur*) P_X ar gwehanadur ha *kevreizhenn dassammañ* F (pe *kevreizhenn dasparzh dassammadel*) ar gwehanadur. Hollad an daouac'hoù (x_i, p_i) gant $p_i = P(X = x_i)$ a reer anezhañ *dasparzh* ar gwehanadur.

P_X o vezañ mannel e-maez $X(\Omega)$, rak :

$$x \notin X(\Omega) \implies (X = x) = \emptyset,$$

e tespizer a-wechoù P_X evel un arloadur eus $X(\Omega)$ etrezek an entremez $[0, 1]$.
Heñvel dra, mard eo $X(\Omega)$ un entremez serr $[a, b]$ e tespizer a-wechoù F war an entremez-se hepken.

EVEZHIADENN — Aozerion 'zo a ro :

$$\begin{aligned} & F(x) = P(X < x) \\ \text{ha n'eo ket} \quad & F(x) = P(X \leqslant x). \end{aligned}$$

An diforc'h etre an div gevreizhenn zo :

$$P(X \leqslant x) - P(X < x) = P(X = x).$$

3.1.5 Egor sturiadel ar gwehanadurioù dargouezhel

3.1.5.1 Kevreizhenn wehanadur

Dezren a reer : mard eo φ ur c'hesaezhadur niverel ez eo an arloadur kediat

$$Y = \varphi \circ X \quad \text{a noter ivez} \quad Y = \varphi(X)$$

ur gwehanadur ivez.
Lavarout a reer ez eo $Y = \varphi(X)$ ur c'hemm gwehanadur pe un *azgwehaniñ*.

E se ez eo $Y = aX + b$ ur c'hemm gwehanadur o savelañ Y diwar X.

3.1.5.2 Sammad daou wehanadur

Mard eo X ha Y daou wehanadur war an un egor tebekadus e tezreer ez eo

$$\begin{aligned} \text{ar sammad} \quad & X + Y \\ \text{al liesâd} \quad & XY \end{aligned}$$

daou wehanadur war an egor tebekadus-se.
An disoc'h kent a c'hell bezañ askouezhet d'un niver bevennek diforzh a wehanadurioù war an egor tebekadus $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$.

3.1.5.3 Egor sturiadel ar gwehanadurioù dargouezhel

Diwar pezh zo amañ diaraok, mard eo X_1 hag X_2 daou wehanadur war an un egor tebekadus ez eo ivez $X_1 + X_2$ hag αX_1 daou wehanadur war an egor-se.

Da neuze ez eo teskad ar gwehanadurioù war $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ un isegor sturiadel eus egor sturiadel an arloadurioù eus Ω da $\mathbb{R}$.

Notomp ivez, mard eo X_1 hag X_2 daou wehanadur war an un egor tebekadus $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$, ez eo heñvel dra evit X_1 -X_2 hag $X_1 \times X_2$.

Da neuze ez eo teskad ar gwehanadurioù war $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ un isgwalenn eus gwalenn an arloadurioù eus Ω da $\mathbb{R}$. An isgwalenn-se zo strollatat hag unanek.

Diskouez a reer ivez en deus teskad ar gwehanadurioù war $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ — dezhañ ar sammadur, al liesadur dre ur gwerc'hel (niñvadur diavaez), al liesadur (niñvadur diabarzh) — ul luniadur a aljebr.

Ouzhpenn se, diskouez a reer ez eo an daveadur savelet dre :

$$X \leqslant Y \iff X(\omega) \leqslant Y(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

un daveadur urzhiañ, o pourveziñ dre se an aljebr gant ul luniadur treilh.

3.1.6 Tebekter regel keitat war un entremez

Dre zedalvout aksiomenn an tebegoù hollel da gembodadur darvoudoù disparti:

$$]-\infty, a] \cup]a, b] =]-\infty, b]$$

e teu :

$$F(a) + P(a < X \leqslant b) = F(b)$$

alese :

$$\boxed{P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)}\,.$$

• Tebekter regel keitat

Graet e vez tebekter regel keitat an darvoud $(a < X \leqslant b)$ eus ar c'heñver

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

EVEZHIADENN

Bezet X ur gwehanadur war an egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$ hag ar c'hemm gwehanadur $Y = \varphi(X)$ ma'z eo φ ur c'hesaezhadur niverel gant $\varphi(X) = \varphi \circ X$. Kevreizhenn dassammañ Y, notet $H(y)$ zo :

$$\forall y \in \mathbb{R} \; ; \; H(y) = P(Y \leqslant y) = P(\varphi(X) \leqslant y).$$

Un degouezh dibarek zo $Y = aX + b$. Savelomp H mard eo $a > 0$:

$$H(y) = P(Y \leqslant y) = P(aX + b \leqslant y) = P\left(X \leqslant \frac{y-b}{a}\right)$$

pe, oc'h aroueziñ kevreizhenn dassammañ X dre F :

$$\boxed{H(y) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)}.$$

EVEZHIADENN

Ar goulun-mañ da heul a dalvez da gounañ ez engwerc'h ar gevreizhenn dasparzh en ur ser ar c'healioù a debegezh hag a wehanadur :

$$\boxed{(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)) \quad \begin{Bmatrix} \mathcal{F}(\Omega) & \xrightarrow{P} & \mathbb{R} \\ \Omega & \xrightarrow{X} & \mathbb{R} \end{Bmatrix} \quad F(x) = P(X \leqslant x)}.$$

3.2 Gwehanadur dargouezhel arskarek

3.2.1 Tebekadur ha kevreizhenn dassammañ

Ur gwehanadur X a lavarer arskarek mard eo $a)$ bevennek niver e werzhadoù bezus :

$$G_X = X(\Omega) = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k),$$

o c'houzout ez eo an niveroù $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ urzhiet dre gendivizad :

$$x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_k,$$

pe mard eo $b)$ anvevenn eriñvadus niver e werzhadoù.

En daou zegouezh-se e c'hell teskad ar gwehanadoù c'hoarvezout eus un anvevennad unek a werzhadoù, pe un anvevennad daouek, un anvevennad liesek a werzhadoù. Neoazh en darn vrasañ eus ar skoueriοù e vo teskad ar gwehanadoù eus unan a'n daou rizh-mañ :

- anvevennad unek a werzhadoù a c'haller urzhiañ war gresk hervez ar meneg i :

$$G_X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots),$$

gant

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots ;$$

- anvevennad daouek a werzhadoù a c'haller urzhiañ war gresk hervez ar meneg i :

$$G_X = (\ldots, x_{-i}, \ldots, x_{-1}, x_1, \ldots, x_i, \ldots),$$

gant

$$\ldots < x_{-i} < \ldots < x_{-1} < x_1 < \ldots < x_i < \ldots$$

Kevreizhenn dassammañ F ur gwehanadur arskarek zo ur gevreizhenn war bazinier o tiskouez lammoù er poentoù a ledenn x_i.

SKOUER

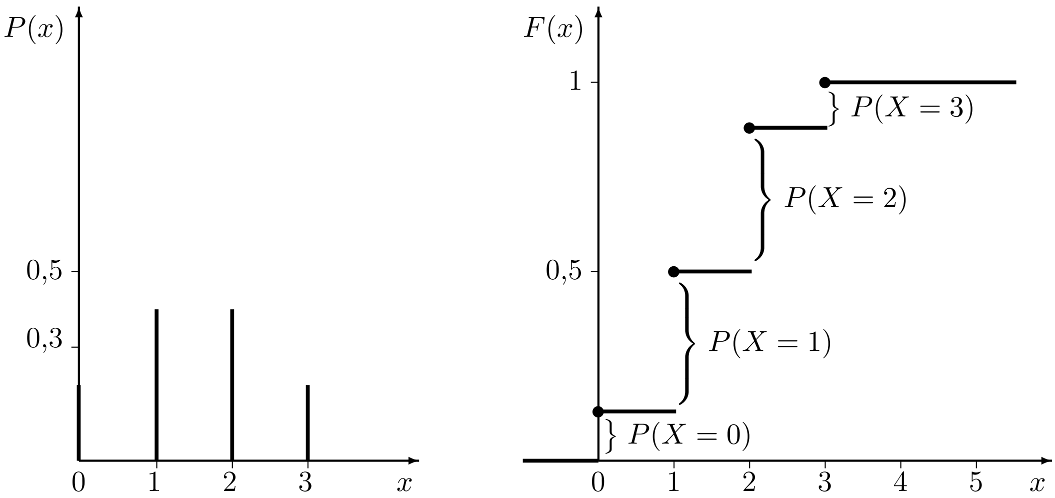
Teurel a reer tri fezh moneiz ha gounit a reer niver ar c'hroazioù en Euroioù. E se e kevreder ouzh pep darvoud elfennel un niver gwerc'hel o savelañ ur gwehanadur enta. Ar bondeskad Ω a zo e zelvadoù dre X :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Un daolenn a c'haller sevel enta :

Gwerzhadoù x_i X	0	1	2	3
Tebegoù $p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x) = P(X \leqslant x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

Sed amañ dindan derc'hennadurioù kevregat a-zehou kevreizhenn dasparzh hag a-gleiz kevreg a-vizhier ar gwehanadur X :



Evit nep $x \in \mathbb{R}$ e c'haller jediñ an debegezh :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_k \leqslant x} P(X = x_k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da skouer :

$$P(X \leqslant 2,5) = P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{7}{8}.$$

Kevreizhenn dassammañ F ur gwehanadur arskarek X zo ur gevreizhenn war bazinier war gresk unton eus mann betek unan. Lammoù $p_k = P(X = x_k)$ a c'hoarvez er poent x_k eus teskad ar gwehanadoù. Er poent-se ez eo gwerzhad ar gevreizhenn par da werzhad ar bazenn uhelañ :

$$F(x_k) - F(x_k - 0) = P(X = x_k) = p_k.$$

A-gleiz d'ar werzhad vihanañ ez eo $F(x)$ par da vann, tra ma'z eo par da unan a-zehou d'ar werzhad vrasañ. Evel diskouezet war an derc'hennadur kevregat e c'haller savelañ dasparzh an tebegoù diwar ar gevreizhenn dassammañ. Teskad an tebegoù a c'hoarvez eus al lammoù.

Evit nep gwehanadur arskarek ez eus evit $a < b$:

$$\begin{aligned}
&P(X > a) = 1 - F(a);\\
&P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a);\\
&P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b);\\
&P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) + P(X = a);\\
&P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b).
\end{aligned}$$

3.2.2 Skouerioù a wehanadurioù arskarek

3.2.2.1 Gwehanadur kaougant pe arstalek

Bez' ez eo un arloadur arstalek a wehanad x_k eus ω da $\mathbb{R}$. da neuze :

$$(X = x_k) = \Omega \text{ ha } P(X = x_k) = 1.$$

3.2.2.2 Gwehanadur peuzkaougant

Ur gwehanadur arskarek eo a zo e zelvadoù (ar gwehanadoù):

a) x_k gant an debegezh 1,

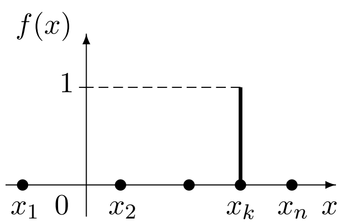
b) gwerzhadoù all gant an debegezh 0.

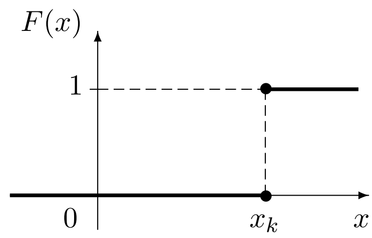
• **kevreizhennoù tebekaat ha dasparzh :**

Gwehanadoù x	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
Tebegoù $P(X = x)$	0	0	$\dots$	1	$\dots$

x	$-\infty$	x_k	$+\infty$
$F(x)$	0	0	1

• **Kevregadoù an div gevreizhenn :**





3.2.2.3 Gwehanadur meneger pe gwehanadur Bernoulli

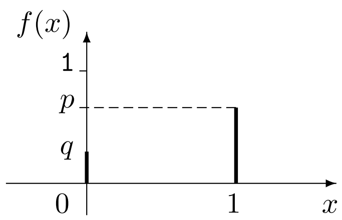
Graet e vez gwehanadur meneger an darvoud A eus an arloadur X_A a zo e zelvadoù : 1 evit nep elfenn ω eus A gant an debegezh p ; 0 evit nep elfenn eus $\overline{A}$ gant an debegezh $q = 1 - p$.

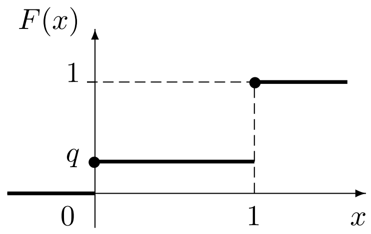
• kevreizhennoù tebekaat ha dasparzh :

Gwehanadoù x	1	0
Tebegoù $P(X = x)$	p	q

x	$-\infty$	0	$0 < x < 1$	1	$+\infty$
$F(x)$	0	q	q	1	1

• Kevregadoù an div gevreizhenn :





3.2.2.4 Gwehanadur unvan

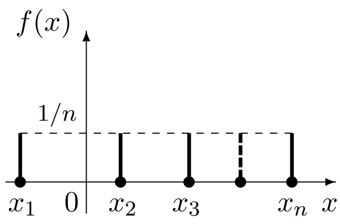
Ur gwehanadur unvan zo ur gwehanadur dezhañ gwerzhadoù anpar keittebek $x_1, x_2, \ldots, x_n$. E se ez eo dasparzhet a-unvan an debegezh hollel $P(X\langle\Omega\rangle) = 1$ war an holl werzhadoù.

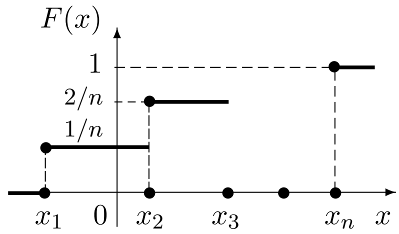
• kevreizhennoù tebekaat ha dasparzh :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

x	$-\infty$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_3$	x_3	$\ldots$	$+\infty$
$F(x)$	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\ldots$	1

• **Kevregadoù an div gevreizhenn :**





EVEZHIADENN — Evit aozerion 'zo ez eo ur gwehanadur unvan un degouezh dibarek eus an hini despizet amañ diaraok :

x_i	1	2	3	...	n
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

3.3 Gwehanadur dargouezhel dirgendalc'hek

3.3.1 Kevreizhenn *F* dirgendalc'hek

Ur gevreizhenn F savelet war $\mathbb{R}$ a lavarer dirgendalc'hek, mmard eus ur gevreizhenn f hevelep ma'z eo :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

3.3.2 Despizadur ar gwehanadur dirgendalc'hek

Ur gwehanadur X zo dirgendalc'hek, mmard eo dirgendalc'hek e gevreizhenn dasparzh

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Ar gevreizhenn f a vez anvet tebekter regel ar gwehanadur X.

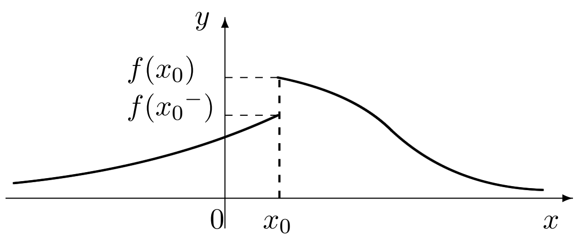
Perzhioù

• Ar gevreizhenn dassammañ o vezañ kengresk e c'haller dezren ez eo f muiel pe vannel.

• Ar gevreizhenn dassammañ F zo kendalc'hek a-zehou hag a-gleiz ha diarroud-adus eo a-zehou hag a-gleiz (nemet e poentoù 'zo). Al liesañ e vez par an diar-roudenn a-gleiz hag a-zehou evit nep $x \in G_X$. Da neuze eo G_X — teskad ar gwehanadoù — un entremez pe ur c'hembodadur entremezioù, eleze un teskad poentoù eus $\mathbb{R}$ dezhañ goulud an didorr hag un hed anvannel. Bez' ez eus enta :

$$F'(x) = f(x).$$

3.3.3 Amveziadoù spirus evit ma ve f un tebekter



Mard eo ur gevreizhenn f :

1. muiel pe vannel,
2. kendalc'hek a-dammoù,
3. he sammegenn war deskad G_X ar gwehanadoù zo par da 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1,$$

e wirier ez eo ar gevreizhenn F savelet dre

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

kevreizhenn dassammañ ur gwehanadur dirgendalc'hek. A se ez eo f un tebekter regel.

EVEZHIADENN

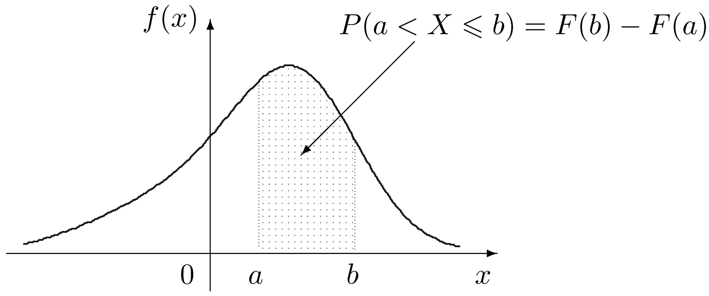
a) Mard eo G_X un entremez anvevenn e hed e tenn $f(x)$ war-du mann pa bella ent anvevenn x war G_X ;
b) mard eo anvevenn $f(x_0)$, ar sammegenn

$$F(x) = \int_{x_0-a}^{x_0+b} f(x)\,dx, \quad a, b > 0 \quad [x_0 - a, x_0 + b] \in G_X$$

a denn war-du mann pa denn a ha b war-du mann ent dizalc'h.

3.3.4 Tellun ar gwehanadur

Graet e vez *tellun* ar gwehanadur X eus krommenn derc'hennañ e debekter f : ar gorread loet dindan an tellun zo par da 1 hag an debegezh kevredet ouzh an entremez $[a, b]$ zo par d'ar gorread loet etre an tellun, ahel al ledennoù, an eeu:



$$\boxed{P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Tebegezh en ur poent

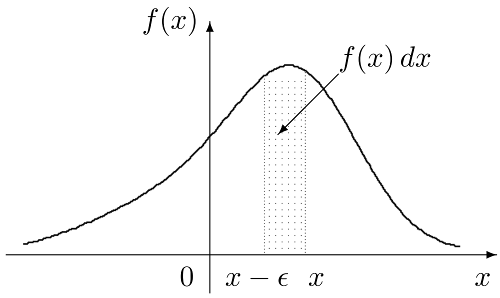
An debegezh elfennel zo an elfenn orgemmel $f(x)\,dx$. Evit ur gwehanadur dirgendalc'hek ez eo an debegezh en ur poent par da vann:

$$P(X = x) = 0.$$

Pa denn ϵ war-du mann e teu an domani louet da vezañ ur regenn eeun, he gorread par da vann. E gwir :

$$\begin{aligned} (X = x) &\subseteq (x-\epsilon < X \leqslant x) \quad (\epsilon > 0)\,; \\ 0 \leqslant P(X = x) &\leqslant P(x-\epsilon < X \leqslant x), \\ &\leqslant P(X \leqslant x) - P(X \leqslant x-\epsilon), \\ &\leqslant F(x) - F(x-\epsilon). \end{aligned}$$

O vezañ ma'z eo kendalc'hek ar gevreizhenn F e stader e tenn ar c'hementad-se war-du mann pa denn ϵ war-du mann, pezh a dalvez : $P(X = x) = 0$.



Da heul ez eo mannel an debegezh kevredet ouzh un teskad bevennek pe anvevenn eriñvadus a boentoù eus teskad ar gwehanadoù G_X, dre berzh aksiomenn ar tebegoù hollel.

Teurel evezh ivez, o vezañ ma'z eo mannel an debegezh kevredet ouzh ur poent eus G_X :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b).$$

SKOUER

Dibab a reer dre zargouezh ur poent war ar regenn eeun $[0,1]$: bezet X ar gwehanadur o kevrediñ ouzh pep poent M e ledenn x. E se ez eus : $X(M) = x$ ha teskad ar gwehanadoù zo an entremez $[0,1]$:

$$G_X = [0,1].$$

Pep poent M eus an entremez-se zo dezhañ un debegezh mannel. E gwir, dre arbennoù a gemparzh, pep poent zo dezhañ an un debegezh hag o vezañ ma'z eus un anvevennad poentoù dezho an debegezh hollel 1, ez eo mannel tebegezh pep poent.

Derannañ a reer da bep entremez un debegezh kenfeuriek ouzh e hed :

$$P(a < X < b) = k(b - a) \quad \text{mar} \quad 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1.$$

An arstalenn k zo par da 1 o vezañ ma'z eo tebegezh an entremez $[0, 1]$ en e bezh par da 1 :

$$P(0 < X < 1) = k(1 - 0) = 1.$$

Alese :

$$P(X \leqslant x) = x \quad \text{mar} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

ha da heul ez eo ar gevreizhenn dassammañ F :

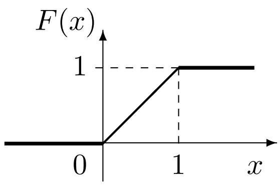
$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{mar} \quad x \leqslant 0, \\ F(x) = x & \text{mar} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ F(x) = 1 & \text{mar} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

E se ez eo ar gwehanadur X eus ar rizh dirgendalc'hek. An tebekter regel f zo par da 0 pe 1 :

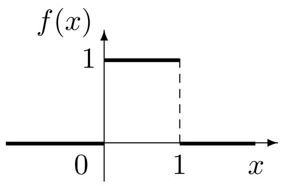
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{mar} \quad x < 0, \\ f(x) = 1 & \text{mar} \quad 0 < x < 1, \\ f(x) = 0 & \text{mar} \quad x > 1. \end{cases}$$

Ankendalc'hek eo f er poentoù $x = 0$ ha $x = 1$.

Ar gwehanadur X emaomp o paouez savelañ a reer anezhañ *gwehanadur kendalc'hek unvan* war an entremez $[0, 1]$, aroueziet $\mathcal{U}(0, 1)$. E grommenn dassammadel hag e dellun a zerc'hennomp amañ dindan :



Kevreizhenn dassammañ $\mathcal{U}(0, 1)$



Tellun $\mathcal{U}(0, 1)$

3.4 Gwehanadur dargouezhel kemmesk

Diwar an daou rizh gwehanadurioù emaomp o paouez gwelout e c'haller savelañ gwehanadurioù kemmesk : X zo ur gwehanadur kemmesk mard eo e gevreizhenn dassammañ F e rezh :

$$F(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda)F_2(x),$$

ma'z eo F_1 ha F_2 kevreizhennoù dasparzh daou wehanadur, an eil X_2 eus ar rizh kendalc'hek hag egile F_1 eus ar rizh arskarek, ha λ ur gwerc'hel gavaelet etre 0 hag 1.

Mard eo G_1 ha G_2 teskad gwehanadoù X_1 ha X_2 ez eo teskad gwerzhadoù ar gwehanadur X :

$$G_X = G_1 \cup G_2$$

hag o vezañ ma'z eo tebegezh pep poent eus G_2 par da vann :

$$P(X \in G_1) = \lambda,$$
$$P(X \in G_2 \cap \overline{G_1}) = 1 - \lambda.$$

Ar gwehanadur X-se a c'hell bezañ deveizet evel par da X_1 gant an debegezh λ ha par da X_2 gant an debegezh $1 - \lambda$.

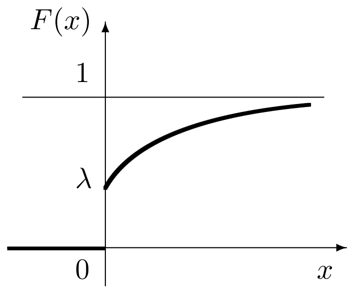
Kel zo a wehanadurioù kemmesk pa glasker deskrivañ gedvezhioù. E se ar gedvezh ouzh ur draf a c'hell bezañ mannel (tebegezh λ), mar bez dieub an draf pa zeu an arval, ha pa na vez ket mannel (tebegezh $1 - \lambda$) e c'hell ar gedvezh bezañ dasparzhet ent kendalc'hek etre 0 hag ∞. En degouezh-se ez eo X_1 ar gwehanadur kaougant par da 0 gant an debegezh 1 hag X_2 zo ar gwehanadur muiel gedvezh pa vez gedal evit gwir. Da skouer :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{mar} \quad x \leqslant 0, \\ F(x) = 1 - (1 - \lambda)\mathrm{e}^{-px} & \text{mar} \quad x > 0, \end{cases}$$

λ ha p o vezañ div arstalenn o vastañ da :

$$p \leqslant \lambda \leqslant 1,$$
$$p > 0.$$

Sed amañ dindan derc'hennadur kevregat ar gevreizhenn dassammañ :



3.5 Gwehanadurioù dargouezhel kendalc'hek dibarek

Damkanel hepken eo deur seurt gwehanadurioù. Ur gwehanadur zo kendalc'hek dibarek mard eo e gevreizhenn dassammañ kendalc'hek a-zehou, hep bezañ diarroudadus (ar gendalc'hegezh zo ret hogen anspirus evit ma ve diarroudadus ar gevreizhenn). Teskad G_X gwerzhadoù X (ar gwehanadoù) zo neuze un teskad e hed par da vann, dezhañ goulud an didorr avat.

Dre zedalvout delakadenn Lebesgue evit a sell ar c'hevreizhennoù argemmoù bonnet e tezreer e c'hell nep kevreizhenn dassammañ bezañ digenaozet en un doare unel :

$$F(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \lambda_3 F_3(x),$$

ma'z eo F_1, F_2, F_3 kevreizhennoù dasparzh gwehanadurioù a-getep : arskarek, dirgendalc'hek, kendalc'hek dibarek ha λ_1, λ_2, λ_3 tri gwerc'hel muiel pe vannel o sammad par da 1.

Ar gwehanadurioù arskarek a glot ouzh $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ar gwehanadurioù dirgendalc'hek ouzh $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, hag ar gwehanadurioù kemmesk gant $\lambda_3 = 0$.

POELLADENNOÙ

3.01 Un egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$ hag ur gwehanadur X war $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ o vezañ roet, diskouez ez eo an arloadur P_X savelet war $G_X = X(\Omega)$ dre :

$$\forall B \in G_X, \quad P_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big)$$

un tebekadur war G_X.

3.02 Bezet ar gwehanadur T dezhañ ar gwerzhadoù 1 ha 0 gant an tebegoù ketep $\frac{1}{4}$ ha $\frac{3}{4}$.

a) Taolenn ha kevregad ar gevreizhenn debekaat.

b) Taolenn ha kevregad ar gevreizhenn dassammañ.

3.03 Teurel a reer daou bezh moneiz eorizhek ha savelañ a reer ar gwehanadur K dezhañ da werzhadoù niver ar c'hroazioù diwar an taol-se.

Savelañ kevreizhennoù tebekaat ha dasparzh ar gwehanadur-se. Tresañ ar c'hevregadoù.

3.04 Bezet ar gevreizhenn f savelet dre :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{evit} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{evit} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{evit} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Dezren ez eo f un tebekter regel e nep poent ma'z eo kendalc'hek.

b) Savelañ ar gevreizhenn dassammañ keñverek.

3.05 En un arc'h ez eus 10 boull niverennet eus 0 da 9. Tennañ a reer dre zargouezh ur voull ha notañ he niverenn.

a) Savelañ an egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$ hag ar gwehanadur eus Ω da $\mathbb{R}$ a gevaraez trennañ an arnod dargouezhel.

b) Tresañ kevregad kevreizhenn dassammañ X.

3.06 Bezet an egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$ o klotañ ouzh taol ur pezh moneiz eorizhek. War Ω e saveler daou wehanadur X_1 hag X_2 dre :

X_i \ ω_i	Pil	Kroaz
X_1	1	-1
X_2	-1	1

Keñveriañ kevreizhennoù dasparzh X_1 hag X_2.

3.07 En un arc'h ez eus 10 boull niverennet eus 0 da 9 andigemmadus d'ar stekiñ. Tennañ a reer 2 voull war un dro hep o lakaat en arc'h goude ha desellout a reer ar gwehanadur X a gevred ouzh pep tennadenn an hini vihanañ eus an div niverenn :

a) Savelañ kevreizhenn debekaat X.

b) Sevel kevregad kevreizhenn dassammañ X.

c) Jediñ tebegezh an darvoudoù da heul:

$$A = (X < 5), \qquad B = (X \leqslant 3), \qquad C = (1 \leqslant X \leqslant 6)$$
$$D = (X \geqslant 7), \qquad E = (|X - 5| > 2), \qquad G = (X^2 - 5X + 4 < 0).$$

3.08 Un diñs eorizhek en deus war dri zal un 1, daou dal gant un 2 hag un tal gant un 3. E deurel a reer div wech da heul ha desellout a reer ar gwehanadur X o kevrediñ ouzh pep tennadenn sammad ar poentoù bet da-geñver pep hini eus an daou daol.

Reiñ kevreizhennoù tebekaat ha dasparzh ar gwehanadur X.

3.09 En ur gasadenn dek traezad ez eus pevar gant ur si. Tennañ a reer pevar a draezadoù dre zargouezh ha desellout a reer ar gwehanadur X o reiñ niver an traezadoù siek er standilhon tennet.

a) Savelañ kevreizhennoù tebekaat ha dasparzh X.

b) Jediñ $P(X > 0)$ ha $P(X \leqslant 2)$.

3.10 Ar gwehanadur X a zeskriv sammad an talioù uhelañ pa daoler daou ziñs eorizhek.

a) Savelañ kevreizhenn tebekaat X ha tresañ ur c'hevregad anezhi.

b) Savelañ kevreizhenn dassammañ X ha tresañ ur c'hevregad anezhi.

3.11 Teskad gwerzhadoù ar gwehanadur X zo :

$$G_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Evit nep $k \in G_X$ en hon eus $P(X = k) = a \cdot k^2$, a o vezañ un arstalenn.

a) Savelañ an arstalenn a.

b) Jediñ $P(X \leqslant 4)$; $P(X > 8)$; $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

3.12 Diskouez ez eo ar gevreizhenn F savelet dre :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{evit} \quad x < 0 \\ 1 & \text{evit} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

ur gevreizhenn dassammañ.

3.13 n den a ya e-barzh ur saverez el live 0 eus un adeilad ennañ k solieradur. Goulakaat a reer ez eus gant pep den an debegezh unvan $1/k$ (dizalc'h diouzh an dud all) da vont er-maez en ur solieradur pe unan all. N'eus den ouzhpenn o pignat er saverez a hent all.

Bezet j un niver diforzh etre 1 ha k. Pe debegezh eo e chomfe ar saverez a-sav er solieradur j ?

3.14 Teurel a reer daou ziñs ha notañ X_1 hag X_2 ar gwehanadurioù niver ar poentoù.

Bezet $Z = \max(X_1, X_2)$. Savelañ tebekadur Z.