# 2

# Egorioù tebekaet.
# Tebekadur

## 2.1 EGOR TEBEKAET BEVENNEK

### 2.1.1 Egorioù tebekadus bevennek

Graet e vez egor tebekadus bevennek eus nep daouac'h $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ ma'z eo $\Omega$ un teskad bevennek angoullo ha $\mathcal{F}(\Omega)$ ur familh angoullo a barzhioù eus $\Omega$, kloz war $\Omega$ evit ar c'hlokadur hag ar c'hembodadur.
Eleze :

$$\forall A, A \in \mathcal{F},\ \overline{A} \in \mathcal{F}.$$
$$\forall A, \forall B, (A, B) \in \mathcal{F}^2,\ A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Alese e tezreer ez eo kloz $\mathcal{F}(\Omega)$ evit ar c'henskejadur. E gwir :

$$\forall A, \forall B, (A, B) \in \mathcal{F}^2, \quad \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}.$$

Ha dre glokadur :

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}.$$

### 2.1.2 Tebekadur war un egor tebekadus bevennek

Bezet $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ egor tebekadus bevennek savelet dre $\Omega$ hag ar familh $\mathcal{F}$, ha bezet $P$ un arloadur adal $\mathcal{F}(\Omega)$ da $\mathbb{R}^+$.

Notañ a reer $P(A)$ delvad nep parzh $A$ eus ar bondeskad $\Omega$, elfenn eus $\mathcal{F}$ dre an arloadur $P$ :

$$A \mapsto P(A).$$

Lavarout a reer e pourvez an arloadur $P$ an egor tebekadus $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ gant un tebekadur. E gerioù all e tebekaer $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega)\big)$ dre an arloadur $P$, gant ma vastfe $P$ d'an div aksiomenn-mañ da heul:

- Aksiomenn 1 : $P(\Omega) = 1$.

- Aksiomenn 2 (sammadezh) :

$$\boxed{\forall A, \forall B, (A, B) \in \mathcal{F}^2,\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)}\ .$$

An driac'h $\big(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P\big)$ a reer egor tebekaet bevennek anezhi.

### 2.1.3 Perzhioù

#### 2.1.3.1 ăDarvoud kontrol

$$\boxed{\forall A, A \in \mathcal{F},\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)}\ .$$

Ent dibarek : $P(\emptyset) = 0$

#### 2.1.3.2 Gwerzhadoù an tebekadur *P*

$$\forall A, \forall B, (A, B) \in \mathcal{F}^2,\ A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B).$$

Da heul ez eus evit nep $A$ eus $\mathcal{F}$ :

$$\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1}\ .$$

Nep tebekadur war $(\Omega, \mathcal{F})$ zo un arloadur adal $\otimes$ d'an entremez $[0, 1]$. Delvad $A$ — notet $P(A)$ — a vez anvet tebegezh $A$. Gwerzhadoù $P$ a reer *tebegoù* anezho.

#### 2.1.3.3 Delakadenn

$$\boxed{\forall A, \forall B, (A,B) \in \mathcal{F}^2,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}\ .$$

• **Dienadur**

$A \cup B = A \cup\ [(A \cup \overline{A})\ \cap B] = A \cup\ (A \cap B)\ \cup\ (\overline{A} \cap B)$.

Hogen : $A \cup (A \cap B) = A$ (gougemerusted).

Neuze : $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$. Hogen : $A \cap\ (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.

Da heul :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B).$$

A-hend-all :

$$B = (A \cap B)\ \cup\ (\overline{A} \cap B),\ \text{hag}\ (A \cap B)\ \cap\ (\overline{A} \cap B) = \emptyset.$$

Neuze : $\quad P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Hag a-benn ar fin :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

EVEZHIADENN — Hollek eo an disoc'h-se, tra ma sell an aksiomenn 2 ouzh an degouezh dibarek ma'z eo goullo $A \cap B$, eleze $P\big(A \cap B\big) = 0$. En degouezh-se e lavarer ez eo *digembez* an darvoudoù $A$ ha $B$.

#### HANC'HERIEG

Damkaniezh an tebegoù, anvet ivez tebegouriezh, a gevaraez jedoniekaat plegennoù ma c'hoari an dargouezh ur roll. Seurt plegennoù a spisaer dre ur c'homenad resis anvet *amprou dargouezhel* pe *arnod dargouezhel*. Disoc'hoù bezus seurt amprou zo neuze an *amprouadoù*, anvet ivez *darvoudoù elfennel* pe c'hoazh *bezusterioù*. Merzhout mat en hon eus amañ ergorennoù jedoniel o telvanañ ur blegenn dargouezhel ha n'eo ket ergorennoù kantouezel. A se e reomp un diforc'h etre disoc'h beziat ha disoc'h bezus, an eil o vezañ un ergorenn debegouriel hag an hini kentañ o vezañ ur c'hantouezad. A-wechoù e vo graet anv eus *disoc'hoù* hep an adanv *bezus*, ur c'hammarver ne vo ken, ur goulezad d'ar boaz ! Al liesañ e raimp gant an termen *bezuster* a verk ervat an arvez kentouezel. E-se ez eo savelet ar gevreizhenn $P$ — an tebekadur — a-gentouez war ar bondeskad $\Omega$, anvet ivez *teskad ar bezusterioù*, amparet gant an darvoudoù elfennel notet $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Amañ dindan e vo roet un nebeut skouerioù da sklaeraat ar c'hraf. Un *darvoud* zo neuze ur parzh eus $\Omega$ — un isteskad — ha notet e vo dre $A$, $B$, pe $A_1$, $A_2$, .., $A_n$. Spisaomp en un daolenn ar c'heñver etre hanc'herieg an teskadoù ha hini an tebegoù.

| **Teskadoù** | **Tebegoù** |
|---|---|
| Bondeskad $\Omega$ | Teskad ar bezusterioù<br>(pe : an amprouadoù) |
| $\omega$ elfenn eus $\Omega : \omega \in \Omega$ | $\omega$ zo ur bezuster |
| $A \subseteq \Omega$ pe $A \in \mathcal{F}(\Omega)$,<br>$\{\omega\} \subset \Omega$ (undañv) | $A$ zo un darvoud eus $\mathcal{F}(\Omega)$,<br>$\{\omega\}$ zo un darvoud elfennel |
| Degouezh 1 : $A = \emptyset$,<br>degouezh 2 : $A = \Omega$ | Degouezh 1 : anvezus eo $A$,<br>degouezh 2 : kaougant eo $A$ |
| $C = A \cup B$ | $C$ zo an darvoud $A$ pe $B$ |
| $D = A \cap B$ | $D$ zo kenglenadur $A$ gant $B$,<br>eleze diaser eo $A$ ha $B$ |
| $B = \overline{A}$<br>(neuze $B \cap A = \emptyset$ ha $B \cup A = \Omega$ ) | $B$ zo darvoud kontrol $A \iff$<br>[$B$ hag $A$ anvezus ; $B$ pe $A$ kaougant] |
| $A \cap B = \emptyset$ (teskadoù disparti) | Digembez eo $A$ ha $B$ |

#### 2.1.3.4 Degouezh dibarek : reizhiad klok a zarvoudoù keittebek

An $n$ darvoud $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a ampar ur reizhiad klok war $\Omega$ mar:

$$\forall A_i, \forall A_j, (A_i, A_j) \in \mathcal{F}^2,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ hag } A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$$

Da heul :

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

Desellomp an degouezh dibarek $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n)$.

Lavaret e vez ez eo keittebek an darvoudoù:

$$\forall A_i, A_i \in \mathcal{F},\ P(A_i) = \frac{1}{n}.$$

Dedalvezet e vez alies ar c'houlakadenn-se er c'hoarioù, en arbenn eus ur c'hemparzh enien.

Mard eo $D$ an darvoud sevenet dre unan bennak eus ar $p$ darvoud $A_1, A_2, \ldots, A_p$, dibabet a-douez an $n$ darvoud eus ur reizhiad klok, neuze e lavarer ez eo asou ar $p$ elfenn $A_1, A_2, \ldots, A_p$ — an *asouderioù* enta — hag :

$$D = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_p) = \frac{p}{n} = \frac{\text{Darvoudoù asou}}{\text{Hollad an darvoudoù}}.$$

**EVEZHIADENN** — Un egor tebekadus bevennek $\big(\Omega, \mathcal{F}\big)$ o vezañ festet ez eus un anvevennad arloadurioù $P$ eus $\mathcal{F}\big(\Omega\big)$ etrezek $\mathbb{R}^+$ o vastañ d'an aksiomennoù, e tro da debekaat an egor-se enta.

Un tebekadur $P$ zo peursavelet mar galler kaout evit nep parzh $D$ eus $\Omega$ enbeziat e $\mathcal{F}(\Omega)$ e zelvad $P(D)$.

Hogen al liesañ e vez festet an delvadoù evit darvoudoù 'zo nemetken. Da skouer : $P(A) = \frac{1}{3}$ ha $P(B) = \frac{1}{4}$. En degouezh nemetañ ma'z eo digembez $A$ ha $B$ e ouzer savelañ $P(A \cup B)$. Evit $P(A \cap B)$ eo ret kaout stlenn ouzhpenn.

**SKOUERIOÙ**

1. Teurel a reer un diñs eorizhek teir gwech lerc'h ouzh lerc'h, an talioù anezhañ o vezañ niverennet eus 1 da 6 ha notañ a reer niverenn an tal uhelañ hervez urzh an tri zaol da gaout un niver teir sifrenn.

   Bezet an darvoud $A$ : Par eo an teir sifrenn. Jediñ tebegezh $A$.

   *Respont* : Ar bondeskad — teskad ar bezusterioù — zo amparet neuze gant an triac'hoù $\{a, b, c\}$ gant $a \in \{1, \ldots, 6\}, b \in \{1, \ldots, 6\}, c \in \{1, \ldots, 6\}$.

   Niver ar bezusterioù zo $\text{Card}\,(\Omega) = 6^3$.

   Niver an darvoudoù asou zo : 6. A-se ez eo $P(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.

2. Tennañ a reer 5 kartenn eus ur spletad 32 kartenn. O notañ a reer.

   Bezet $A$ an darvoud : Tennañ a reer 4 born. Jediñ tebegezh $A$.

   *Respont*: Niver ar bezusterioù zo neuze : $\binom{32}{5}$ ha niver an asouderioù zo : $\binom{28}{1} = 28$. Neuze $P(A) = \frac{1}{8 \times 31 \times 29}$.

3. Bezet un arc'h enni 7 boull wenn ha 3 boull du. Tennañ a reer 5 boull eus an arc'h hep o lakaat en-dro enni. Pled a daoler ouzh liv ar boulloù tennet.

   Bezet $A$ an darvoud : Tennañ a reer 3 boull wenn. Jediñ $P(A)$.
   *Respont* : Niver ar bezusterioù zo enta : $\binom{10}{5}$. Niver an asouderioù : $\binom{7}{3} \times \binom{3}{2}$.
   Jediñ a reer : $P(A) = \frac{5}{12}$.

4. Dibab a reer ur skoliad a-douez ur c'hlasad a 15 plac'h ha 10 paotr. Jediñ tebegezh an darvoudoù-mañ da heul :

   *a*) $A$ : Dibab a reer ur plac'h ;
   *b*) $B$ : Dibab a reer ur paotr.
   *Respont* : a) $P(A) = \frac{15}{25} = 0,6$ ; b) $P(B) = \frac{10}{25} = 0,4$.

5 Teurel a reer daou ziñs eorizhek ha notañ a reer sammad an daou dal uhelañ. Savelañ tebegezh an darvoudoù-mañ da heul :

   *a*) $A$ : Ar sammad zo bihanoc'h eget seizh;
   *b*) $B$ : Ar sammad zo un niver hebar;
   *c*) $C$ : Ar sammad zo un niver hebar ha bihanoc'h eget seizh;
   *d*) $D$ : Ar sammad zo un niver hebar pe vihanoc'h eget seizh.
   *Respont* : Boas eur da sevel un daolenn daou enmoned evel amañ dindan.

| Diñs 2 \ Diñs 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Teskad ar bezusterioù zo : $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Diwar an daolenn amañ diaraok e c'haller sevel hini an tebegoù, eleze gwerzhadoù an tebekadur:

| $\omega_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | hollad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

Alese an diskoulmoù :
a) $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$; b) $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; c) $P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; d) $P(D) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.
Teurel pled :
$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cap P(B) = \frac{15}{36} + \frac{18}{36} - \frac{9}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

## 2.2 TEBEKADUR WAR UN TESKAD DIFORZH

### 2.2.1 Aljebr Boole, $\sigma$-aljebr

Pa glasker savelañ un aksiomatik eus Riñverezh an tebegoù e vuker dreist-holl ouzh an tri ferzh-mañ da heul a'n tebekadur (a zo ur muzuliadur a du rall) :

1. Gavaelet eo tebegezh un darvoud $A$ etre 0 hag 1:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

2. Delvad (tebegezh) ar bondeskad $\Omega$ zo par da 1 :

$$P(A) = 1.$$

3. Bezet $A \cup B$ kembodadur daou zarvoud *digembez*. Mard eo savelet tebegezh $A$ ha tebegezh $B$, neuze ez eo savelet tebegezh $A \cup B$ ha par eo da sammad tebegoù $A$ ha $B$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Da neuze ez eo an tebekadur ur gevreizhenn o kevrediñ ouzh ur parzh $A$ eus ar bondeskad $\Omega$ un niver anvet tebegezh $A$. Ar gevreizhenn-se — he gwerzhadoù en $\mathbb{R}$ — a c'hell bezañ ansavelet evit un darn eus ar bondeskad ha savelet evit ur familh $\mathcal{F}$ a barzhioù.

A se e tegaser keal aljebr Boole en debegouriezh en arbenn eus ar reolenn 3 amañ diaraok (sammadur an tebegoù), evel a vo gwelet amañ dindan.

Desellomp ur familh $\mathcal{F}$ a barzhioù a'r bondeskad $\Omega$ hag ar perzhioù-mañ da heul :

**1.** Mard eo nep parzh $A$ a'r bondeskad $\Omega$ elfenn eus $\mathcal{F}$, ar glokaenn $\overline{A}$ a-geñver gant $\Omega$ a zo ivez elfenn eus $\mathcal{F}$:

$$(A \in \mathcal{F}) \Longleftrightarrow (\overline{A} \in \mathcal{F}).$$

Mar bez bastet d'ar perzh-se e lavarer ez eo kloz $\mathcal{F}$ e-keñver ar c'hlokadur war ar bondeskad $\Omega$.

**2′**. Mard eo $A_1, \ldots, A_n$ ul lerc'hiad a barzhioù eus $\Omega$ elfennoù eus $\mathcal{F}$, neuze ez eo kembodadur ar parzhioù-se elfenn eus $\mathcal{F}$ ivez :

$$A_1 \in \mathcal{F}, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \big(A_1 \cup \ldots \cup A_n\big) \in \mathcal{F}.$$

Mar bez bastet d'ar perzh-mañ e lavarer ez eo kloz $\mathcal{F}$ e-keñver ar c'hembodadur war un niver *bevennek* a elfennoù.

**2″**. Mard eo $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ ul lerc'hiad *anvevenn eriñvadus* a barzhioù eus ar bondeskad $\Omega$ elfennoù eus $\mathcal{F}$, neuze ez eo ivez kembodadur *anvevenn* ar parzhioù-se un elfenn eus $\mathcal{F}$ :

$$A_1 \in \mathcal{F}, \ldots, A_n \in \mathcal{F}, \ldots \Longrightarrow (A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) \in \mathcal{F}.$$

Mar bez bastet d'ar perzh-se e lavarer ez eo kloz $\mathcal{F}$ e-keñver ar c'hembodadur war un niver *anvevenn* a elfennoù.

Mar he deus $\mathcal{F}$ ar perzhioù **1** ha **2′** e lavarer ez eo $\mathcal{F}$ un *aljebr Boole* ; mar he deus $\mathcal{F}$ ar perzhioù **1** ha **2″** e lavarer ez eo $\mathcal{F}$ ur *$\sigma$-aljebr* pe c'hoazh ur *familh* Borel.

Ur $\sigma$-aljebr zo un aljebr Boole, pa empleg **2″** ar perzh **2′**.

### 2.2.2 Tebekadur un aljebr Boole pe ur $\sigma$-aljebr

Lavaret e vez ez eo tebekaet un aljebr Boole $\mathcal{F}$ pa saveler evit nep parzh eus $\Omega$ elfenn eus $\mathcal{F}$ un arloadur $P$ eus $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}$ o vastañ d'an teir aksiomenn-mañ da heul, anvet Aksiomennoù Kolmogorov :

**1.** Delvad nep parzh $A$ eus $\Omega$ elfenn eus $\mathcal{F}$ zo muiel pe vannel :

$$\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \geqslant 0.$$

**2.** Delvad $\Omega$ e-unan zo 1 :

$$P(\Omega) = 1.$$

**3′**. Delvad kembodadur un niver bevennek a barzhioù disparti elfennoù eus $\mathcal{F}$ zo par da sammad an delvadoù :

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Ar perzh-se a reer*Aksiomenn ar sammadezh vevennek* anezhañ *Aksiomenn an tebegoù hollel* pe c'hoazh .

E degouezh ur $\sigma$-aljebr $\mathcal{F}$ e vez erlec'hiet ar perzh $\mathbf{3''}$ ouzh ar perzh $\mathbf{3'}$ :

$\mathbf{3''}$. Delvad kembodadur un anvevennad eriñvadus a barzhioù disparti eus $\Omega$ elfennoù eus $\mathcal{F}$ zo par da sammad anvevenn an delvadoù :

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

Ar perzh-se a reer anezhañ *Aksiomenn ar sammadezh anvevenn.*

Gwelet e vo pelloc'h dianlenadoù an despizadurioù-se.

**EVEZHIADENN** — Dav merzhout e c'haller savelañ e stern an aksiomatik-se tebegezh nep darvoud didermenet diwar darvoudoù digembez all war-bouez an niñvadurioù kembodadur ha klokadur e-keñver $\Omega$, adalek ar mare ma'z eo bet savelet tebegezh an darvoudoù all-se. Setu perak ez eo $\mathcal{F}$ — familh a barzhioù eus $\Omega$ savelet warni un tebekadur — un aljebr Boole, eleze ur familh a barzhioù kloz evit a sell ar c'hembodadur disparti hag ar c'hlokadur e-keñver $\Omega$. Dav goulakaat ouzhpenn ez eo kloz $\mathcal{F}$ evit a sell kembodadur elfennoù n'int ket disparti dre ret evit ma ve ur ster gant ar parder $P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, adal ma'z eo savelet $P(A)$ ha $P(B)$. Mard eo kloz $\mathcal{F}$ evit a sell ar c'hembodadur hag ar c'hlokadur ez eo kloz ivez evit a sell ar c'henskejadur hag ur ster zo gant an daou dermen a'r gazel gleiz pa vez unan gant an daou dermen a'r gazel dehou.

Da heul, evit gouzout tebegezh pep elfenn un aljebr Boole $\mathcal{F}$ e spir — pa vez tu da nebeutañ — kaout tebegoù elfennoù un isteskad $\mathcal{F}_0$ a barzhioù disparti eus $\mathcal{F}$, hevelep ma ve saveladus nep elfenn eus $\mathcal{F}$ diwar elfennoù eus $\mathcal{F}_0$ dre an niñvadurioù kembodadur ha klokadur e-keñver $\Omega$. A se, an arloadur $P : A \mapsto P(A)$ evit pep elfenn eus $\mathcal{F}_0$ zo a-walc'h evit savelañ tebegezh elfennoù $\mathcal{F}$ holl. Seurt isteskad $\mathcal{F}_0$ a reer anezhañ un *diazez* eus $\mathcal{F}$.

Gwelomp war ziv skouer penaos e reer evit savelañ tebegezh elfennoù un aljebr Boole :

a) Bezet ur bondeskad $\Omega$ ennañ un niver *bevennek* $N$ a elfennoù. Desellomp an aljebr Boole amparet gant an $2^N$ parzh eus $\Omega$.

Da isteskad $\mathcal{F}_0$ e c'haller kemer da ziazez $N-1$ elfenn eus $\Omega$. E gwir e c'hell nep hini eus an $2^N$ parzh bezañ savelet diwar an $N-1$ elfenn eus $\Omega$ (eleze diwar an $N-1$ undañv, parzhioù a-douez an $2^N$) dre an niñvadurioù kembodadur pe glokadur e-keñver ar bondeskad $\Omega$.

Alese ez eo peursavelet tebegoù an $2^N$ parzh eus $\Omega$ dre an $N-1$ delvad eus an $N-1$ elfenn eus $\Omega$, da skouer,

$$p_1, p_2, \ldots, p_{N-1},$$

o vastañ d'an aksiomennoù :

$$\forall i : 0 \leqslant p_i \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} p_i \leqslant 1.$$

Lavarout a reer c'hoazh emañ tebegoù an $2^N$ parzh eus $\Omega$ e dalc'h $N-1$ *arventenn dizalc'h.*

Teurel evezh ez eo kevatal reiñ an $N-1$ tebegezh $p_i$ gant reiñ an $N-1$ dassammad :

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1, \\ P_2 &= p_1 + p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_i &= p_1 + \cdots + p_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{N-1} &= p_1 + \cdots + p_{N-1}, \end{aligned}$$

an dassammadoù $P_i$ o vastañ da :

$$0 \leqslant P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots \leqslant P_{N-1} \leqslant 1.$$

b) Desellomp an degouezh ma'z eo ar bondeskad teskad poentoù an eeunenn werc'hel $\mathbb{R}$. Bezet $\mathcal{F}$ ar $\sigma$-aljebr ganet diwar entremezioù (digor, serr, leddigor) eus $\mathbb{R}$ war-bouez an niñvadurioù kembodadur ha kenskejadur renet un niver bevennek pe un anvevennad eriñvadus a wechoù.

Diskouez a reer e c'hell tebegezh nep elfenn eus $\mathcal{F}$ bezañ dezreet diwar debegezh an entremezioù $G_x$ digor:

$$G_x = ]-\infty, x[.$$

Da heul, ar gevreizhenn :

$$F(x) = P(G_x)$$

a spir evit savelañ tebegezh pep hini eus elfennoù $\mathcal{F}$.

Gwelet e vo pelloc'h da betore amveziadoù e rank ar gevreizhenn $F$ bastañ war-benn savelañ tebegezh elfennoù $\mathcal{F}$.

### 2.2.3 Dianlenadoù Aksiomenn an tebegoù hollel

Adskrivomp amañ Aksiomenn an tebegoù hollel (**3**) : Delvad kembodadur un niver bevennek pe anvevenn eriñvadus a barzhioù disparti elfennoù eus $\mathcal{F}$ zo par da sammad an delvadoù :

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Desellomp dianlenadoù an aksiomenn-se :

**4.** Dre berzh Aksiomenn an tebegoù hollel :

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

Hogen $A \cup \overline{A} = \Omega$; neuze :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

eleze:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Tebegezh an darvoud $\overline{A}$ kontrol d'an darvoud $A$ — a zo elfenn eus $\mathcal{F}$ ivez, pa'z eo $\mathcal{F}$ ur $\sigma$-aljebr — zo par d'ar glokaenn da 1 eus tebegezh $A$.

**5.** Mar lakaer $A = \Omega$ er parder-se e teu, pa'z eo $\overline{\Omega} = \emptyset$ hag $P\left(\Omega\right) = 1$:

$$P(\emptyset) = 0.$$

An teskad goullo elfenn eus $\mathcal{F}$ zo dezhañ an debegezh mann.

Koulskoude e c'hell na vezañ an darvoud nemetañ dezhañ an debegezh mann. Da skouer, pa zibaber dre zargouezh ur poent war ar regenn $[0, 1]$, ar bondeskad $\Omega$ zo teskad ar poentoù-se. Tebegezh pep hini eus ar poentoù-se zo par da vann : keittebek eo ar bondeskad p'o deus an holl boentoù an un staelad en arbenn eus an dibab dargouezhek ; o vezañ ma'z eus un anvevennad poentoù en $\Omega$ ez eo tebegezh pep hini par da vann dre ret. Mar deseller un teskad poentoù, bevennek pe anvevenn eriñvadus, tebegezh an teskad-se zo par da vann, dre berzh Aksiomenn an tebegoù hollel. Ent dibarek ez eo mannel tebegezh teskad ar poentoù kemezel o ledenn.

Graet e vez *darvoud hogos anvezus* eus un darvoud angoullo o c'henniñ ar bondeskad ha dezhañ un debegezh vannel.

Heñvel dra e c'hell ar bondeskad na vezañ an darvoud nemetañ dezhañ an debegezh 1 : nep darvoud a zo ar c'hontrol anezhañ hogos anvezus zo un darvoud par e debegezh da 1. Da skouer, teskad ar poentoù ankemezel o ledenn zo un teskad par e debegezh da 1, pa zibaber dre zargouezh ur poent war an entremez $[0, 1]$. Hevelep darvoud a reer anezhañ *darvoud hogos kaougant*.

**6.** Mard emañ $B$ o c'henniñ $A$ :

$$A = B \cup (A - B)$$

ha mard eo $A$ ha $B$ elfennoù eus $\mathcal{F}$ ($A - B$ ivez enta) ez eus dre berzh Aksiomenn an tebegoù hollel :

$$P(A) = P(B) + P(A - B).$$

Hogen dre berzh $\forall D, D \in \mathcal{F}, P(D) \geqslant 0$ :

$$P(A - B) \geqslant 0.$$

Neuze :

$$P(A) \geqslant P(B).$$

A se, mard eo $B$ o c'henniñ $A$ ez eo tebegezh $B$ par da hini $A$ d'ar muiañ :

$$B \subseteq A \Longrightarrow P(B) \leqslant P(A).$$

Dezgeriañ a reer an disoc'h-se evel henn : ar gevreizhenn o kevrediñ ouzh pep parzh eus $\Omega$ elfenn eus $\mathcal{F}$ e debegezh zo ur gevreizhenn angingresk a deskadoù.

Resis : mard eo $B$ o c'henniñ $A$:

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

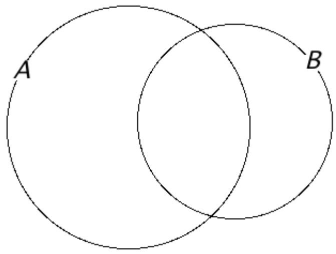
**7.** Nep teskad $A$ elfenn eus $\mathcal{F}$ zo o c'henniñ ar bondeskad $\Omega$ (a zo e debegezh par da 1). Da heul 6 :

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Tebegezh nep darvoud zo gavaelet etre 0 hag 1.

**8. Aksiomenn an tebegoù hollel e degouezh daou deskad andisparti**

Bezet $A$ ha $B$ daou deskad elfenn eus $\mathcal{F}$. Heñvel dra eo evit $A \cup B$ hag $A \cap B$, pa'z eo kloz ar $\sigma$-aljebr $\mathcal{F}$ e-keñver ar c'hembodadur hag ar c'hlokadur. Arsellomp an daveadur a zo etre tebegoù ar pevar darvoud-se.




Bez' ez eus :

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B).$$

Neuze hervez Aksiomenn an tebegoù hollel :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B).$$

Hogen dre berzh **6** :

$$P(B - A \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

Da heul :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

E-se ez eo tebegezh ur c'hembodadur par da sammad an tebegoù lei tebegezh ar c'henskejadur. Mar bez disparti $A$ ha $B$ en hon eus $P(A \cap B) = 0$ ha neuze e teu : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

**9. Aksiomenn an tebegoù hollel e degouezh lies teskad andisparti**

Desellomp tri zeskad $A$, $B$, $C$ diforzh elfennoù eus $\mathcal{F}$. Heñvel dra evit an teskadoù bet diwar $A$, $B$, $C$ war-bouez an niñvadurioù kembodadur ha kenskejadur.

Dre berzh **8** hag o terc'hel kont eus strollatadezh ar c'hembodadur :

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C,$$

ez eus :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P\left((A \cup B) \cap C\right).$$

Dre zedalvout **8** c'hoazh :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dre berzh dasparzhadezh ar c'henskejadur e-keñver ar c'hembodadur :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \,\cup\, (B \cap C).$$

Dre zedalvout **8** adarre :

$$\begin{aligned} P\left((A \cup B) \cap C\right) &= P\left((A \cap C) \,\cup\, (B \cap C)\right) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P\left((A \cap C) \,\cap\, (B \cap C)\right). \end{aligned}$$

Hogen:

$$(A \cap C) \,\cap\, (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Da neuze e teu :

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

eleze, o todiñ :

$$\begin{aligned} S_1 &= P(A) + P(B) + P(C), \\ S_2 &= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C), \\ S_3 &= P\left(A \cap B \cap C\right) : \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = S_1 - S_2 + S_3}.$$

Kenderc'hel a reer an disoc'h-se dre zarren evit degouezh un niver bennak a $n$ darvoud ($n$ bevennek pe anvevenn eriñvadus):

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}\sum P(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n), \end{aligned}$$

eleze o todiñ :

$$S_k = \sum\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\cdots\sum P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}) :$$

$$\boxed{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k}.$$

E se, tebegezh sevenidigezh unan eus an darvoudoù $A_1,\ldots,A_n$ da nebeutañ (eleze $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$, hep ma ve ar parzhioù $A_1,\ldots,A_n$ andisparti dre ret) zo par da sammad pebeilat sammadoù an tebegoù stag ouzh an $\binom{n}{k}$ kenskejadur $k$ ha $k$.

An disoc'h-mañ a vez anvet *delakadenn* Poincaré.

**SKOUER** — Bezet an arnod dargouezhel : teurel a reer war un dro daou ziñs eorizhek $r$ gwech. Jediñ tebegezh $P_r$ reveziadur ar c'hwec'h daouac'h $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$ ur wech da nebeutañ pep hini.

*Respont*: Arsellomp da gentañ ez eo kevatal teurel *daou* ziñs war un dro gant teurel *un* diñs hepken dezhañ $6^2 = 36$ tal, pep tal warnañ unan eus an $\mathcal{A}_6^2$ arenkad gant arreadur div arouez dibabet a-douez c'hwec'h, tebegezh an darvoud kaout pep tal o vezañ $\frac{1}{36}$.

Ar bezusterioù keittebek zo enta an $\mathcal{A}_{36}^r$ arenkad gant arreadur $r$ arouez dibabet a-douez 36.

Arouezomp dre $A_i$ an darvoud :

Ne revez ket an tal $(i,i)$ e-doug an $r$ taol.

A se e teu :

$$P(A_i) = \frac{\mathcal{A}_{35}^r}{\mathcal{A}_{36}^r} \qquad (i = 1,2,\ldots,6),$$

$$P(A_i\cap A_j) = \frac{\mathcal{A}_{34}^r}{\mathcal{A}_{36}^r} \qquad (i\neq j, i,j = 1,2,\ldots,6),$$

hag ent hollek :

$$P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}) = \frac{\mathcal{A}_{36-k}^r}{\mathcal{A}_{36}^r}$$

$$(i_1\neq i_2, i_1\neq i_3,\ldots,i_{k-1}\neq i_k, i_1,\ldots,i_k = 1,2,\ldots,6).$$

Alese:

$$S_k = \binom{6}{k}\frac{\mathcal{A}_{36-k}^r}{\mathcal{A}_{36}^r} = \binom{6}{k}\left(1-\frac{k}{36}\right)^r.$$

Ha da heul :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_6) = \sum_{k=1}^{6}(-1)^{k-1}\binom{6}{k}\left(1-\frac{k}{36}\right)^r.$$

An debegezh-se a glot ouzh an darvoud :
Unan da nebeutañ eus an talioù $(1,1),\ (2,2),\ldots,(6,6)$ ne revez ket. An debegezh klasket $P_r$ zo hini an darvoud kontrol :
$P_r = P$ (pep hini eus ar c'hwec'h tal $(1,1),\ (2,2),\ldots,(6,6)$ a revez ur wech da nebeutañ)

$$P_r = 1 - \sum_{k=1}^{6}(-1)^{k-1}\binom{6}{k}\left(1-\frac{k}{36}\right)^r,$$

eleze :

$$P_r = \sum_{k=0}^{6}(-1)^{k}\binom{6}{k}\left(1-\frac{k}{36}\right)^r.$$

Gwiriañ a reer ez eo mannel gwerzhad ar gevreizhenn-se evit $r = 0, 1, 2, \ldots, 5$, evel ma tere. Evit $r = 6$ e teu :

$$P_6 = \frac{6!}{6^{12}}.$$

## 10. Dibarder Boole

O vezañ ma'z eo anleiel tebegezh ar c'henskejadur $A \cap B$ e tezreer eus **8**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B).$$

Evit tri darvoud, dre zedalvout div wech an disoc'h-se, e teu ivez :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P\left((A \cup B) \cup C\right) &\leqslant P(A \cup B) + P(C) \\ &\leqslant P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

Hag, ent hollekoc'h, evit nep $n$ bevennek pe anvevenn eriñvadus :

$$\boxed{P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}.$$

An dibarder-se a vez anvet *dibarder* Boole. Diskouez a ra ez eo an termen $S_1$ e delakadenn Poincaré (**9**) usvonn tebegezh ar c'hembodadur :

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant S_1.$$

**11. Seveniñ *r* darvoud a-douez *n***

Bezet $n$ isteskad eus ar bondeskad $\Omega$ ha n'int ket andisparti dre ret :

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

Pep isteskad $A_i$ a rann $\Omega$ e daou barzh :

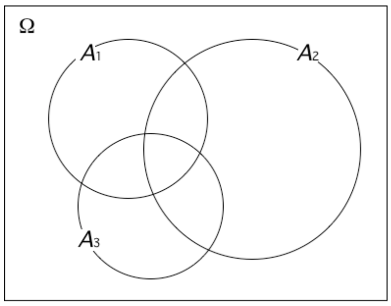
$$A_i \text{ hag } \overline{A_i}.$$

Kenetreskejadurioù an teskadoù $A_i$ hag $\overline{A_i}$ a savel ur parzhadur eus $\Omega$ e $2^n$ domani elfennel $d$.

E se evit $n = 3$ ez eus $2^3 = 8$ domani $d$ :

$$\begin{array}{lll}
A_1 \cap A_2 \cap A_3\ ; & & \\
\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\,, & A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\,, & A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\ ; \\
A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\,, & \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\,, & \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\ ; \\
\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}. & &
\end{array}$$

Pep domani a glot ouzh unan eus an $\mathcal{A}_2^n = 2^n$ arenkad gant arreadur $n$ arouez dibabet a-douez div (pep teskad $A_i$ a c'hell bezañ usrezellet pe get e skrivad $d$).



An domanioù $d$-se a c'hell bezañ renket hervez niver $r$ an darvoudoù $A_i$ sevenet (neuze ez eus $n-r$ darvoud $A_i$ ansevenet). Aroueziomp dre $(r)$ hollad an darvoudoù o klotañ *rik* ouzh sevenidigezh $r$ darvoud $A_i$.

Pa vez $n$ par da 3 e c'hell $r$ bezañ par da 0, 1, 2, 3 :

$$\begin{aligned}
(3) &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ ; \\
(2) &= (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \ ; \\
(1) &= (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) \ ; \\
(0) &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}.
\end{aligned}$$

E se (3) a c'hoarvez eus un domani elfennel $d$ hepken, (2) a c'hoarvez eus tri domani elfennel $d$, (1) ivez ha (0) a c'hoarvez eus un domani elfennel $d$ hepken.

Ent hollek e c'hell $r$ bezañ par da $0, 1, \ldots, n$. An teskadoù $(r)$ a savel ur parzhadur eus teskad an domanioù elfennel $d$ : pep domani elfennel $d$ a c'hann unan eus an teskadoù disparti $(r)$ hag unan hepken.

Niver an domanioù elfennel $d$ o c'henniñ an darvoud $(r)$ zo par da $\binom{n}{r}$ ha gwiriañ a reer ervat, evel ma tere :

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

Aroueziomp dre $S_1$ sammad tebegoù an darvoudoù $A_i$ :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

hag ent hollekoc'h dre $S_k$ sammad tebegoù an darvoudoù amparet gant kenskejadur $k$ darvoud $A_i$ :

$$S_k = \sum\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\sum P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Ar sammad $S_k$ zo amparet gant $\binom{n}{k}$ termen.

Bezet $P(r)$ tebegezh an darvoud $(r)$. Savelomp an daveadur oc'h eren al lerc'hiadoù :

$$(S_1, \ldots, S_n) \text{ hag } \big(P(0), \ldots, P(n)\big).$$

Ent resis hor bo an daveadur :

$$\big(P(1), \ldots, P(n)\big) \to (S_1, \ldots, S_n)$$

ha, dre c'hinañ, e vo dezreet an daveadur :

$$(S_1, \ldots, S_n) \to \big(P(1), \ldots, P(n)\big)$$

a ro tebegezh sevenidigezh rik $r$ darvoud $A_i$, pa anavezer ar sammadoù $S_k$.

**Kentañ hentenn**

Desellomp ur c'henskejadur $I_k$ eus $k$ teskad $A_i$ erspizet, da skouer :

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k.$$

Ar c'henskejadur $I_k$ a endalc'h $2^{n-k}$ domani elfennel $d$. E gwir, evit savelañ un domani elfennel $d$ eus $I_k$ eo ret spisaat, e touez an $n-k$ teskad $A_i$ anerspizet e didermenadur $I_k$, pere zo sevenet ha pere n'int ket. Diwar se ez eo $S_k$ sammad an tebegoù eus $\binom{n}{k}2^{n-k}$ darvoud elfennel $d$ (domani elfennel), a zo reoù 'zo liesreveziat, rak un darvoud elfennel roet $d$ zo endalc'het e lies $I_k$. Da skouer emañ an darvoud $d$ da heul:

$$d = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

endalc'het e pep hini eus an $\binom{n}{k}$ kenskejadur $I_k$ hag emañ e debegezh $\binom{n}{k}$ gwech e $S_k$.

Desellomp un darvoud elfennel dibarek notet $d_r^*$ o c'henniñ $(r)$. Klotañ a ra ouzh sevenidigezh $r$ darvoud $A_i$ erspizet hag ouzh ansevenidigezh an $n-r$ $A_i$ all. Dewerzhomp niver ar c'henskejadurioù $I_k$ gannet gant $d_r^*$ :

- mard eo $r$ bihanoc'h eget $k$ ne c'hell ket $d_r^*$ genniñ kenskejadur $I_k$ ebet;
- Mard eo $r$ brasoc'h pe bar ouzh $k$ emañ $d_r^*$ o c'henniñ ar c'henskejadurioù $I_k$ savelet dre genskejadur $k$ darvoud $A_i$ dibabet a-douez an $r$ o klotañ ouzh $d_r^*$. Neuze emañ $d_r^*$ o c'henniñ $\binom{r}{k}$ kensjejadur $I_k$.

A se, mar skriver :

$$S_k = \sum_{I_k} P(I_k)$$

ha mar digenaozer $I_k$ en isteskadoù $d_{r,k}^*$ :

$$I_k = \bigcup d_{r,k}^*, \quad d_{r,k}^* \in (r), \quad d_{r,k}^* \subset I_k,$$

e teu ar sammad $S_k$ da vezañ :

$$S_k = \sum_{I_k} \sum_{d^*_{r,k} \subset I_k} P(d^*_{r,k}).$$

O vezañ ma'z eo tebegezh an domani $d^*_r$ eus $(r)$ arreet $\binom{r}{k}$ e pep $S_k$, evit $r \geqslant k$, e teu :

$$S_k = \sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} P(r).$$

**Eil hentenn**

Pep kenskejadur $I_k$ a endalc'h $2^{n-k}$ domani elfennel $d$, a zo $\binom{n-k}{r-k}$ elfennoù $(r)$. E gwir, evit savelañ un domani $d^*_r$ enbeziat e $(r)$ ez eo ret resisaat pere ($r - k$ an niver anezho), e-touez an $n - k$ darvoud $A_i$ anerspizet e didermenadur $I_k$ zo sevenet (anat eo ez eo par $r$ da $k$ da nebeutañ).

E $S_k$ ez eo arreet tebegezh pep domani $d^*_r$ enbeziat en $(r)$ un niver par a wechoù, dre arbennoù a gemparzh. Hogen $S_k$ zo sammad an $\binom{n}{k}$ termen a zo pep hini anezho e-unan sammad tebegoù an $\binom{n-k}{r-k}$ domani $d^*_r$. O vezañ ma'z eus $\binom{n}{r}$ domani $d^*_r$ diouto o-unan ez eo peogwir ez eo arreet tebegezh pep hini :

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}}{\binom{n}{r}} = \binom{r}{k}, \text{gwech e } S_k.$$

Da neuze :

$$S_k = \sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} P(r), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dav dimp ginañ an daveadur linennek-se etre an $S_k$-où hag ar $P(r)$-où warbenn disoc'hañ gant an daveadur a ro ar $P(r)$-où a-gevreizh d'an $S_k$-où.

Mar aroueziomp dre $\boldsymbol{S}$ ar sturiadell-bann a zaveennoù $S_1, \ldots, S_n$ ha dre $\boldsymbol{P}_{(\,)}$ ar sturiadell-bann a zaveennoù $P(1), \ldots, P(n)$, an daveadur etre $\boldsymbol{S}$ ha $\boldsymbol{P}_{(\,)}$ zo :

$$\boldsymbol{S} = M \boldsymbol{P}_{(\,)},$$

$M$ o vezañ an oged $(n \times n)$, rez pa'z eo par he didermenant da 1 :

$$M = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n} \end{vmatrix}.$$

Termen hollek an oged zo :

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{mar} \quad i > j, \\ \binom{j}{i} & \text{mar} \quad i \leqslant j. \end{cases}$$

Dezren a reer :

$$\boldsymbol{P}_{()} = M^{-1}\boldsymbol{S},$$

ma'z eo $M^{-1}$ oged c'hin $M$, dezhi da dermen hollek :

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{mar} \quad i > j, \\ (-1)^{j+1}\binom{j}{i} & \text{mar} \quad i \leqslant j. \end{cases}$$

E gwir, mar liesaer an div oged, e teu :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\mu_{kj} &= 0 && \text{mar } i > j \quad \text{(liesâd div oged tric'hornek zo un oged tric'hornek),} \\ &= \binom{j}{j}^2 = 1 && \text{mar } i = j, \\ &= \sum_{k=i}^{k=j} \binom{k}{i}(-1)^{j+k}\binom{j}{k} && \text{mar } i < j. \end{aligned}$$

Hogen ar sammad diwezhañ-se, a c'hell bezañ rezhiennet :

$$(-1)^{i+j}\binom{j}{i}\sum_{\xi=0}^{\xi=j-i}(-1)^{\xi}\binom{j-i}{\xi}$$

zo par da vann, rak :

$$\sum_{\xi=0}^{\xi=j-i}(-1)^{\xi}\binom{j-i}{\xi}=(1-1)^{j-i}=0.$$

A-benn ar fin ez eo an daveadur a gevaraez da dremen eus ar $S_k$-où d'ar $P(\mathbf{r})$:

$$P(\mathbf{r})=\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{r+k}{r}S_{r+k},$$

eleze:

$$P(\mathbf{r})=\binom{r}{r}S_r-\binom{r+1}{r}S_{r+1}+\cdots+(-1)^k\binom{r+k}{r}S_{r+k}+\cdots+(-1)^{n-r}\binom{n}{r}S_n.$$

Mar doder dre gendivizad :

$$S_0=1,$$

e tisoc'her evit $r=0$ gant delakadenn Poincaré:

$$\begin{aligned}P(\mathbf{0})&=P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n})\\&=S_0-S_1+S_2-\cdots+(-1)^nS_n.\end{aligned}$$

Ur c'houneiad a gevaraez skrivañ an daveadur o tewerzhañ $P(\mathbf{r})$ zo:

$$P(\mathbf{r})=\frac{S^r}{(1+S)^{r+1}}.$$

Rak, o lakaat ez eo $|S|<1$, e teu :

$$\frac{S^r}{(1+S)^{r+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{r+k}{r}S^{r+k}.$$

Mar kendivizer erlec'hiañ er parder-se $S_{r+k}$, pa vez $r+k\leqslant n$, ha 0, pa vez $r+k>n$ ouzh $S^{r+k}$, e tisoc'her ervat gant ar reollun o reiñ $P(\mathbf{r})$.

**SKOUER** — Fiziañ a ra $n$ den o zog er gwiskva kent perzhiañ en un nozvezh laouen. En dibenn e c'hoarvez ur chanadenn dredan ha pep hini a gemer un tog dre zargouezh. Pe debegezh eo an darvoud : $r$ den rik a adkav o zog ?

Kentañ penn ez eo dav savelañ ar bondeskad $\Omega$, eleze an darvoudoù keittebek amparet gant an holl zoareoù da lakaat an dud da glotañ ouzh an togoù. A se ez eus $n!$ darvoud keittebek.

Dezanvomp dre $A_i$ an darvoud : An den ibiliet $i$ a adkav e dog. Da neuze :

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

ha da heul :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Ent hollek : $$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$$

ha neuze : $$S_k = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Alese : $$P(\mathbf{r}) = \frac{1}{r!}\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right].$$

Eleze, oc'h aroueziñ dilerc'h a'n urzh $k$ ar steudad $\mathrm{e}^{-1}$ dre $R_k$:

$$\mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^k}{k!} + R_k$$

$$P(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{-1} - R_{n-r}}{r!}.$$

Hogen ar steudad $\mathrm{e}^{-1}$ a gengerc'h buan kenan :

$$R_3 = 0,0346 \quad ; \quad R_4 = -0,0071 \quad ; \quad R_5 = 0,0012 \quad ; \quad R_6 = -0,0002.$$

Da heul, adal ma'z eo $n$ brasoc'h eget $r$ eus 5 pe 6 unanenn, ez eo an debegezh $P(\mathbf{r})$ dambar da:

$$P(\mathbf{r}) \simeq \tfrac{1}{\mathrm{e}r!}.$$

Dont a reer d'an disoc'h dic'hortoz-mañ : an debegezh ez adkavfe pep hini eus an $r$ den rik ha rik e dog zo dizalc'h koulz lavarout diouzh niver an dud, adal ma'z eo $n$ brasoc'h eget $r$ eus un unanennoù bennak. Evit pep hini, tebegezh adkavout e dog a zigresk gant $n$ (par eo da $\frac{1}{n}$), hogen seul vrasoc'h $n$, seul vrasoc'h ivez niver an dud e-tailh da adkavout o zog. A-benn ar fin ez anad ur c'hempouez etre an daou duadur. Da skouer, adal ar mare ma'z eo $n$ brasoc'h eget 5 pe 6 ez eo an debegezh ez adkavfe un den da nebeutañ e dog par da $1 - 1/\mathrm{e} \simeq \frac{2}{3}$.

| $n =$ | $r = 0$ | $r = 1$ | $r = 2$ | $r = 3$ | $r = 4$ | $r = 5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | – | 1 | – | – | – | – |
| 2 | 0,5 | – | 0,5 | – | – | – |
| 3 | 0,333 | 0,5 | – | 0,167 | – | – |
| 4 | 0,375 | 0,333 | 0,250 | – | 0,042 | – |
| 5 | 0,367 | 0,375 | 0,167 | 0,083 | – | 0,008 |
| 6 | 0,368 | 0,367 | 0,188 | 0,056 | 0,021 | – |
| 7 | 0,368 | 0,368 | 0,183 | 0,063 | 0,014 | 0,004 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\infty$ | 0,368 | 0,368 | 0,184 | 0,061 | 0,015 | 0,003 |

Notañ ez eo mannel an debegezh ez adkavfe $n-1$ den rik ha rik o zog. A hent all dasparzh harzat ($n=\infty$) niver an dud oc'h adkavout o zog zo dasparzh Poisson e arventenn o vezañ par da 1 :

$$P(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{e}^{-1}1^r}{r!} = \frac{1}{\mathrm{e}r!}.$$

### 12. Sevenidigezh $r$ darvoud da nebeutañ e-touez $n$

Eus an daveadur savelet amañ diaraok e tezreer an hini a ro tebegezh sevenidigezh $r$ darvoud *da nebeutañ* e-touez an darvoudoù $A_1, \ldots, A_n$.

Bezet $[\mathbf{r}]$ an darvoud :

$$[\mathbf{r}] : r \text{ darvoud } A_i \textit{ da nebeutañ} \text{ zo sevenet.}$$

Bez' ez eus :

$$(\mathbf{r}) = [\mathbf{r}] - [\mathbf{r+1}]$$

ha da heul :

$$P(\mathbf{r}) = P_{[\mathbf{r}]} - P_{[\mathbf{r+1}]}.$$

Alese an daveadur etre an $S_k$-où hag ar $P_{[\mathbf{r}]}$-où :

$$
\begin{aligned}
S_k &= \sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} P(\mathbf{r}) = \sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} P_{[\mathbf{r}]} - \sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} P_{[\mathbf{r+1}]} \\
&= \binom{r}{k} P_{[\mathbf{r}]} + \sum_{r=k+1}^{n} \left[ \binom{r}{k} - \binom{r-1}{k} \right] P_{[\mathbf{r}]} - \binom{k}{k} P_{[\mathbf{r+1}]} \\
&= \binom{k-1}{k-1} P_{[\mathbf{r}]} + \sum_{r=k+1}^{n} \binom{r-1}{k-1} P_{[\mathbf{r}]} \qquad \text{rak} \quad P_{[\mathbf{r+1}]} = 0 \\
&= \sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1} P_{[\mathbf{r}]},
\end{aligned}
$$

eleze :

$$\mathbf{S} = N\mathbf{P}_{[\ ]}$$

$N$ o vezañ an oged :

$$
\begin{vmatrix}
\binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} \\
0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n-1}{1} \\
0 & 0 & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n-1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \dots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & \binom{n}{n}
\end{vmatrix}.
$$

ha $\mathbf{P}_{[\ ]}$ ar sturiadell-bann a zaveennoù $\mathbf{P}_{[1]}, \dots, \mathbf{P}_{[n]}$.

Heñvel eo an oged $N$ ouzh an oged $M$ hon eus gwelet diaraok :

$$
n_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{mar} \quad i > j, \\ \binom{j-1}{i-1} & \text{mar} \quad i \leqslant j. \end{cases}
$$

He ginad zo an oged a dermen hollek :

$$
v_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{mar} \quad i > j, \\ (-1)_{j-1} \binom{j-1}{i-1} & \text{mar} \quad i \leqslant j. \end{cases}
$$

(Heñvel eo an dezreadur ouzh an hini a-zivout ginad $M$).

Da heul e c'hounezer an daveadur o tewerzhañ ar $P_{[\mathbf{r}]}$-où a-gevreizh d'an $S_k$-où :

$$P_{[\mathbf{r}]} = \binom{r-1}{r-1} S_r - \binom{r}{r-1} S_{r+1} + \cdots + (-1)^k \binom{r+k-1}{r-1} S_{r+k} + \cdots$$
$$+(-1)^{n-r} \binom{n-1}{r-1} S_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{r-1} S_{r+k}$$

Evit $r = 1$ e tisoc'h an daveadur-se gant delakadenn Poincaré :

$$P_{[\mathbf{1}]} = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Ar rezhienn-mañ da heul zo ur c'houneiad evit jediñ $P_{[\mathbf{r}}$ :

$$P_{[\mathbf{r}} = \frac{S^r}{(1+S)^r},$$

mar kendivizer, e dispakadur $S^r/(1+S)^r$, amsaviñ $S^{r+k}$ dre $S_{r+k}$, keit ha ma'z eo $r+k$ bihanoc'h pe bar ouzh $n$, ha dre 0, pa vez $r+k$ brasoc'h eget $n$.

Tebegezh sevenidigezh $r$ darvoud $A_i$ *d'ar muiañ* zo par da :

$$P(r \text{ d'ar muiañ}) = 1 - P_{[\mathbf{r+1}]} = 1 + \sum_{k=1}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{r} S_{r+k}.$$

**EVEZHIADENN**

Reollun binom Newton a gevaraez kaout war-eeun ginad an oged $N$.

Desellomp diazez $A$ ar polinomoù a'n derez $n-1$:

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1},$$

eleze :

$$a_r = X^r, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1,$$

hag an diazez $B$ :

$$1, 1+x, (1+x)^2, \ldots, (1+x)^{n-1},$$

eleze :

$$b_r = (1+x)^r.$$

An daveadur etre an $a_r$-où hag ar $b_r$-où a c'hell bezañ rezhiennet :

$$
\begin{aligned}
b_r = (1+x)^r &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a_k \\
a_r = x^r = [(1+x)-1]^r &= \sum_{k=0}^{r} (-1 -^{r-k} \binom{r}{k} a_k \\
a_r &= \sum_{k=0}^{r} ({}_1)^{r-k} \binom{r}{k} b_k.
\end{aligned}
$$

Oc'h arouezñ dre **a** ha **b** ar sturiadelloù a zaveennoù $a_r$ ha $b_r$ e teu (o lakaat $n-1$ hebar da skouer):

$$
\mathbf{b} = \left| \begin{array}{ccccc}
\binom{0}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \dots & 0 \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-1}
\end{array} \right| \mathbf{a}
$$

$$
\mathbf{a} = \left| \begin{array}{ccccc}
\binom{0}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\
\binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \dots & 0 \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-1}
\end{array} \right| \mathbf{b}
$$

hag an div oged zo kenginadoù. An hini gentañ zo treuzlec'hiedenn $N$, an eil zo da heul treuzlec'hiedenn $N^{-1}$.

Heñvel dra, da gaout ginad an oged $M$ e spir desellout ar reizhiad daveadurioù a zo etre ar c'hementadoù $c_r = b_r - 1$ hag $a_r$ evit $r = 1, 2, \dots, n$ :

$$\mathbf{c} = M\mathbf{a}.$$

## 2.3 REOLLUN AN TEBEGOÙ KENAOZAT

### 2.3.1 Digoradur

Bezet daou zarvoud $A$ ha $B$, elfennoù ar familh $\mathcal{F}(\Omega)$ tebekaet war ar bondeskad $\Omega$ dre an arloadur $P$. An tebegoù $P(A), P(B), P(A \cap B)$ zo savelet ha goulakaat a reer $P(A) \neq 0$. O c'houzout ez eo sevenet $A$, pe debegezh eo $B$.

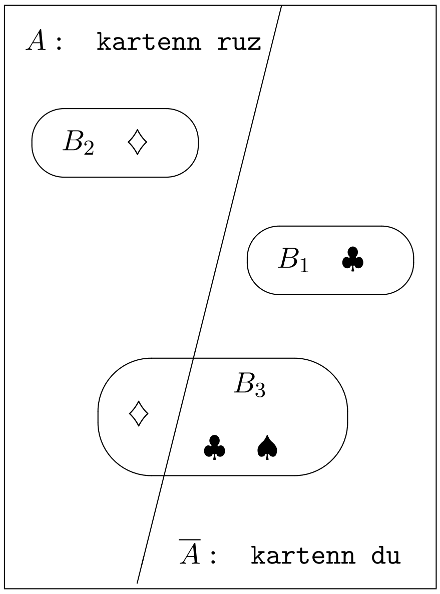
Dav merzhout ez eo touellus seurt goulenn. E gwir, an tebekadur savelet betek henn zo $P$ war ar bondeskad $\Omega$ ha splann eo n'eus ket anv a $P$ er goulenn, pa ouzer ez eo sevenet $A$. Ret eo enta savelañ un arloadur tebekaat nevez, eleze ur rizh tebekadur nevez. Ne spir ket goulenn tebegezh un darvoud : dav spisaat bewech ar bondeskad hag an tebekadur savelet warnañ.

**SKOUER** — Eus ur spletad 32 gartenn e tenner unan. Bezet an darvoud :

$A$ : Ar gartenn dennet zo ruz. A se :

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Evit an darvoud $B$, desellomp lies degouezh :




**1**. Darvoud $B_1$ : Un dreflezenn eo :

$$P(B_1) = \frac{1}{4}.$$

Mar gouzer avat ez eo sevenet $A$ (kartenn ruz) ez eo anvezus an darvoud $A \cap B_1$:

$$P(A \cap B_1) = 0.$$

**2.** Darvoud $B_2$ : Ar gartenn dennet zo ur garavenn :

$$P(B_2) = \frac{1}{4}.$$

O vezañ $B_2 \subseteq A$ ez eo an darvoud $A \cap B_2$ par da $B_2$. Hag :

$$P(A \cap B_2) = \frac{1}{4}.$$

**3.** Darvoud $B_3$ : Ar gartenn dennet n'eo ket ur geurenn. Neuze :

$$B_3 = \{\text{treflez, karo, pikez}\}.$$

A se :

$$P(B_3) = \frac{3}{4}.$$

Hogen mard eo sevenet $A$, $A \cap B_3 = \{\text{karo}\}$ ha $P(A \cap B_3 = \frac{1}{4}$.

Sed ar gudenn enta :

An tebegoù $P(A), P(B), P(A \cap B)$, darvoudoù evel $A, B, A \cap B$ parzhioù ar bondeskad $\Omega$, zo festet ha $P(A) \neq 0$.

Da amveziadoù an amprouenn o savelañ $\Omega$ ez ouzhpennomp ar stlenn-mañ: sevenet eo $A$.

Adal neuze e tesellomp tebegezh an darvoud $A \cap B$ er bondeskad $A$. Teskad ar bezusterioù zo $A$ enta, eleze $A \cap B + A \cap \overline{B}$.

Tebegezh $B$ en amveziad $A$ zo sevenet zo e gwir tebegezh an darvoud $A \cap B$ savelet dre un tebekadur $P'$ eus $\mathcal{F}(\Omega)$ etrezek $\mathbb{R}^+$ anpar al liesañ da $P$ o tebekaat $[\Omega, \mathcal{F}(\Omega)]$.

Aroueziomp dre $A$ un darvoud bezus ha dre $B_i$ un darvoud diforzh eus $\mathcal{F}(\Omega)$. Bezet $E_i = A \cap B_i$. Neuze ez eo $E_i$ un elfenn eus ar familh $\mathcal{F}(\Omega)$.

Bezet $\mathcal{F}_1(\Omega)$ an isfamilh-se, amparet gant ar parzhioù $A \cap B_i$ eus $A$.

Dienaat a reer aes ez eo $[\Omega, \mathcal{F}_1(A)]$ un egor tebekadus. Tebekaet eo gant strishâd an tebekadur savelet amañ diaraok da $\mathcal{F}_1(A)$.

## 2.3.2 Tebekadur amveziadek

### 2.3.2.1 Despizadur

Bezet $A$ ha $B$ daou zarvoud elfenn eus ur $\sigma$-aljebr $\mathcal{F}$ a barzhioù eus $\Omega$. Ar c'henskejadur $A \cap B$ zo ivez en $\mathcal{F}$, pa'z eo kloz evit ar c'henskejañ.

Goulakaomp ez eo $P(A) \neq 0$ ha desellomp familh $\mathcal{F}_A$ ar c'henskejadurioù $A \cap B$ ma'z eo festet $A$ ha ma'z eo $B$ un elfenn diforzh eus $\mathcal{F}$ :

$$B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}.$$

Ar familh $\mathcal{F}_A$-se zo ur familh a barzhioù eus $A$. Un isfamilh eus $\mathcal{F}$ eo. Evel $\mathcal{F}$ ez eo $\mathcal{F}_A$ ur $\sigma$-aljebr, he bondeskad o vezañ $A$.

Diwar an tebekadur $P$ a gevred pep elfenn eus $\mathcal{F}$ ouzh he zebegezh e saveler un arloadur $P_A$ a gevred pep elfenn $C$ eus $\mathcal{F}_A$ ouzh ur gwerc'hel $P_A(C)$ :

$$P_A(C) = \frac{P(C)}{P(A)}.$$

Gwiriañ a reer e savel an arloadur-se un tebekadur war $\mathcal{F}_A$ :

**1.** $P_A(C)$ zo ur gwerc'hel muiel pe vannel, pa'z eo keñver un niver muiel pe vannel : $P(C)$ ouzh un niver muiel strizh : $P(A)$.

**2.** Delvad $A$ bondeskad $\mathcal{F}_A$ zo ar gwerc'hel 1 :

$$P_A(A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

**3.** Delvad un anvevennad eriñvadus a elfennoù eus $\mathcal{F}_A$ zo sammad an delvadoù :

$$\begin{aligned} P_A(C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup \cdots) &= \frac{P(C_1 \cup \cdots \cup C_n \cup \cdots)}{P(A)} \\ &= \frac{P(C_1)}{P(A)} + \cdots + \frac{P(C_n)}{P(A)} + \cdots \\ &= P_A(C_1) + \cdots + P_A(C_n) + \cdots \end{aligned}$$

Da heul, an arloadur $P_A$ zo un tebekadur war $\mathcal{F}_A$.

Boas eur da arouezañ an tebekadur evel henn :

$$P_A\big(A \cap B\big) = P(B/A)$$

ha neuze :

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}.$$

Dav notañ avat ez eo $P(B/A)$, savelet evit nep $B$ elfenn ag $\mathcal{F}$, stag ouzh kenskejadur $A \cap B$ elfenn ag $\mathcal{F}_A$.

$P(B/A)$ a reer anezhi *tebegezh amveziadek* $B$ *e dalc'h (o c'houzout)* $A$ pe *tebegezh* $B$ *e dalc'h an amveziad* $A$ ha lenn a reer:

$$P(B/A) : \text{ tebegezh } B \text{ mar } A.$$

#### 2.3.2.2 Perzhioù

O virout ar c'houlakadenn $P(A) \neq 0$ e tisoc'h diouzh an despizadur ar perzhioù-mañ da heul evit nep $B$ eus $\mathcal{F}\Omega$ :

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset &\Longrightarrow P(B/A) = 0. \\ B \supseteq A &\Longrightarrow P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1. \\ A \supseteq B &\Longrightarrow P(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}. \end{aligned}$$

SKOUER — Ar skoueriòu roet er rannbennad **2.3.1** a ro :

$$P(\text{treflez}/\text{ruz}) = 0, \quad P(\text{karo}/\text{ruz}) = \tfrac{1}{2}, \quad P(\text{nann keur}/\text{ruz}) = \tfrac{1}{2}.$$

Heñvel dra hor befe : $P(\text{ruz}/\text{karo}) = 1$.

#### 2.3.2.3 Tebegezh kenaozat

Diwar despizadur an debegezh amveziadek e teu : mard eo $P(A) \neq 0$, neuze ez eus evit nep $B$ ag $\mathcal{F}(\Omega)$ :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A).$$

Heñvel dra, mard eo $P(B) \neq 0$ e saveler:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Neuze, mard eo $P(A) \neq 0$ hag $P(B) \neq 0$:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)}.$$

#### 2.3.2.4 Tebegoù kenaozat e degouezh lies darvoud

Hollekaat a reer reollun an tebegoù kenaozat e degouezh un niver diforzh a zarvoudoù :

$$\begin{aligned}P(A \cap B \cap C) &= P\left(A \cap (B \cap C)\right) = P(B \cap C/A) \\ &= P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)\end{aligned}$$

hag hollekoc'h :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

E se e tespizer tebegoù gant lies amveziad : un darvoud hepken, daou, h.a.

**EVEZHIADENN** — Ar c'heal a debegezh amveziadek a ziskouez ned eo ket tebegezh un darvoud un naouuster enien dezhañ : emañ an tebekadur e dalc'h an teskad dave. Tebegezh un darvoud n'he deus ster nemet mar bez bastet d'an tri amplegad da heul :

~ Savelet eo ar bondeskad $\Omega$;

~ Savelet ez eus bet ur $\sigma$-aljebr a barzhioù eus $\Omega$, ennañ an darvoud desellet ;

~ Savelet eo an tebekadur $P$ a gevred ouzh pep darvoud $A$ enbeziat en un diazez $\mathcal{F}_0$ eus $\mathcal{F}$ e debegezh.

Teurel pled ouzh an daveadur-mañ :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)}{P(A)} P(B).$$

Diskouez a ra penaos e c'hell sevenidigezh un darvoud $A$ daskemmañ tebegezh un darvoud all $B$. Liesaat a reer $P(B)$ tebegezh *a-gentouez* $B$ dre ar c'heñver $\frac{P(A/B)}{P(A)}$ da gaout tebegezh *a-zianouez* $B$. E c'haller enta, e-lec'h tebegezh amveziadek, ober gant *tebegezh a-zianouez* ivez.

## 2.4 DARVOUDOÙ DIZALC'H

### 2.4.1 Dizalc'h etre daou zarvoud

Bezet daou zarvoud $A$ ha $B$ a debegezh anvannel elfennoù ur $\sigma$-aljebr $\mathcal{F}$ a barzhioù eus $\Omega$.

Lavarout a reer ez eo an darvoud $B$ *dizalc'h* diouzh an darvoud $A$ e-keñver an tebekadur $P$ pe c'hoazh ez eo $A$ ha $B$ $P$-dizalc'h (a-wechoù e spisaer : dizalc'h *ent tebegel* hag anv a reer a : dizalc'h *tebegel* etre daou zarvoud) mar :

$$P(B/A) = P(B).$$

Tebegezh sevenidigezh $B$ a chom digemm na pa ve gouezet pe get hag eñ zo sevenet $A$.

Da neuze :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B),$$

pezh a empleg, mar $P(B) \neq 0$, en hon eus :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

E se ez eo an dizalc'h un daveadur *kemparzhek* : mard eo $B$ dizalc'h diouzh $A$ ez eo $A$ dizalc'h diouzh $B$ ha lavarout a reer ez eo $A$ ha $B$ dizalc'h kenetrezo, eleze kendizalc'h, ent resisoc'h e-keñver an tebekadur $P$, rak n'int ket dre ret dizalc'h e-keñver un tebekadur all.

### SKOUERIOÙ

1. Desellomp an daou zarvoud, pa daoler un diñs:
   - $A$ : Tennañ un tal hebar.
   - $B$ : Tennañ ul lieskement da dri.

Neuze :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \text{tebegezh da dennañ un tal hebar lieskement da dri} \\ &= \text{tebegezh da dennañ an tal 6} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Hogen $P(A) = \frac{3}{6}$ ha $P(B) = \frac{2}{6}$. Neuze :

$$P(A) \times P(B) = P(A \cap B).$$

Dezastum a reer ez eo dizalc'h ent tebegel an darvoud Tennañ un tal hebar hag an darvoud Tennañ ul lieskement da 3.

2. Desellomp bremañ ur gourzhskouer. Bezet un diñs kemparzhek eorizhek gant 10 tal niverennet eus 1 da 10 ha savomp an hevelep kudenn. En degouezh-mañ ez eo $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ ha $P(A \cap B) = P(6) = \frac{1}{10}$. Neuze :

$$P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B).$$

An daou zarvoud n'int ket dizalc'h ent tebegel, diazalc'h int. Mard eo dizalc'h ent tebegel daou zarvoud e talvez kement-mañ : gouzout ez eo sevenet unan anezho ne zegas stlenn ebet war sevenidigezh egile. Er c'hontrol, mard int diazalc'h, sevenidigezh un darvoud a ro dimp stlenn war sevenidigezh egile.

E se, gant un diñs 6 tal :

$$P(A/B) = P(A) = \frac{1}{2}.$$

E gwir, e degouezh an diñs 6 tal, mar gouzer ez eo an tal tennet lieskement da 3 ez eus dezhañ c'hoazh an debegezh $\frac{1}{2}$ da vezañ hebar, evel pa na ouzer netra.

Gant un diñs 10 tal e teu avat :

$$P(A/B) = \frac{P\big(A \cap B\big)}{P(B)} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}.$$

En degouezh-mañ, mar gouzer ez eo an tal lieskement da 3, e debegezh — azianouez enta — da vezañ hebar zo bremañ $\frac{1}{3}$, tra ma'z eo $\frac{1}{2}$ a-gentouez.

**EVEZHIADENN** — Desellomp an arnod dargouezhel-mañ : Teurel a reer ur pezh moneiz hag un diñs eorizhek. An disoc'h a noter. Sklaer eo n'o deus disoc'hoù ar pezh moneiz delanvad ebet war re an diñs, hag a-geveskemm. Lavarout a reer ez eo an daou rizh darvoudoù dizalc'h *ent beziadel*. Seurt dizalc'h beziadel a empleg an dizalc'h tebegel, evel a ziskouezomp amañ dindan evit ur skouer.

Bondeskad an arnod zo amparet gant daouac'hoù liesâd kartezel an daou deskad $\Omega = \{\text{pil}, \text{kroaz}\}$ hag $\Omega' = \{1, \ldots, 6\}$. A se ez eus 12 darvoud elfennel keittebek. Bezet $P$ an tebekadur. Jediñ a reer:

$$P(1/\text{pil}) = \frac{P\big(1 \cap \text{pil}\big)}{P(\text{pil})} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6}.$$

Hogen :

$$P(1) = P[\{(1, \text{pil})\}] + P[\{(1, \text{kroaz})\}] = 2\frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Ha neuze :

$$P(1/\text{pil}) = P(1) = P(1/\text{kroaz}),$$

pezh a dalvez ez eo $P$-dizalc'h an darvoudoù $A = \{1\}$ ha $B = \{pil\}$.

Teurel evezh ez empleg an dizalc'h beziadel an dizalc'h tebegel, hogen ar geveskemmenn ned eo ket gwir dre ret. An dizalc'h tebegel zo hollekoc'h eget an dizalc'h beziadel. Seurt desell a vo hollekaet amañ dindan.

### 2.4.2 Dizalc'h etre lies darvoud

Bezet tri darvoud $A$, $B$, $C$ dezho pep a debegezh anvannel. Lavarout a reer ez eo an darvoudoù-se dizalc'h *a-vloc'h* mard eo pep hini eus an tebegoù a-zianouez par d'an hini a-gentouez keñverek.

Da skouer :

$$P(A/B) = P(A/C) = P(A/B \cap C) = P(A)$$
$$P(A \cap B/C) = P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

An despizadur a astenner da lies darvoud : an darvoudoù $A_1, \ldots, A_n$ zo dizalc'h a-vloc'h kenetrezo mard eo pep hini eus an tebegoù a-zianouez par d'an debegezh a-gentouez keñverek.

Ent hollek, an tebegoù stag ouzh an $2^n$ domani $d$ despizet amañ diaraok (**2.2.3, 11**) zo e dalc'h $2^n - 1$ arventenn, mard eo diforzh an darvoudoù $A_1, \ldots, A_n$. Mard eo an darvoudoù $A_1, \ldots, A_n$ dizalc'h a-vloc'h kenetrezo ez eo peurzespizet tebegezh nep domani $d$ gant an $n$ tebegezh eus an darvoudoù $A_1, \ldots, A_n$. Neuze, an aljebr Boole — a zo ganet an elfennoù anezhañ diwar $A_1, \ldots, A_n$ dre gembodadur, kenskejadur pe glokadur (aljebr ennañ $2^{2^n}$ elfenn) — zo e dalc'h $n$ arventenn hepken e-lec'h $2^n - 1$. Da heul ez empleg an dizalc'h bloc'hel etre $n$ darvoud $2^n - n - 1$ amveziad (e ster an Dezrann).

**EVEZHIADENN** — Tri darvoud a c'hell bezañ dizalc'h daou ha daou, hep bezañ dizalc'h a-vloc'h evit kelo. Evit ma vefent dizalc'h a-vloc'h ez eo ret ma vent dizalc'h daou ha daou ha ma ve gwiriet ouzhpenn an amplegad :

$$P\big(A \cap B \cap C\big) = P(A) \times P(B) \times P(C).$$

**HOLLEKADURIOÙ**

**Despizadur 1**
Div reizhiad klok a zarvoudoù ag un egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$:

$$\{A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_m\} \text{ ha } \{B_1, \ldots, B_j, \ldots, B_l\}$$

zo dizalc'h e-keñver an tebekadur $P$, mard eo, evit nep daouac'h $(i, j)$ hevelep ma'z eo :

$$1 \leqslant i \leqslant m, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l,$$

$$\boxed{P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \times P(B_j)}.$$

**Despizadur 2**
Bezet $n$ darvoud $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ag un egor tebekaet $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), P)$.

Lavarout a reer ez eo an darvoudoù-se dizalc'h a-vloc'h e-keñver an tebekadur $P$, mard eus, evit nep isteskad $\{i_1, \ldots, i_k\}$ ag $\{1, \ldots, n\}$,

$$\boxed{P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times \cdots \times P(A_{i_k})}.$$

Mard eo $n$ darvoud dizalc'h a-vloc'h e-keñver $P$ ez empleg an despizadur diwezhañ-mañ ez int dizalc'h ivez daou ha daou.

**Dizalc'h ha digembez**
Arabat kemmeskañ dizalc'h ha digembez. An digembez zo ur perzh enien eus an daouadoù darvoudoù, forzh pe debekadur a ve war ar bondeskad : digembez eo $A$ ha $B$ mar bez goullo o c'henskejadur ha neuze ez eo mannel tebegezh ar c'henskejadur evit un tebekadur diforzh.

Er c'hontrol ez eo an dizalc'h etre $A$ ha $B$ ur perzh ereet ouzh an tebekadur $P$ a zo e werzhadoù tebegoù ar $\sigma$-aljebr ma emañ $A$ ha $B$ : dizalc'h eo an darvoudoù $A$ ha $B$ mard eo tebegezh o c'henskejadur par da liesâd o zebegoù (anvannel). E-se e c'houlaka an dizalc'h an andigembez dre ret.

**SKOUER**
Dezren ez eo dizalc'h daou zarvoud $A$ ha $B$ un amveziad ret ha spirus evit ma ve dizalc'h ar reizhiadoù klok $\{A, \overline{A}\}$ ha $\{B, \overline{B}\}$.

Anat eo ez eo ret an amveziad. Diskouezomp ez eo spirus. Notomp $p = P(A)$ ha $q = P(B)$. Neuze : $P(A \cap B) = pq$,

$$\begin{aligned}
\text{alese :} \quad P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\
&= p - pq = p(1-q) \\
&= P(A) \times P(\overline{B}), \\
P(\overline{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\
&= q - pq = q(1-p) = P(B) \times P(\overline{A}), \\
\text{hag :} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B) \\
&= (1-p) - q(1-p) = (1-q)(1-p) \\
&= P(\overline{B}) \times P(\overline{A}).
\end{aligned}$$

An daolenn amañ dindan a ziskouez dizalc'h ar reizhiadoù $\{A, \overline{A}\}$ ha $\{B, \overline{B}\}$ ha tebegoù kenskejadurioù an darvoudoù $A, \overline{A}, B, \overline{B}$ jedet diwar an tebegoù marzel.

| $\cap$ | $A$ | $\overline{A}$ | Hollad |
|---|---|---|---|
| $B$ | $pq$ | $(1-p)q$ | $q$ |
| $\overline{B}$ | $p(1-q)$ | $(1-p)(1-q)$ | $1-q$ |
| Hollad | $p$ | $1-p$ | 1 |

## 2.5 REOLLUN BAYES

### 2.5.1 Kudenn Bayes

Bezet div arc'h $A_1$ hag $A_2$ enno boulloù gwenn ha boulloù du, ar c'henfeurioù hervez an daolenn amañ dindan :

| Arc'h / Liv | Boulloù gwenn | Boulloù du | Hollad |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $p_1$ | $q_1$ | 1 |
| $A_2$ | $p_2$ | $q_2$ | 1 |

Ren a reer an arnod dargouezhel da heul, dezhañ daou live :

- Kentañ lankad
Dibab dargouezhek unan eus an div arc'h ; bezet $\pi_1$ an tebegezh ez eo $A_1$ an arc'h dibabet ha $\pi_2 = 1 - \pi_1$ evit $A_2$.
- Eil lankad
Tennañ dargouezhek ur voull eus an arc'h dibabet er c'hentañ lankad.

Houmañ eo kudenn Bayes:

O c'houzout ez eo gwenn ar voull tennet en eil lankad, pe debegezh eo e teufe eus an arc'h $A_1$ ?

Aksiomennoù an tebegoù hollel hag an tebegoù kenaozat a gevaraez respont d'ar goulenn. Bezet an darvoudoù-mañ da heul :

$A_1$: an arc'h dibabet er c'hentañ lankad zo $A_1$;
$A_2$: an arc'h dibabet er c'hentañ lankad zo $A_2$;
$G$: ar voull tennet en eil lankad zo gwenn;
$D$: ar voull tennet en eil lankad zo du.

Bezet roadennoù ar gudenn :

$$P(A_1) = \pi_1,$$
$$P(A_2) = \pi_2,$$
$$P(G/A_1) = p_1,$$
$$P(G/A_2) = p_2,$$

hag an debegezh klasket zo :

$$P(A_1/G).$$

Dre zedalvezout aksiomenn an tebegoù kenaozat e teu :

$$P(A_1/G) = \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A_1) \times P(G/A_1)}{P(G)} = \frac{\pi_1 p_1}{P(G)}.$$

Hogen $A_1$ hag $A_2$ zo kenglokaus :

$$A_1 = \overline{A_2}.$$

Neuze :

$$G = G \cap (A_1 \cup \overline{A_1}) = G \cap (A_1 \cup A_2) = (G \cap A_1) \cup (G \cap A_2)$$

ha da heul, dre berzh aksiomenn an tebegoù hollel :

$$P(G) = P\left[(G \cap A_1) \cup (G \cap A_2)\right].$$

Hogen, diwar pezh zo amañ diaraok :

$$P(A_1 \cap G) = \pi_1 p_1$$

hag ivez :

$$P(A_2 \cap G) = \pi_2 p_2.$$

E teu enta :

$$P(G) = \pi_1 p_1 + \pi_2 p_2,$$

hag :

$$P(A_1/G) = \frac{\pi_1 p_1}{\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2}.$$

An disoc'h-se zo delakadenn Bayes ha gwiriañ a reer, evel ma tere, ez eo kenglokaus $P(A_1/G)$ ha $P(A_2/G)$:

$$P(A_1/G) + P(A_2/G) = \frac{\pi_1 p_1}{\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2} + \frac{\pi_2 p_2}{\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2} = 1\ ;$$

Eleze :

$$P(A_1 \cup A_2/G) = 1\,.$$

E se, an debegezh a-zianouez e ve bet dibabet an arc'h $A_1$ er c'hentañ lankad — pa ouzer ez eo bet tennet ur voull wenn en eil lankad — zo kenfeuriek war un dro ouzh :

- An debegezh a-gentouez ez eo bet dibabet $A_1$ er c'hentañ lankad : $\pi_1$;
- Kenfeur ar boulloù gwenn en arc'h $A_1$ : $p_1$.

Par eo an diforc'h etre $P(A_1/B) - P(A_1)$ da :

$$\frac{\pi_1 p_1}{\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2} - \pi_1 = \frac{\pi_1 \pi_2 (p_1 - p_2)}{\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2}.$$

Mannel eo an diforc'h-se nemet mar :

$p_1 = p_2$ : par eo kenfeur ar boulloù en div arc'h ha gouzout an disoc'h en dibenn ne zegas stlenn ebet ouzhpenn a-zivout an arc'h dibabet el lankad kentañ ;

$\pi_1$ pe $\pi_2 = 0$ : unan hepken eus an div arc'h a c'hell bezañ dibabet el lankad kentañ ha gouzout an disoc'h en dibenn na gemm netra : da skouer, mard eo $\pi_2 = 0$, ez eus :

$$P(A_1/G) = P(A_1/D) = P(A_1) = 1.$$

Muiel eo an diforc'h mard eo $p_1$ brasoc'h eget $p_2$ : pa ouzer ez eo gwenn ar voull tennet e kresk an debegezh stag ouzh an arc'h $A_1$ mard eo brasoc'h enni kenfeur ar boulloù gwenn eget en arc'h $A_2$. En degouezh kontrol e tigresk.

Notañ e c'hell delakadenn Bayes bezañ rezhiennet :

$$\frac{P(A_1/G)}{P(A_2/G} = \frac{P(A_1)}{P(A_2)} \times \frac{P(G/A_1)}{P(G/A_2)} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \times \frac{p_1}{p_2},$$

a zezgerier evel henn : mar he deus an arc'h $A_1$ $a$ gwech muioc'h a chañsoù eget $A_2$ da vezañ dibabet el lankad kentañ ha mard eus enni $b$ gwech muioc'h a voulloù gwenn, neuze ez eus dezhi, a-zianouez, $ab$ gwech muioc'h a chañsoù eget an arc'h $A_2$ da vezañ bet dibabet er c'hentañ lankad, pa ouzer ez eo gwenn ar voull tennet en dibenn.

### 2.5.2 Hollekadur delakadenn Bayes

Hollekaomp delakadenn Bayes da zegouezh un teskad $n$ arc'h, enno boulloù a $k$ liv diforc'h. Bezet $p_h^{(i)}$ kenfeur ar boulloù a liv $h$ en arc'h $A_i$ :

| Liv / Arc'h | ... | $h$ | ... | Hollad |
|---|---|---|---|---|
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $A_i$ | ... | $p_h^{(i)}$ | ... | 1 |
| ... | ... | ... | ... | ... |

| Arc'h | ... | $A_i$ | ... | Hollad |
|---|---|---|---|---|
| Tebegoù a-gentouez | ... | $\pi_i$ | ... | 1 |

En ul lankad kentañ e tibaber un arc'h, an tebegoù a-gentouez o vezañ $\pi_1, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_n$. En un eil lankad e tenner ur voull eus an arc'h bet dibabet el lankad kentañ.

Pe debegezh eo dibab an arc'h $A_i$ el lankad kentañ pa ouzer ez eo ar voull dibabet en eil lankad a liv $h$ ?

Heñvel eo saveladur ar reollun-se ouzh an degouezh ma'z eo $n = k = 2$. Bezet $A_i$ ha $B_h$ an darvoudoù :

$A_i$ : An arc'h dibabet el lankad kentañ zo $A_i$,

$B_h$ : Ar voull tennet en eil lankad zo a liv $h$.

Bez' ez eus :

$$P(A_i) = \pi_i,$$
$$P(B_h/A_i) = p_h^{(i)}.$$

Alese :

$$\begin{aligned} P(A_i/B_h) &= \frac{P(A_i \cap B_h)}{P(B_h)} \\ &= \frac{P(A_i)P(B_h/A_i)}{P(B_h)} = \frac{\pi_i p_h^{(i)}}{P(B_h)}. \end{aligned}$$

Hogen :

$$B_h = B_h \cap (A_1 \cup A_2 \cap \ldots \cup A_n).$$

Da heul :

$$P(A_i/B_h) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B_h) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_h/A_i).$$

Ha neuze :

$$P(A_i/B_h) = \frac{\pi_i p_h^{(i)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i p_h^{(i)}}.$$

Dezgeriañ a reer an disoc'h-se :

Bezet ur familh tebekaet a zarvoudoù $A_1, \ldots, A_n$, digembez kenetrezo. Pep darvoud eus ar familh a gas da sevenidigezh unan a'n darvoudoù digembez $B_1, \ldots, B_k$. Neuze, tebegezh an darvoud $A_i/B_h$ a zewerzher dre :

$$P(A_i/B_h) = \frac{P(A_i)P(B_h/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_h/A_i)},$$

an tebegoù $P(A_i)$ ha $P(B_h/A_i)$ o vastañ da :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1,$$
$$\forall i : \quad \sum_{h=1}^{k} P(B_h/A_i) = 1.$$

**SKOUER**

Div arc'h $A_1$ hag $A_2$ zo enno boulloù ruz ha boulloù du hervez an daolenn amañ dindan :

| Liv / Arc'h | du | ruz | Hollad |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 5 |
| $A_2$ | 1 | 5 | 6 |

Teurel a reer un diñs. Mar deu ur born pe un daou e tenner ur voull eus $A_1$. Mar bez un niver all e tenner ur voull eus $A_2$. O c'houzout ez eo du ar voull tennet, pe debegezh eo e teufe eus an arc'h $A_1$ ?

*Respont* : Bezet $A$ an darvoud : An diñs a zegas ur born pe un daou ha $B$ an darvoud : Du eo ar voull tennet.

Klask a reer enta : $P(A/B)$. Hogen :

$$P(A) = \frac{1}{3}, \qquad P(\overline{A}) = \frac{2}{3},$$
$$P(B/A) = \frac{2}{5}, \qquad P(B/\overline{A}) = \frac{1}{6}.$$

Reollun Bayes a gevaraez jediñ $P(A/B)$ :

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}+\frac{1}{9}} = \frac{6}{11}\,.$$

Ar jedadur diwezhañ-mañ a ziskouez :

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{2}{15} + \frac{1}{9} = \frac{11}{45}\,;$$

o vezañ :

$$P(B \cap A) = P(A)P(B/A) = \frac{2}{15},$$

e tezreer ervat :

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{6}{11}\,.$$

**EVEZHIADENN** — Tebegoù Bayes a reer (raed) anezho tebegoù an *arbennoù* : $P(A_i/B_h)$ zo an debegezh stag ouzh an arbenn $A_i$, pa ouzer ez eo an devouded an darvoud $B_h$.

### 2.5.3 Evezhiadennoù a-zivout tebegoù Bayes

Teurel evezh ouzh an diforc'h etre a) un daolenn o c'houluniañ div reizhiad klok a zarvoudoù dizalc'h kenetrezo ha b) hini darvoudoù e dalc'h ur reizhiad klok a zarvoudoù.

a) Adkemeromp ar skouer amañ diaraok. Div arc'h, $A_1$ hag $A_2$ zo enno boulloù ruz ha boulloù du hervez an daolenn amañ dindan :

| Liv / Arc'h | du | ruz | Hollad |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 3 | 5 |
| $A_2$ | 1 | 5 | 6 |

Arnod dargouezhel :
Tennañ a reer ur voull eus $A_1$ hag unan eus $A_2$ o notañ o liv hervez an urzh. An disoc'hoù zo neuze an daouac'hoù $(d_1, d_2), (d_1, r_2), (r_1, d_2)$ ha $(r_1, r_2)$, dasparzhet an niver anezho hervez an daolenn amañ dindan :

| $A_2$ \ $A_1$ | 3 ruz | 2 du | Hollad |
|---|---|---|---|
| 5 ruz | 15 | 10 | 25 |
| 1 du | 3 | 2 | 5 |
| Hollad | 18 | 12 | 30 |

Alese taolenn an tebegoù o c'houluniañ disoc'hoù bezus an arnod dargouezhel :

| $A_2$ \ $A_1$ | $A =$ ruz | $\overline{A} =$ du | Hollad |
|---|---|---|---|
| $B =$ ruz | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{6}$ |
| $\overline{B}=$ du | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Hollad | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 |

Un nebeut evezhiadennoù zo d'ober :

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \\
P(A \cap \overline{B}) &= P(A) \times P(\overline{B}) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10} \\
P(\overline{A} \cap B) &= P(\overline{A} \times P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \\
P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

Hag ivez, mar deseller da skouer $B$ evel bondeskad, e jeder :

$$
\begin{aligned}
P(A/B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5} = P(A) \\
P(\overline{A}/B) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5} = P(\overline{A})
\end{aligned}
$$

Heñvel dra evit an tebegoù amveziadek mar kemerer $\overline{B}$, $A$ pe $(\overline{A})$ da vondeskadoù.

Sed enta luniadur taolenn an tebegoù stag ouzh div reizhiad klok a zarvoudoù dizalc'h.

b) Distroomp bremañ da skouer ar bajenn 73, eleze : Teurel a reer un diñs. Mar deu ur born pe un daou e tenner ur voull eus $A_1$. Mar bez un niver all e tenner ur voull eus $A_2$. Savomp an daolenn o terc'hennañ luniadur an tebegoù :

| Arc'h / Liv | $A$ = dibab $A_1$ | $\overline{A}$ = dibab $A_2$ | Hollad |
|---|---|---|---|
| $B$ = du | $\boxed{P(B/A) = \frac{2}{5}}$ $P(B \cap A) = \frac{2}{15}$ | $\boxed{P(B/\overline{A}) = \frac{1}{6}}$ $P(B \cap \overline{A}) = \frac{1}{9}$ | $\frac{11}{45}$ |
| $\overline{B}$ = ruz | $\boxed{P(\overline{B}/A) = \frac{3}{5}}$ $P(\overline{B} \cap A) = \frac{1}{5}$ | $\boxed{P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{5}{6}}$ $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = \frac{5}{9}$ | $\frac{34}{45}$ |
| Hollad | $\boxed{\frac{1}{3}}$ | $\boxed{\frac{2}{3}}$ | 1 |

En degouezh-mañ en hon eus darvoudoù (bann kentañ) e dalc'h ur reizhiad klok a zarvoudoù (rez kentañ) : $\{B, \overline{B}\}$ ha $\{A, \overline{A}\}$. En daolenn ez eo sterniet roadennoù ar gudenn.

Mar anavezer tebegoù a-gentouez ar bannoù, eleze $P(A)$ ha $P(\overline{A})$, hag ivez an tebegoù a-zianouez $P(B/A), P(B/\overline{A}), P(\overline{B}/A), P(\overline{B}/\overline{A})$, e c'haller jediñ tebegoù ar c'henskejadurioù $P(B \cap A), \ldots, P(\overline{B} \cap \overline{A})$.

A se ez eo :

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = \frac{11}{45}$$
$$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) + P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = (P(\overline{B} \cap A) + P(\overline{B} \cap \overline{A}) = \frac{34}{45}$$

Mar hollekaomp ar skouer diwezhañ e c'haller sevel an daolenn da heul :

| $B_h \backslash A_i$ | $A_1$ | $\dots$ | $A_i$ | $\dots$ | $A_n$ | Hollad |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $B_h$ | $P(B_h/A_1)$ | $\dots$ | $P(B_h/A_i)$ | $\dots$ | $P(B_h/A_n)$ | $P(B_h)$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| Hollad | $P(A_1)$ | $\dots$ | $P(A_i)$ | $\dots$ | $P(A_n)$ | 1 |

Mar anavezer tebegoù $P(A_i)$ ar bannoù hag ivez an tebegoù a-zianouez $P(B_h/A_i)$ er bannoù e c'haller jediñ an tebegoù $P(B_h \cap A_i)$. Tebegezh ar rez $B_h$ zo :

$$\boxed{P(B_h) = \sum_{i=1}^{n} B_h \cap A_i = \sum_{i=1}^{n} [P(A_i) \times P(B_h/A_i)]}\,.$$

Bennozh d'an daolenn amañ diaraok e c'hell kudenn Bayes bezañ dezgeriet evel henn :

Festet eo tebegoù $P(A_i)$ ar bannoù hag ivez tebegoù a-zianouez ar $B_h$-où er bannoù, eleze $P(B_h/A_i)$. Jediñ tebegoù a-zianouez an darvoudoù $A_i$ er rez $B_h$, eleze $P(A_i/B_h)$.

Kement-se a dalvez e kemerer $B_h$ da vondeskad. Neuze :

$$\boxed{P(A_i/B_h) = \frac{P(B_h \cap A_i)}{P(B_h)}}\,.$$

Hogen :

$$P(B_h \cap A_i) = P(A_i) \times P(B_h/A_i);$$
$$P(B_h) = \sum_{i=1}^{n} [P(A_i) \times P(B_h/A_i)]\,.$$

Alese :

$$\boxed{P(A_i/B_h) = \frac{P(A_i) \times P(B_h/A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} [P(A_i) \times P(B_h/A_i)]}}\,.$$

EVEZHIADENN — Merzhout mat : diazezet eo goulun Bayes war un dro war anaoudegezh tebegoù a-gentouez ar reizhiad klok a zarvoudoù $A_i$, disoc'hoù un arnod dargouezhel hag ivez war sevenidigezh dargouezhek an darvoudoù $B_h$, dezho an tebegoù a-zianouez $P(B_h/A_i)$. Ma ne revez ket an amveziadoù-se ne c'haller ket dedalvout delakadenn Bayes. Ent dibarek pa zeverker ent tidek tebegoù a-gentouez d'an $A_i$-où hep o gouzout e tisoc'her war forzh petra.

## 2.6 TEBEKADUR SAVELET WAR LIESÂD KARTEZEL DAOU EGOR TEBEKAET

### 2.6.1 Tebekadur savelet war $\Omega \times \Omega'$

Bezet $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ hag $(\Omega', \mathfrak{P}(\Omega'), P')$ daou deskad tebekaet bevennek. Savelañ a reer un tebekadur liesâd $P''$ war $\Omega \times \Omega'$ :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ hag } \forall j \in \{1, \ldots, p\},\ P''(\{(\omega_i, \omega'_j)\}) = P(\{\omega_i\}) \times P'(\{\omega'_j\})},$$

gant $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ hag $\Omega' = \{\omega'_1, \ldots, \omega\prime_p\}$, dezho ar priñvelion-mañ enta : $\text{Card}(\Omega) = n$ ha $\text{Card}(\Omega') = p$.

Dezren a reer :

$$\boxed{\forall A \in \text{ hag } \forall A' \in {}',\ P''(A \times A') = P(A) \times P'(A')}.$$

Bezet enta $E = A \times \Omega'$ (gant $A \subseteq \Omega$ ha neuze $E \subseteq \Omega \times \Omega'$) ha bezet ivez $F = \Omega \times A'$ (gant $A' \subseteq \Omega'$ ha neuze $F \subseteq \Omega \times \Omega'$).

Bez' ez eus neuze :

$$E \cap F = (A \times \Omega') \cap (\Omega \times A') = A \times A';$$

alese :

$$P''(E \cap F) = P''(A \times A') = P(A) \times P'(A').$$

Hag o vezañ ma'z eo $P'(\Omega') = 1$ :

$$P''(E) = P''(A \times \Omega') = P(A) \times P'(\Omega') = P(A)$$

hag heñvel dra, o vezañ ma'z eo $P(\Omega) = 1$:

$$P''(F) = P''(\Omega \times A') = P(\Omega) \times P'(A') = P'(A').$$

Neuze :

$$\boxed{P''(E \cap F) = P(A) \times P'(A') = P''(E) \times P''(F)},$$

pezh a ziskouez ez eo $P''$-dizalc'h an darvoudoù $E$ hag $F$.

Dezren a reer ez eo $P''$ an tebekadur nemetañ war $\Omega \times \Omega'$ dezhañ ar perzh-se. Pezh a dalvez : mar bez ar perzh-se gant un tebekadur savelet war $\Omega \times \Omega'$ ez eo an tebekadur liesâd, hevelep ma ve :

$$\forall A \in \Omega \text{ hag } \forall A' \in \Omega',\ P''(A \times A') = P(A) \times P'(A').$$

### 2.6.2 Hollekadur d'ul liesâd bevennek a $n$ egor

Savelomp war $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ un tebekadur unel $P$, hevelep ma'z eo :

$$\forall (A_1, \ldots, A_n) \subseteq \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n,\ P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1) \times P_2(A_2) \times \cdots \times P_n(A_n)$$

mard eo $P_1, \ldots, P_2$ an tebekadurioù savelet war $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$.

Ent dibarek, mard eo $\Omega_1 = \cdots = \Omega_n = \Omega$ e c'haller savelañ war $\Omega^n$ an tebekadur liesâd $P''$ dre :

$$P''(\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ periad}}) = P''(A^n) = [P(A)]^n$$

mard eo $P$ an tebekadur savelet war $\Omega$.

**EVEZHIADENN** — A bouez eo an tebekadur liesâd e degouezh daou arnod dargouezhel dizalc'h sevenet en ur ser. Da skouer : Teurel a reer daou ziñs war un dro.

Anat eo ez eo kevatal da arren un arnod dargouezhel meur a wech en un amveziadoù. Da skouer : Teurel un diñs meur a wech lerc'h ouzh lerc'h, pe Tennañ boulloù eus un arc'h goude o azlakaat bewech enni, pe Teurel ur pezh moneiz meur a wech lerc'h ouzh lerc'h.

Arreadur un arnod dargouezhel o vezañ un degouezh paot en holl skiantoù (Fizik, Bevoniezh, h.a.) e kevaraez an debegouriezh delvanañ ar plegennoù louer ha neuze rakwelout ent jedoniel disoc'h un niver bennak a arnodoù. Unan eus an degouezhioù-se zo plegenn Bernoulli a sell ouzh arreadur un arnod dezhañ daou vezuster hepken, evel da skouer teurel ur pezh gant an daou zisoc'h bezus nemeto : pil pe groaz. Kement-se a vo gwelet amañ pelloc'h.

## 2.7 AR GOULUNIOÙ TENNAÑ TEBEGOURIEL

### 2.7.1 Erouezadur ar c'hraf

Desellomp un arc'h enni $N$ boull, en o zouez $N_1$ a liv 1, $N_2$ a liv 2,..., $N_k$ a liv $k$.

Bezet $p_h$ kenfeur ar boulloù a liv $h$:

$$p_h = \frac{N_h}{N},$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1 \ .$$

Tennañ a reer dre zargouezh $n$ boull diouzh an arc'h. Bezet $n_h$ niver ar boulloù a liv $h$ bezant er standilhon ha bezet :

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

kenaoz ar standilhon evit a sell al livioù $1, 2, \ldots, k$.

Houmañ eo ar gudenn : pe debegezh eo $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ un dasparzh roet ?

An tennañ boulloù diouzh an arc'h a c'hell bezañ kaset hervez daou zoare :

• Tennañ bernoulliat pe tennañ gant azlakadur : tennañ a reer ar boulloù unan hag unan, pep hini o vezañ azlakaet en arc'h kent an dennadenn da heul.

• Tennañ dizilerc'h pe tennañ hep azlakadur : tennañ a reer ar boulloù unan hag unan, hep bezañ azlakaet en arc'h kent an dennadenn da heul, pe — pezh zo kevatal — o zennañ a reer en un taol.

### 2.7.2 An tennañ dizilerc'h

Gwelet hon eus e c'haller desellout an tennañ dizilerc'h evel an tennañ $n$ boull war un dro. Diskouez a raimp goude ez eo kevatal tennañ ar boulloù unan hag unan, hep azlakadur.

Diwar seurt komenad e c'haller savelañ ar bondeskad $\Omega$ : an $\binom{N}{n}$ kevosodad hep arread keittebek a $n$ boull a-douez $N$. Eriñvomp, e-touez ar c'hevosodadoù-se, ar re a glot ouzh an darvoud :

$$\text{Ar standilhon zo a'r rizh } (n_1, n_2, \ldots, n_k) \ .$$

Ur c'hevosodad eus ar rizh-se zo peursavelet mar spisaer pere a-douez an $N_1$ boull a liv 1 — eleze $n_1$ — zo bezant er standilhon,. . ., pere a-douez an $N_k$ boull a liv k — eleze $n_k$ — zo bezant er standilhon. Hogen $\binom{N_1}{n_1}$ doare zo da zibab $n_1$ boull a-douez $N_1$,. . ., $\binom{N_k}{n_k}$ doare zo da zibab $n_k$ boull a-douez $N_k$. Da neuze, niver ar c'hevosodadoù o klotañ ouzh ar rizh $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ zo :

$$\binom{N_1}{n_1} \cdot \binom{N_2}{n_2} \cdots \binom{N_k}{n_k}$$

dre berzh pennaenn al liesaat.

Alese an debegezh a glasker :

$$P\big((n_1, n_2, \ldots, n_k)\big) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdot \binom{N_2}{n_2} \cdots \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}.$$

Anat eo e rank an niveroù $n_1, \ldots, n_k$ bezañ kevanion muiel o vastañ da :

*a*) $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ ;
*b*) niver $n_h$ ar boulloù a liv $h$ er standilhon zo anleiel ha par d'ar muiañ da $N_h$ :

$$0 \leqslant n_h \leqslant N_h \ ;$$

*c*) niver boulloù ar standilhon $n - n_h$ n'int ket a liv $h$ zo anleiel ha par d'ar muiañ d'an niver $N - N_h$ a voulloù :

$$0 \leqslant n - n_h \leqslant N - N_h.$$

Hag a-benn ar fin :

**1.** $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$;
**2.** $\forall h : \max(0, N_h - N + n) \leqslant n_h \leqslant \min(n, N_h)$.

Mar bez $n$ bihanoc'h pe bar ouzh pep hini eus an niveroù $N_1, \ldots, N_k$ e skriver an daveadur **2** :

$$\forall h : 0 \leqslant n_h \leqslant n.$$

En degouezh diwezhañ-se, niver ar standilhonoù diforc'h zo par da niver an doareoù da rannañ ar c'hevan $n$ e $k$ sammad urzhiet a gevanion anleiel par d'ar muiañ da $n$, eleze $K_k^n = \binom{n+k-1}{n}$.

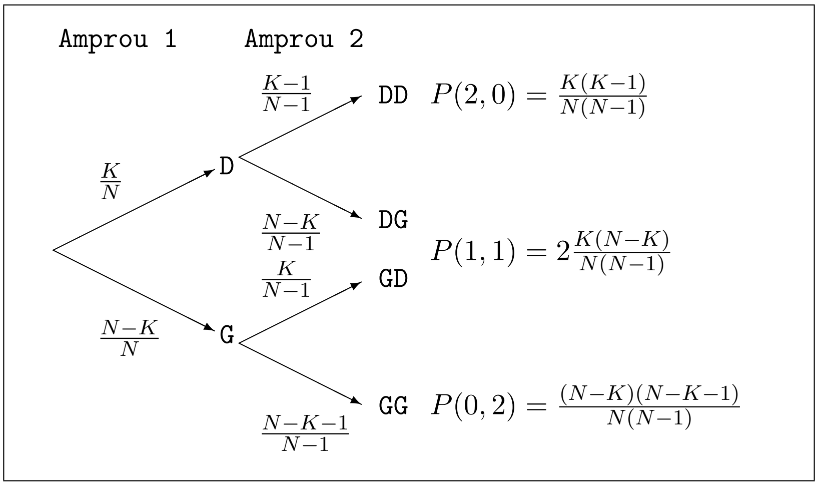
**SKOUER**

Un arc'h zo enni $N$ boull : $K$ a liv D ha $N-K$ a liv G. Tennañ a reer $n=2$ voull anezhi, hep azlakadur, gant $n \leqslant K$ ha $n \leqslant N-K$. Jediñ an tebegoù ketep.

*Respont :* O vezañ ma n'eo ket $n=2$ brasoc'h eget hini ebet eus niver ar boulloù a bep liv ez eus $K_2^2 = \binom{3}{2} = 3$ dasparzh bezus. An tebegoù o klotañ zo :

$$P(2,0) = \frac{\binom{K}{2}\binom{N-K}{0}}{\binom{N}{2}} = \frac{K(K-1)}{N(N-1)};$$
$$P(1,1) = \frac{\binom{K}{1}\binom{N-K}{1}}{\binom{N}{2}} = 2\frac{K(N-K)}{N(N-1};$$
$$P(0,2) = \frac{\binom{K}{0}\binom{N-K}{2}}{\binom{N}{2}} = \frac{(N-K)(N-K-1)}{N(N-1)}.$$

Diskouezomp e kaver an hevelep disoc'h o tennañ an div voull unan hag unan hep azlakadur. Evit se e c'haller arverañ ur wezenn :

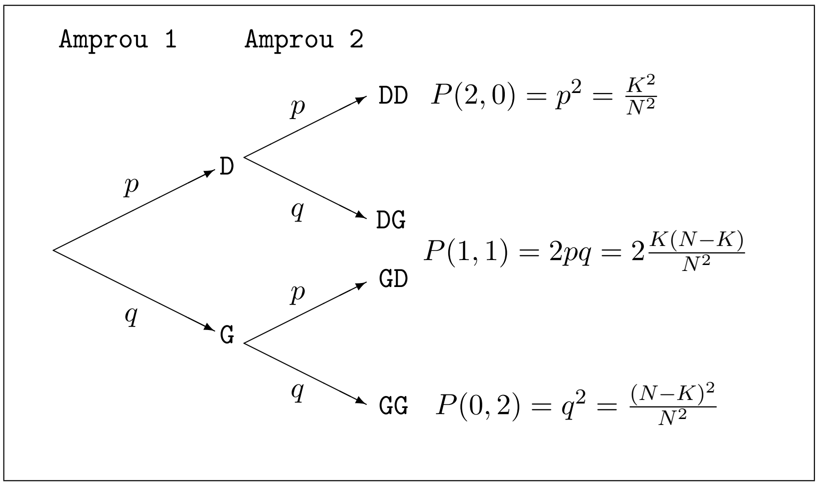



Merzhout ned eo ket dizalc'h disoc'hoù an tennadurioù lerc'h ouzh lerc'h hag o tedalvezout disoc'hoù ar c'hevarad **2.6.1** pe re an tebegoù kenaozat e c'hounezer gwerzhadoù an tebekadur liesâd. Derc'hennadur a-wezenn ar bon-deskad zo azas kenan diouzh plegennoù seurt-se. An tebegoù a-zianouez a skriver neuze war skourroù ar wezenn hag emañ tebegoù an darvoudoù elfennel e penn an deliennoù.

### 2.7.3 An tennañ bernoulliat

Er blegenn-mañ e vez adlakaet pep boull en arc'h goude bezañ bet tennet anezhi, kent tennañ ur voull adarre. E se an darvoudoù kent n'o deus delanvad ebet war zisoc'hoù an amprou nevez ha dizalc'h eo an amprouennoù lerc'h ouzh lerc'h. Lavarout a reer ivez ez arreer an un amprouenn lies gwech.

Gallout a reer c'hoazh erouezañ an amprouennoù kenheuilh dre ur goulun a-wezenn. Bezet da skouer un arnod dargouezhel dezhañ daou vezuster $A$ hag $\overline{A}$, dezho an tebegoù : $P(A) = p$ ha $P(\overline{A}) = q = 1 - p$. Sed ar wezenn :




Ar wezenn-mañ a glot gant ar blegenn anvet *goulun bernoulliat*, pe *goulun Bernoulli* eleze arreadur an un amprouenn dezhi daou vezuster, an eil anvet tro wenn egile tro vat.

### 2.7.4 Keverata an daou zoare tennañ

Hollekaomp ar skouerioù usveneget.

Bezet enta un arc'h enni $N$ boull a $k$ liv hervez ar genaoz $N_1, N_2, \ldots, N_k$. Tennañ a reer ur standilhon $n$ boull anezhi dezho an dasparzh-mañ da heul hervez al liv anezho : $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Sed tebegezh an dasparzh e degouezh an daou zoare tennañ:

*a*) Tennañ dizilerc'h :

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdots \binom{N_k}{n_K}}{\binom{N}{n}} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \frac{\frac{N_1!}{(N_1-n_1)!} \cdots \frac{N_k!}{(N_k-n_k)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}}.$$

*b*) Tennañ bernoulliat :

$$P(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1} \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n_2} \cdots \left(\frac{N_k}{N}\right)^{n_k}.$$

Merzhout emañ an debegezh en tennañ bernoulliat e dalc'h kenaoz an arc'h nemetken, hag ez eo dizalc'h diouzh he ment. Aze emañ ar c'hemm gant an tennañ dizilerc'h.

Diouzh o dewerzhadur e c'haller lavarout ez eo an daou zoare tennañ :
*a*) par, mard eo $n = 1$, a zo anat ;
*b*) kevatal mard eo bras $N_1, N_2, \ldots, N_k$ e-keñver $n$.

E gwir mar tenn $N_1, N_2, \ldots, N_k, N$ war-du an anvevenn e doare ma chom arstalek ar c'henfeurioù e teu :

$$\frac{N_h!}{(N_h - n_h)!} \sim N_h^{n_h}$$

ha

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) \sim \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \frac{N_1^{n_1} \ldots N_k^{n_k}}{N^n} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{N_k}{N}\right)^{n_k}.$$

E se, pa vez bras a-walc'h an arc'h ha pa na vez ket re vihan ar c'henfeurioù ez eo an tennañ dizilerc'h kevatal d'an tennañ bernoulliat. Sklaer eo an arbenn : pa vez $n$ bihan e-keñver $N_1, N_2, \ldots, N_k$, ne gemm ket an tennadennoù lerc'h ouzh lerc'h kenaoz an arc'h, kement ha ken bihan ma chom peuzarstalek kenaoz an arc'h, pezh zo dres amveziadoù an tennañ bernoulliat.

Dav teurel evezh e ra dave delvan an arc'h da lies plegenn dargouezhel. Da skouer : tennañ ur standilhon mogoù eus ur boblañs ma tigemmer ar re o deus ur yenerez diouzh ar re n'o deus ket ; pe arren $n$ gwech lerc'h ouzh lerc'h ha dizalc'h an un amprou a gas da sevenidigezh unan eus ar $k$ darvoud diforc'h $A_1, A_2, \ldots, A_k$ digembez, dezho da debegoù ketep $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (gant sammad an tebegoù $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$) ; hag all.

### 2.7.5 Hollekadur an tennañ dizilerc'h

Desellomp $n$ ergorenn dasparzhet e $m$ stroll (livioù da skouer) niverennet eus $i = 1$ da $i = m$.
Ar stroll $i$ zo ennañ $n_{i\bullet}$ ergorenn :

$$n_{1\bullet} + \cdots + n_{i\bullet} + \cdots + n_{m\bullet} = n.$$

An ergorennoù-se zo dasparzhet ent dargouezhek etre $p$ den, $n_{\bullet j}$ ergorenn d'an den $j$ :

$$n_{\bullet 1} + \cdots + n_{\bullet j} + \cdots + n_{\bullet p} = n.$$

Dewerzhomp tebegezh un dasparzh o klotañ ouzh an daolenn-mañ da heul :

| Kombod / Rumm | $n°1$ | $\dots$ | $n°j$ | $\dots$ | $n°p$ | Hollad |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n°1$ | $n_{11}$ | | $n_{1j}$ | | $n_{1p}$ | $n_{1\bullet}$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $n°i$ | $n_{i1}$ | | $n_{ij}$ | | $n_{ip}$ | $n_{i\bullet}$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $n°m$ | $n_{m1}$ | | $n_{mj}$ | | $n_{mp}$ | $n_{m\bullet}$ |
| Hollad | $n_{\bullet 1}$ | | $n_{\bullet j}$ | | $n_{\bullet p}$ | $n$ |

Hiniennekaomp an $n$ ergorenn : niver an doareoù da zerannañ $n$ ergorenn diforc'h da $p$ den diforc'h, $n_{\bullet j}$ d'an den $j$ ($j = 1, 2, \dots, p$) zo par da niver ar c'hevamsavadurioù gant arreadoù :

$$\frac{n!}{n_{\bullet 1}! \dots n_{\bullet p}!} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{p} (n_{\bullet j})!}.$$

Keittebek eo an derannadoù-se, mard eo sevenet an dasparzh ent dargouezhek. Hogen en o zouez :

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} (ni_{\bullet})!}{\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p} (n_{ij}!)}.$$

a glot gant an daolenn amañ diaraok.

A se tebegezh an dasparzh o klotañ ouzh an daolenn :

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(ni_{\bullet})!\prod_{j=1}^{p}(n_{\bullet}j)!}{n!\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{p}(n_{ij}!)},$$

eleze :

$$\frac{\text{liesâd dasperiadoù marz an daolenn}}{\text{liesâd dasperiadoù logoù an daolenn} \times n!}\,.$$

Merzhout ez eo kemparzhek ar reollun-se e-keñver $i$ ha $j$ : kevamsaviñ bann ha rez ne gemm ket an debegezh.

Anat eo ez eo kevatal derannañ an ergorennoù d'an dud pe an dud d'an ergorennoù.

**SKOUER** — Ul lotiri zo amparet gant 100 bilhed, enno 4 o c'hounit. Pe debegezh eo kaout rik un niverenn c'hounit e-touez 5 bilhed prenet ?

*Respont* : Daou zoare zo da welout ar gudenn :

*a*) Tennañ a reer al lotiri goude bezañ bet prenet ar pemp bilhed, ha neuze e teranner ar bilhedoù prenet (5) hag ar re anprenet (95) da ziv hinienn : koll ha gounid. Bezet taolenn an dasparzh enta :

| Tud / Strolloù | Gounid | Koll | Hollad |
|---|---|---|---|
| Bilhedoù prenet | 1 | 4 | 5 |
| Bilhedoù anprenet | 3 | 92 | 95 |
| Hollad | 4 | 96 | 100 |

*b*) Da gentañ e tenner al lotiri ha war-lerc'h e prener ar bilhedoù. Neuze e teranner bilhedoù gounid (4) ha bilhedoù koll (96) d'ar prener ha d'ar re all. Sed taolenn an dasparzh enta :

| Strolloù \ Tud | Prener | Re all | Hollad |
|---|---|---|---|
| Bilhedoù gounit | 1 | 3 | 4 |
| Bilhedoù koll | 4 | 92 | 96 |
| Hollad | 4 | 96 | 100 |

Ha stadañ a reer e jeder an un disoc'h :

$$P = \frac{5!95!4!96!}{1!4!92!100!} = 0,18.$$

**POELLADENNOÙ**

**2.01** Teurel a reer daou ziñs eorizhek, dezho 6 tal niverennet eus 1 da 6. Lenn a reer niverenn tal uhelañ an diñsoù-se. Bezet an darvoudoù : $A$ = Hebar eo sammad an talioù ha $B$ = Unan eus an daou zisoc'h zo 1 da nebeutañ.

*a*) Savelañ an darvoudoù : $A \cap B$ ; $A \cup B$ ; $A \cap \overline{B}$ hag $\overline{A} \cap \overline{B}$.

*b*) O c'houlakaat ez eo digemmadus an daou ziñs (dezho pep a liv da skouer), diskouezañ niver bezusterioù ar pevar darvoud eus *a*).

**2.02** Bezet 26 jedouer andigemmadus warno skrivet ul lizherenn eus ageder boas ar jedoniezh : a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, war bep jedouer ul lizherenn diforc'h. O lakaat a reer en un arc'h ha tennañ anezhi lerc'h ouzh lerc'h tri jedouer hep azlakadur. Bezet an darvoudoù $A$ ha $B$ :

$A$ : Unan da nebeutañ eus an div lizherenn gentañ zo ur gensonenn hag an trede ur vogalenn.
$B$ : An eil hag an trede lizherenn zo vogalennoù.

Savelañ an darvoudoù : $A \cup B$ ; $A \cap B$ ; $\overline{A} \cup B$ ; $A \cup \overline{B}$ ; $\overline{A} \cap \overline{B}$.

**2.03** Tennañ a reer 8 kartenn eus ur spletad 32 gartenn. Pe debegezh eo kaout eizh keurenn rik ? Pemp keurenn rik ? Daou vorn da nebeutañ ? Pevar born ha tri roue ?

**2.04** Teurel a reer daou ziñs eorizhek digemmadus hag ober sammad an talioù uhelañ. Bezet $A$ : Ar sammad zo ampar ha $B$ : Ur born d'an nebeutañ.

Savelañ tebegezh an darvoudoù-mañ : $A$, $B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$. Ha $P$-dizalc'h eo an darvoudoù $A$ ha $B$ ?

**2.05** Un arc'h zo enni pemp boull ruz, pemp boull du ha pemp boull wenn andigemmadus d'ar stekiñ. Pep boull ruz a ro tro da c'hounit 100 Euro, pep boull du 50 Euro hag ar re wenn netra. Ur c'hoarier a denn dre zargouezh teir boull en ur ser, hep azlakadur.

1. Savelañ un egor tebekaet $\big(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P\big)$ a gevaraez deskrivañ an arnod-se.

2. Pe debegezh eo e c'hounezfe rik ar c'hoarier : *a*) 100 Euro ; *b*) 150 Euro ?

3. Pe debegezh eo — a-getep $p_1$, $p_2$, $p_3$ — an tri darvoud-mañ da heul :
*a*) Ruz eo an teir boull.
*b*) Div voull zo ruz hag unan zo gwenn.
*c*) An teir boull o deus pep a liv.

4. Jediñ $3p_1 + 6p_2 + p_3$. Ha gallout a raed rakwelout an disoc'h-se ?

**2.06** Teurel a reer un diñs eorizhek ha notañ sifrenn an tal uhelañ. Bezet an darvoudoù-mañ da heul :
$A$ : Kaout 2 d'ar muiañ ;

$B$ : Kaout un niverenn hebar ;
$C$ : Kaout 3 d'ar muiañ.

1. Ha dizalc'h eo an darvoudoù $A$ ha $B$ ?

2. Ha dizalc'h eo an darvoudoù $B$ ha $C$ ?

3. Erlec'hiañ a reer un 2 ouzh ar 6. Respont d'ar goulennoù 1. ha 2.

**2.07** Teurel a reer daou ziñs eorizhek, unan ruz hag unan glas, ha notañ niverenn tal uhelañ pep hini.

1. Jediñ tebegoù an darvoudoù-mañ da heul :

$A$ : Kaout div wech an niverenn 1.
$B$ : Kaout ur sammad par da 4.
$C$ : Kaout ur sammad par da 11.

2. Goulakaat a reer ez eo sevenet an darvoud $D$ : Unan eus daou ziñs en deus an niverenn 1. Jediñ neuze tebegezh pep hini eus an darvoudoù $A$, $B$ ha $C$, o c'houzout ez eo sevenet $D$.

3. Jediñ an debegezh e ve sammad an niverennoù brasoc'h pe bar ouzh 9, o c'houzout ez eus ur 4 war dal uhelañ an diñs ruz.

**2.08** Un arc'h zo enni 5 boull du ha teir boull wenn andigemmadus d'ar stekiñ.

1. Tennañ a reer dre zargouezh ur voull eus an arc'h hag he adlakaat a reer enni en-dro, goude bezañ notet he liv. Ha da heul e tenner c'hoazh ur voull en hevelep doare.

*a*) Savelañ un egor tebekaet $\big(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P\big)$ a zeskriv an arnod-se.

*b*) Bezet an darvoudoù-mañ da heul :
$A$ : Tennañ a reer ur voull du ar wech kentañ ;
$B$ : Tennañ a reer ur voull wenn an eil gwech.
Ha dizalc'h eo an daou zarvoud-se e-keñver an tebekadur kevredet ouzh an arnod ?

2. Ne adlakaer ket ar voull gentañ en arc'h goude bezañ he zennet er-maez. Adober ar goulennoù *a*) ha *b*) en degouezh-se.

**2.09** Un arc'h $A_1$ zo enni 8 boull : 3 gwenn ha 5 du hag un arc'h $A_2$ zo enni 5 boull : 2 wenn ha 3 du. Andigemmadus d'ar stekiñ eo ar boulloù-se. Tennañ a reer ur voull eus pep arc'h.

1. Pe debegezh eo e ve du an 2 voull tennet ?

2. Pe debegezh eo e ve gwenn ur voull ha du eben ?

3. Mard eo gwenn unan ha du eben, pe debegezh eo e teufe an hini du eus an arc'h $A_1$ ?

**2.10** Bezet un tiegezh 2 vugel ennañ ha bezet an darvoudoù :

$A$ : Ur paotr hag ur plac'h zo en tiegezh ;
$B$ : Ur plac'h d'ar muiañ zo en tiegezh.

1. Ha dizalc'h eo $A$ ha $B$ evit an tebekadur kevredet ouzh $\Omega^2 = \{a, b\}^2$ ma'z eo $a$ ar bezuster kaout ur plac'h ha $b$ an darvoud kaout ur paotr (kaout 2 vugel a c'haller kevrediñ ouzh arreadur an arnod daou vezuster $a$ ha $b$).

2. Hevelep goulenn evit un tiegezh 3 bugel.

3. Jediñ an debegezh ez eus div blac'h o c'houzout ez eo ur plac'h an hini henañ.

4. Jediñ an debegezh ez eus div blac'h o c'houzout ez eus ur plac'h d'an nebeutañ en tiegezh.

(Goulakaat a reer ez eo keittebek kaout ur plac'h ha kaout ur paotr).

**2.11** Ur greanti a genderc'h kefluskerioù. An debegezh e ve mat ur c'heflusker zo 0,95.

Prouadiñ a reer ar c'hefluskerioù peuroberiet ha stadañ a reer kement-mañ :

$\sim$ An debegezh e tisklerier mat ur c'heflusker da heul ar prouad zo 0,97 ;

$\sim$ An debegezh e tisklerier mat ur c'heflusker fall zo 0,04.

Da heul ur prouad e tisklerier mat ar c'heflusker $k$. Pe debegezh eo ez eo $k$ ur c'heflusker mat ?

**2.12** Pevar den a skriv o anv war bep a damm paper, hag o meskañ a reer. Goude en o dasparzher dre zargouezh d'ar pevar den. Pe debegezh eo e tegouezhfe gant un den d'an nebeutañ an tamm paper gant e anv ?

**2.13** Bezet ur boblañs amparet gant 48% a baotred ha 52% a verc'hed. An debegezh e ve daltonek ur paotr zo 0,05 hag evit ur plac'h ez eo 0,0025.
Petore dregantad eus ar boblañs zo daltonek ?

**2.14** En ur boblañs ez eus 45% a baotred ha 55% a verc'hed. Ur paotr diwar dri a zoug lunedoù hag ur plac'h diwar bemp.
Pe debegezh eo e ve un den bennak o tougen lunedoù? Hag ur plac'h ?

**2.15** Teurel a reer daou ziñs eorizhek.

$a$) Pe debegezh eo kaout div neverenn bar o c'houzout ez eo par da 8 o sammad ?

$b$) Pe debegezh eo kaout div niverenn bar o c'houzout ez eo brasoc'h pe bar ouzh 10 o sammad ?

**2.16** Teurel a reer tri diñs.

Jediñ an debegezh kaout ur born war unan anezho o c'houzout n'eus ket daou dal heñvel.

**2.17** Embreger a reer un diournat reizhiadek war ur boblañs o deus 15% anezhi un naoued $N$ dianat. Kregiñ a ra an diournat gant ur prouad a ro 95% a zisoc'hoù yaek evit an dud tizhet gant $N$ ha 10% a zisoc'hoù yaek evit tud n'int ket tizhet.

*a*) Pe debegezh eo e ve tizhet gant $N$ un den dibabet dre zargouezh, o c'houzout ez eus bet un disoc'h yaek gant ar prouad ?
*b*) Pe debegezh eo ne ve ket tizhet un den, o c'houzout ez eo bet nac'hek ar prouad ?

**2.18** Desellout a reer $n$ den kemeret dre zargouezh ha bezet $P(n)$ an debegezh o defe daou anezho d'an nebeutañ o deiz-ha-bloaz an un deiz.

Jediñ $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$. Reiñ ur reollun evit $P(n)$. Adalek pe werzhad roet da $n$ ez eus $P(n) > 0,5$ ; $P(n) > 0,9$ ; $P(n) > 0,99$?

**2.19** Diouzh un daolenn glinikel bennak e tewerzher ez eus gant un den 6 chañs diwar 10 da vezañ tizhet gant ur c'hleñved. Embreger a reer neuze daou brouad bevoniel. An hini kentañ zo yaek evit 70% war ar glañvourion hag evit 20% war ar re yac'h. An eil zo yaek evit 90% war ar re glañv hag evit 30% war ar re yac'h.

Goulakaat a reer ez eo dizalc'h an daou brouad. Pe debegezh eo ez eo yaek an eil prouad mard eo bet an hini kentañ ?

**2.20** Pe debegezh eo ez eo ganet aozer al levr-mañ d'ar sul ?