16

Prouadiñ

16.1 PROUADIÑ GOULAKADOÙ

16.1.1 Erouezadur hollek

Ur prouad goulakad zo ur reolenn a gevaraez skarat — seurt skaradenn o chom atav ur glaoustre dezhi riskloù da faziañ —, diwar arselladennoù, etre daou zevredad : disteurel ar goulakad stadegel pe na zisteurel. Gant ar c'herienn goulakad stadegel e reer anv eus anien un pe lies dasparzh, pe eus an arventennoù naouus dezho.

16.1.1.1 Petore goulakadoù ?

Meur a rizh goulakad zo. Kemeromp da skouer an degouezh ma venner keñveriañ un engortoz jedoniel μ (dianav, prizet dre ar c'heitad arsellet $\overline{x}$) ouzh ur werzhad damkanel μ_0. Lies goulakad a c'haller ober : $\mu = \mu_0$, $\mu \neq \mu_0$, $\mu > \mu_0$, $|\mu - \mu_0| \leqslant A$, h.a. Ar goulakad kentañ a reer anezhañ *goulakad eeun* pe *goulakad mann* hag ar re all *goulakadoù kemmesk*. Peurvuiañ ne brouader nemet goulakadoù eeun ouzh ar goulakad kontrol, an dazeilad. Hogen kement-se a zegas un digemparzh bras en dezastumadennoù. Adkemeromp hon skouer : ne c'haller ket diogeliñ ez eo $\mu = \mu_0$ rik. D'ar muiañ e c'haller lavarout ez eo an diforc'h $\mu - \mu_0$ re vras evit ma ve $\mu - \mu_0$ goulakaet par da vann. E se e kas ur prouad da zizarbenn pe na zizarbenn ur goulakad eeun, ha nepred d'e zarbenn war an taol.

16.1.1.2 Petore riskloù ?

Ur goulakad mann G_0 hag ur prouad o vezañ roet e c'haller krennañ an degouezhioù bezus en un daolenn :

Beziadoù / Devredad	Gwir eo G_0	Faos eo G_0
Dizarbenn G_0, darbenn an dazeilad	Dizarbenn e gaou (riskl α a'r spesad kentañ)	reizh $(1-\beta)$
Na zizarbenn G_0	reizh $(1-\alpha)$	Olgalloud β (riskl β a'n eil spesad)

An digemparzh etre an dezastumadennoù a anad en digemparzh etre an daou fazi bezus : ar riskl da zizarbenn e gaou pe an olgalloud. Ar riskl kentañ eo a vez sellet evel an hini loskusañ, rak an distaol zo un disentez krennus, hag ar riskl-se da zisteurel ar goulakad mann e gaou eo a vo kemeret da azon evit an devredad da heul ar prouad.

Ar riskl da faziañ α a dalvez kement-mañ : un disentez dizarbenn ar goulakad mann o vezañ ur glaoustre, ar riskl — eleze an debegezh da faziañ — a gemerer gant ar glaoustre-se a rank bezañ *bihanoc'h pe bar ouzh* α, anez n'en kemerer ket ha ne zizarbenner ket ar goulakad mann. Gwelet e vo e kemerer alies $\alpha = 0,05$ hag $\alpha = 0,01$.

16.1.1.3 Hentennouriezh

Bezet ur boblañs P ha warni ur stadekadur X : kaout ur c'hleñved A. Goût a ouzer ez eo $p = 20$ % kenfeur an hiniennoù tizhet gant ar c'hleñved-se. Klask a reer gouzout ha daskemmet eo ar c'henfeur-se gant un danvezenn bennak, war well pe war wazh. En amboaz-se e rener un arnod war 100 den kemeret dre zargouezh er boblañs : an danvezenn a ziounezer dezho ha da heul ar prederiadur ez arseller petore kenfeur f_{ars} anezho o deus ar c'hleñved A. Sed ar goulenn : ha gweredus eo an danvezenn ?

EVEZHIADENN — D'ar c'hentañ sell ne weler ket re vat penaos respont d'ur seurt goulenn. E gwir, lakaomp ez eo angwered an danvezenn. Neuze ne vo kemm ebet ha kenfeur an hiniennoù klañv a neuenno en-dro da 20 % evit an holl standilhonoù a c'hellfe bezañ tennet eus ar boblañs. Al liesañ e vo ar c'henfeur arsellet f_{ars} en amezegiezh 20 %, hogen ur c'henfeur 0 % pe 100 % a c'hello bezañ arsellet bep an amzer. E se, na pa ve ar c'henfeur arsellet f_{ars} pell diouzh $p = 20$ % e c'hell an danvezenn bezañ angwered koulskoude.

Lakaomp bremañ ez eo gweredus an danvezenn. Tebegezh ar c'hleñved evit nep hinienn zo bremañ p' anpar da $p = 20$ %. Kenfeur an hiniennoù klañv en ur standilhon 100 den a neuenno bremañ en-dro da p' (dianav), ha bezus eo zoken a-wechoù ar werzhad 20 %. Da neuze, na pa ve ar c'henfeur arsellet f_{ars} nes pe bar da 20 % e c'hell an danvezenn bezañ gweredus.

$$\boxed{\text{Dic'hallus eo respont d'ar goulenn gant un diended 100 \%.}}$$

Ne chom enta nemet ar respont gant ur riskl bennak ha dewerzhadur ar riskl-se eo a vern a-geñver gant an devredad kemeret hervez an daou zegouezh beziat ha dianav : gwir eo ar goulakad mann no gwir eo an dazeilad. Se eo a vez graet en un doare emdarzhek mar bez bras ar forc'had etre f_{ars} ha $p = 20$ %. Dres, petra a dalvez bras ? Dav eo enta savelañ un hentenn evit dewerzhañ ar riskl da faziañ, war-benn devredañ gant un debegezh da faziañ anavezet ha degemeret.

• Ar prouad azonegezh

Pezh a laz eo gouzout ha gweredus eo an danvezenn ha prouadet e vo an haeradenn gontrol : angwered eo an danvezenn. Sed enta ar goulakad mann, ar goulakad da brouadiñ.

En degouezh ma'z eo G_0 ar beziadoù e vo neuennadoù f_{ars} (eleze gwerzhadoù ar gwehanadur dargouezhel F) en-dro da $p = 20$ % hag o c'hantañ a c'haller en un entremez kreizet war $p = 20$ % gant un debegezh roet α da vezañ er-maez. O c'houlakaat e c'haller arnesaat an dasparzh binomel $\mathcal{B}(n, p)$ dre un dasparzh gaosat e ouzomp e klot ar riskl 5 % ouzh ar forc'had $1,96\,\sigma \approx 2\sigma$. Amañ ez eo :

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{100}} = 0,04.$$

E se f_{ars} n'en deus nemet 5 chañs diwar 100 da vezañ er-maez eus an entremez [12 % ; 28 %]. A se e vo kemeret an disentezioù-mañ :

1. Mar kouezh an dregantad arsellet en entremez [12 % ; 28 %] e tarbennimp e c'hell ar forc'had etre f_{ars} ha $p = 20$ % dont eus an neuennadoù standilhonañ hepken, eleze e tarbennimp ivez ned eo ket splann gwered an danvezenn.

2. En enep mar kouezh f_{ars} er-maez eus an entremez ne zarbennimp ket mui e teu ar forc'had etre f_{ars} hag 20 % diouzh an neuennadoù standilhonañ : *azonek* eo, e gerioù all ned eo ket dargouezhek ar forc'had, azonañ a ra gweredusted an danvezenn.

E se *azonek* eo ar forc'had $|f_{ars} - p|$ mard eo brasoc'h pe bar ouzh

$$1,96\,\sigma = 1,96\sqrt{\frac{pq}{n}},$$

pe c'hoazh mard eo gwerzh dizave ar forc'had direet

$$u = \frac{|f_{ars} - p|}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}} > u_{(\alpha=0{,}05)} = 1,96\ (\approx 2),$$

a zo sevenidigezh ar gwehanadur :

$$U = \frac{|F - p|}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}} \qquad (\simeq \text{ dasparzh reol kreizet direet}).$$

• **An daou riskl**

Ar prouad azonegezh a zisoc'h war daou riskl pa chom dianav ar beziadoù :

***a*)** Mar bez angwered an danvezenn, emañ f_{ars} o neuenniñ en-dro da 20 %, hogen a-wechoù e kouezho er-maez eus an entremez. O vezañ ma tevreder en degouezh-se ez eo gweredus an danvez e reer ur fazi dewerzhet mat tre : bez' ez eo α, eleze 5 % evit a sell hon prouad.

***b*)** Mar bez gweredus an danvezenn, emañ f_{ars} o neuenniñ en-dro d'ur werzhad p' anpar da $p = 20$ %, hogen a-wechoù e kouezho en entremez [12 % ; 28 %]. O vezañ ma tevreder en degouezh-se ned eo ket splann gweredusted an danvezenn e vo distaolet un danvezenn weredus. Olgalloudek eo ar prouad. Ne c'haller ket dewerzhañ ar riskl β-se, pa'z eo dianav p'. Emañ β e dalc'h p' ha notet e vez a-wechoù : $\beta(p')$.

• Gourzhenebiezh etre an daou riskl

E se ez eus daou riskl stag ouzh ar prouad :

1. Ur riskl a'r spesad kentañ α, pe *riskl da faziañ*, a c'hoarvez a zizarbenn ar goulakad mann e gaou, hag eñ gwir. En hon skouer e ve lavaret ez eo gweredus un danvezenn ha ned eo ket gwir.
2. Ur riskl a'n eil spesad β, pe *olgalloud*, a c'hoarvez ag andizarbenn ar goulakad mann, hag eñ faos. En hon skouer e ve distaolet an danvezenn evel angwered, daoust ma'z eo gweredus e gwir.

O tibab an entremez [12 % ; 28 %] hon eus asantet d'ur riskl $\alpha = 0,05$. Ha ne ve ket gwell dibab ur riskl bihanoc'h $\alpha = 0,0001$ kement hag ober, ha nebeutoc'h a chañsoù hor befe da zizarbenn ar goulakad mann e gaou. Ar forc'had keñverek zo $3,89\,\sigma \approx 0,16$. Eleze e ve dizarbennet ar goulakad mann ha diskleriet gweredus an danvezenn mar befe f_{ars} er-maez eus an entremez [4 % ; 36 %] e-lec'h [12 % ; 28 %]. Eeun eo dianlenad seurt kresk treuzkiz an entremez : ne vo dinoet gweredusted an danvezenn nemet mar bez kreñv kenan.

Gourzhenebiezh zo etre an daou riskl : mar menner digreskiñ ar riskl da zegemer un danvezenn angwered e kresker an debegezh da zisteurel un danvezenn weredus. O vezañ e dalc'h p' dianav ne c'haller ket dewerzhañ ar riskl a'n eil spesad $\beta(p')$, hogen seul vrasoc'h e vo ma vo bihanoc'h ar riskl α dibabet. Ouzh ar vevenn, o tibab un entremez [0 % ; 100 %] ne ve morse diskleriet gweredus un danvezenn nad eo ket, hogen ne ve morse skaret war weredusted an danvezenn !

• Gourin azonegezh

Mar kevaraez ar c'hourzhenebiezh etre an daou riskl da veizañ perak ne c'haller ket digreskiñ α mui ouzh mui, ne ro respont ebet d'ar goulenn-mañ : adalek petore gwerzhad eus α e vo sellet ar forc'had evel azonek ? Ar werzhad eizikse, tidek betek ur poent, a vo anvet *gourin azonegezh* ha boas eur da gemer 5 % ($\alpha = 0,05$). Mar asanter da chom aliesoc'h en amzivin e kemerer ur riskl bihanoc'h, $\alpha = 0,01$ da skouer . . Notañ ivez : e-lec'h gourin azonegezh e lavarer ivez *gourin gougemer*. Talvezout a ra e c'haller gougemer ur riskl uc'hek par da α.

Ar gwezhiader fiziañs $1 - \alpha$ a vez graet ivez *gwehin fiziañs* anezhañ. Ster ar gwehin fiziañs eo hemañ : en degouezh ma'z eo gwir ar goulakad mann, e kemerer an devredad da na zizarbenn an kez goulakad gant an debegezh da vezañ reizh par da $1-\alpha$. Arabat disoñjal avat ez eo ar prouad ur glaoustre : dianav e chom ar beziadoù ha marteze e reer ur fazi dre olgalloud gant an debegezh β, a chom dianav.

Gwelout a reer ez eo ret dibab ur werzhad α bihan a-walc'h, war-benn bevennañ ar riskl da zizarbenn G_0 e gaou. Arabat mont re bell avat, war-benn mirout chañsoù bras a-walc'h da zarbenn G_1 mar bez gwir. Unan eus an diaesterioù pennañ evit festañ α a zeu eus kemmesk G_1. Ouzh pep gwerzhad bezus p' a'n dregantad damkanel (an holl nemet 20 %) e c'haller kevrediñ ur werzhad β, tebegezh da na zisteurel G_0 dre olgalloud. Ne c'haller ket festañ ur riskl β hepken a-geñver gant G_1, kemparzhek d'ar riskl α a-geñver gant G_0 : e dalc'h p' emañ β.

• Azonegezh

Despizet eo bet ar gourin azonegezh, chom a ra da spizañ muioc'h azonegezh ar forc'had etre f_{ars} ha p. Anat eo e c'hell bezañ azonek pe azonekoc'h. Empentomp hon eus kavet $f_{ars} = 0,34$. Petra dezastum ? Emañ $f_{ars} = 0,34$ er-maez eus an entremez [12 % ; 28 %] hag azonek eo ar forc'had enta. A se e sellomp an danvezenn evel gweredus.

Hogen seurt devredad a gemerer adal ma'z eo f_{ars} brasoc'h eget 28 %, pegen bihan ma ve an diforc'h etre an div werzhad. Dav engwerc'hañ an devoud ez eo 34 % un tamm mat brasoc'h eget 28 % ha reiñ un devredad solietoc'h.

Goulakaomp ez eus bet dibabet ur gourin $\alpha = 0,01$. Ar forc'had keñverek a ve $2,6\,\sigma = 10$ %, pezh a zisoc'h gant un entremez [10 % ; 30 %]. Emañ c'hoazh an dregantad 34 % er-maez eus an entremez nevez, hag azonek eo ar forc'had etre 34 % hag 20 %, n'eo ket hepken diouzh 5 % hogen ivez diouzh 1 %. Mar kendalc'her evel-se e tizho usvonn an entremez ar werzhad 34 % hag ar riskl o klotañ ouzh an entremez-se a c'haller dewerzhañ : par eo ar forc'had da $0,34-0,20 = 0,14$. Alese e jeder ar forc'had direet $0,14/0,04 = 3,5$. Hervez an daolenn ez eo ar riskl un tammig bihanoc'h eget $0,001$.

E se e c'haller lavarout ez eo ar forc'had etre an dregantad arsellet hag an dregantad gortozet azonek diouzh $0,001$. E gerioù all ez eo azonegezh ar forc'had par da $\alpha_a = 0,001$.

An azonegezh-se par da $0,001$ a dalvez kement-mañ : ma n'eo ket gweredus an danvezenn, an debegezh da gaout ur forc'had brasoc'h pe bar ouzh an hini arsellet dre berzh neuennadoù ar standilhonañ ne sav nemet da 0,001.

EVEZHIADENN — Notet e vo digemparzh ar c'hlozadurioù : mard eo $\alpha_a \leqslant \alpha$ e tizarbenner G_0. En enep, mard eo $\alpha_a > \alpha$, ne zizarbenner ket G_1. E gwir ne c'haller ket en degouezh diwezhañ-se dizarbenn G_1 (eleze darbenn G_0), rak reoù 'zo eus gwerzhadoù p' aotreet gant G_1 zo kembezus kenan gant an arselladenn f_{ars}, da gentañ penn ar werzhad dibarek $p' = f_{ars}$! Azas eo dreist-holl ur prouad azonegezh oc'h enebiñ ur goulakad mann ouzh un dazeilad evit respont d'ar goulenn : ha bras a-walc'h eo ar forc'had etre an delvan damkanel (p) hag an arnod (f_{ars}) evit ma c'hallfed disteurel an delvan gant poell ?

• Kendastum

Diwar ar jedadurioù amañ diaraok ha dreist holl an hini diwezhañ a-zivout dewerzherezh an azonegezh e c'haller krennañ ur prouad goulakad evel henn :

Prouadiñ ur goulakad derou anvet goulakad mann diwar zisoc'hoù ur sontadur zo :

1. savelañ un arventenn o treuztaoliñ ar forc'had etre an disoc'hoù arsellet hag an disoc'hoù gortozet dindan ar goulakad mann ;
2. savelañ, en degouezh ma'z eo gwir ar goulakad mann, an debegezh da gaout an kez forc'had ;
3. dizarbenn pe na zizarbenn ar goulakad mann hervez an debegezh kavet amañ diaraok.

• Delanvad ment ar standilhon

Bezet tri imbourc'her o seveniñ pep a arnod war an un poblañs, pep hini o tisoc'hañ war :

– Ar c'hentañ : gant 100 hinienn, 14 gant ar c'hleñved A.

– An eil : gant 200 hinienn, 28 gant ar c'hleñved A.

– An trede : gant 10 000 hinienn, 1400 gant ar c'hleñved A.

Ar prouad azonegezh a ro an disoc'hoù :

1. Evit an hini kentañ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{100}} = 0,04 \qquad u_\alpha = \frac{0,20 - 0,14}{0,04} = 1,5;$$

2. Evit an eil :

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{200}} = 0,028 \qquad u_\alpha = \frac{0,20 - 0,14}{0,028} = 2,1;$$

3. Evit an trede :

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{10\,000}} = 0,004 \qquad u_\alpha = \frac{0,20 - 0,14}{0,004} = 15.$$

Ar forc'had ned eo ket azonek en degouezh kentañ (forc'had direet bihanoc'h eget 2) ; a-vec'h azonek en eil degouezh hag azonek meurbet en trede. An imbourc'her kentañ a zistaolo an danvezenn, an trede he disklerio gweredus evit gwir. Evit an eil a lavaro ez eo gweredus, moarvat, nemet e ve gwell kenderc'hel an imbourc'hioù. E se ez eo disheñvel o savboentoù, hag int diazezet war an un dregantad arsellet $f_{ars} = 0,14$.

Evit ur gwel ez eus dislavar etre an tri imbourc'her, hogen delakadenn an niveroù bras a ziskouez ervat ez eo seul antebekoc'h ur forc'had roet, en neuennadoù standilhonañ, ma'z eo brasoc'h ar standilhon. Evezhiadennoù a c'haller ober diwar se :

a) Roadenn un dregantad ne c'hell talvezout da netra koulz lavarout ma ne resisaer ket ar reveziad hollel.

b) Deur ar prouad azonegezh zo dres resisaat azonegezh ar forc'had, hag erlec'hiañ ouzh mennoz ur forc'had bras, a zo e dalc'h ment ar standilhon, dewerzhadur un debegezh vihan, a zo dizalc'h dioutañ.

c) Klaskomp bremañ an entremezioù azonek diouzh 5 % diwar arselladennoù an tri imbourc'her. Sed an entremezioù-se 20 % $\pm\, 2\,\sigma$ a-getep : [12 % ; 28 %], [14 % ; 26 %] hag [19,2 % ; 20,8 %]. Splann eo en deus an imbourc'her kentañ kalz muioc'h a chañsoù da lezel da dremen un danvezenn weredus eget an trede, a vo e-tailh da zinoiñ danvezennoù gweredus, nebeut kenan zoken.

E se, evit an un riskl da faziañ (5 % amañ), seul vrasoc'h ar standilhon, seul c'halloudekoc'h a se eo ar prouad. Sklaer eo e ro un niver bras muioc'h a stlenn eget unan bihan.

d) Pa vez azonek ur forc'had evit ur standilhon bennak, e c'haller e zarbenn evit an devredad, gant ar riskl da faziañ degemeret. Hogen ma ned eo ket azonek e c'haller bepred emc'houlenn ha ne anadfe ket un azonegezh gant ur prouad galloudekoc'h, eleze gant ur standilhon brasoc'h.

Kement-se a zispleg c'hoazh digemparzh ar respontoù hervez ma kouezh an dregantad arsellet f_{ars} er-maez eus an entremez (dizarbenn a reer ar goulakad mann G_0), pe e-barzh (ne zizarbenner ket ar goulakad mann, hogen ne lavarer ket ivez ez eo gwiriet. Ne lavarer ket kennebeut ez eo angwered an danvezenn a dra sur).

Galloud ur prouad a c'hell bezañ keñveriet ouzh hini ur werenn greskiñ : mar gweler un dra bennak e c'haller diogeliñ ez eus anezhañ. Ma ne weler ket, ne c'haller ket diogeliñ e ezvezañs, marteze e ve dinoet gant ur werenn c'halloudekoc'h.

• Amplegadoù dedalvout

Ar reollunioù roet amañ diaraok a c'houlaka e c'haller arverañ taolenn ar forc'had direet, eleze ez eo bras ar standilhonoù :

$$\boxed{n \geqslant 30, \quad np \quad \text{hag} \quad nq \geqslant 5}\,.$$

An amplegadoù-se a engwerc'h gwerzh p, eleze an dregantad gortozet — anvet ivez an dregantad damkanel —, ha n'eo ket an dregantad arsellet.

En hon skouer : $p = 0,02$, $q = 0,08$ ha $n = 100$. A se $np = 20$, $nq = 80$. Gwiriet eo an amplegadoù. Pouezomp c'hoazh : np ha nq zo ar reveziadoù jedet, ar reveziadoù damkanel, e gerioù all re ar standihon en defe an un kenaoz hag ar boblañs.

Degouezh ar standilhonoù bihan a vo gwelet pelloc'h.

SKOUER — En ur boblañs ma'z eus kement a baotred hag a verc'hed ez eo tizhet eizh plac'h ha daou baotr gant ur c'hleñved. Ha tizhet eo muioc'h ar merc'hed ?

Ha degemeradus eo ar goulakad $p = 0,5$ diwar stadañ an dregantad arsellet $f = 0,8$? Ar reveziadoù damkanel zo $np = nq = 10 \times 0,50 = 5$. Dedalvezadus eo ar prouad war-bouez nebeut. A se e teu :

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{10}} = 0,158, \qquad u_\alpha = \frac{0,80 - 0,50}{0,158} = 1,90.$$

Ar forc'had direet zo bihanoc'h eget 1,96 a glot gant ar riskl 5 %. Ned eo ket azonek ar forc'had enta.

16.1.2 Prouad ar χ^2

16.1.2.1 Keñveriañ un dregantad arsellet gant un dregantad jedet

Ar gudenn-se hon eus arveret evit erouezañ pennaenn ar prouadoù amañ diaraok. Gwelet hon eus e spire jediñ ar forc'had kreizet direet

$$u_\alpha = \frac{p-f}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$$

ha klask α o klotañ ouzh $|u_\alpha|$ en daolenn. Mard eo $\alpha > 5$ % ned eo ket azonek ar forc'had, mard eo $\alpha \leqslant 5$ % ez eo azonek ar forc'had hag α a zewerzh an azonegezh.

O vezañ ma ne daoler pled nemet ouzh gwerzh dizave u_α e c'hallfed jediñ an daouvac'had anezhañ

$$u_\alpha^2 = \frac{(p-f)^2}{\dfrac{pq}{n}}$$

hag e zedalvout en un daolenn savet diwar hini an u_α-où o taouvac'hañ pep gwerzhad (da skouer, mar en deus gwerzh dizave ar forc'had direet 5 chañs diwar 100 da vezañ bihanoc'h eget $1,96$, en deus e zaouvac'had 5 chañs diwar 100 da vezañ bihanoc'h eget $3,84$, h.a.). Seurt taolenn a vez anvet *taolenn ar* χ^2 *gant 1 derez dizankted.* Sellout an daolenn 5.

Rezhiennomp riñvenn ar χ^2 o reiñ ur roll kemparzhek d'an hiniennoù dezho ar perzh A ha d'ar re hep ar perzh A.

Reveziad \ Darvoud	A	$\overline{A}$
Arsellet	$nf_1 = a_1$	$nf_2 = a_2$
Jedet	$np_1 = c_1$	$np_2 = c_2$

O vezañ ma'z eo $p_1 + p_2 = f_1 + f_2 = 1$ e teu $f_1 - p_1 = p_2 - f_2$.

$$\chi^2 = \frac{n(f_1 - p_1)^2}{p_1 p_2} = n(f_1 - p_1)^2 \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} = n(f_1 - p_1)^2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)$$

bezet

$$\chi^2 = \frac{(nf_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(nf_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(a_1 - c_1)^2}{c_1} + \frac{(a_2 - c_2)^2}{c_2}.$$

E se e c'haller skrivañ :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(a_i - c_i)^2}{c_i} = n \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}}.$$

An amplegadoù gwiriegezh a denn d'ar reveziadoù jedet c_1 ha c_2 a rank bezañ bras a-walc'h (brasoc'h eget 10 pe d'an nebeutañ da 5). A-benn ar fin e c'haller desellout ar prouad evel unan amkanet da geñveriañ un dasparzh arsellet (a_1, a_2) gant un dasparzh damkanel (c_1, c_2). Hag arveret e vez er pleustr.

EVEZHIADENN — f_i a vez anvet aliested (tebegezh, dregantad, kenfeur) arsellet pe kantouezel, gorreet diwar ar standilhon. An hevelep adanvioù a roer ivez da a_i, ar reveziad arsellet pe kantouezel. Erziwezh e klot an adanvioù damkanel, pe c'hoazh jedet ouzh p_i an aliested (tebegezh, dregantad, kenfeur) ha c_i ar reveziad gortozet.

16.1.2.2 Keñveriañ un dasparzh arsellet gant un dasparzh damkanel k rumm (prouad kenfurmded)

Hollekaat a reer despizadur ar χ^2 d'un dasparzh k rumm e-lec'h 2.

• Ar gudenn

War ar boblañs e saveler k darvoud $E_1, E_2, \ldots, E_k$ a ampar ur reizhiad klok a zarvoudoù (eleze $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$, gant $E_i \cap E_j = 0$ evit $i \neq j$). En delvan damkanel ez eo tebegezhioù an darvoudoù-se : $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

War un n-standilhon ez eo ar *reveziadoù arsellet* : $a_1, a_2, \ldots, a_k$. War-benn keñveriañ an arselladennoù gant an delvan damkanel e jeder ar *reveziadoù damkanel*, pe c'hoazh *reveziadoù jedet* : $c_i = np_i$ (nad int ket kevanion dre ret) ha keñveriañ a reer an a_i-où gant ar c_i-où. Aesoc'h eo erouezañ ar stlennadoù-se en ur rezi.

• **Ar prouad**

1. Goulakad G_0 : an dasparzh arsellet er standilhon zo kenfurm ouzh an dasparzh damkanel dibabet.

2. Delakadenn : dindan ar goulakad G_0, ar gwehanadur dargouezhel Y^2 a zo e werzhadoù ar c'hementadoù jedet war bep standilhon :

$$\boxed{\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(a_i - c_i)^2}{c_i}}$$

zo dezhañ dasparzh ar χ^2 gant ν derez dizankted (an dizankant $\nu = k - 1 - r$ ma'z eo r niver an arventennoù da jediñ diouzh ret evit savelañ an dasparzh damkanel).

3. Evezhiadennoù : an darn vrasañ eus an aozerion a c'houlenn ma ve $c_i \geqslant 5$ evit pep i. Ma n'eo ket an degouezh ez eo ret strollañ an darvoudoù evit bastañ d'an amplegad, o chom kempoell avat.

Mar engwerc'her an aliestedoù arsellet $f_i = \dfrac{a_i}{n}$ e c'haller skrivañ ivez :

$$\chi_c^2 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}.$$

• **Devredad**

Festet eo α ar riskl a'r c'hentañ spesad. Ouzh pep gwerzhad eus ν e klot ur rizh krommenn evit tebekter dasparzh ar χ^2. Evit ν roet e kevaraez an daolenn 5 lenn ar werzhad χ_α^2, hevelep ma'z eus :

$$P\big(Y^2 \geqslant \chi_\alpha^2\big) = \alpha.$$

Da heul :

1. Mard eo $\chi_c^2 \geqslant \chi_\alpha^2$, e tizarbenner ar goulakad mann gant un debegezh α da faziañ (riskl a'r spesad kentañ).

2. Mard eo $\chi_c^2 < \chi_\alpha^2$, ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann.

16.1.2.3 Keñveriañ lies dasparzh arsellet (prouad ungenezhded)

Ar roadennoù a erouezer en un daolenn stadegel evel amañ dindan.

• Ar gudenn

War ar boblañs P e c'hell un doareenn kemer k gwerzhad $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (pe k modelezh, pe k rumm). Bez' ez eus l standilhon $E_1, E_2, \ldots, E_l$ a c'hell dont eus P, eleze l dasparzh arsellet. Evit nep $i \in \{1, \ldots, k\}$ ha nep $l \in \{1, \ldots, l\}$ ez anavezer a_{ij} reveziad arsellet ar werzhad a_i er standilhon E_j. Bezet n ar reveziad hollel :

$$n = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} a_{ij}.$$

Darvoud Standilhon	A_1	$\ldots$	A_i	$\ldots$	A_k	Hollad
E_1	a_{11} c_{11}	$\ldots$	a_{i1} c_{i1}	$\ldots$	a_{k1} c_{k1}	H_{R1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_j	a_{1j} c_{1j}	$\ldots$	a_{ij} c_{ij}	$\ldots$	a_{kj} c_{kj}	H_{Rj}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_l	a_{1l} c_{1l}	$\ldots$	a_{il} c_{il}	$\ldots$	a_{kl} c_{kl}	H_{Rl}
Hollad	H_{B1}	$\ldots$	H_{Bi}	$\ldots$	H_{Bk}	n

• Ar prouad

1. Goulakad G_0 : an diforc'hioù arsellet etre ar standilhonoù zo devoudet dre an neuennadoù standilhonañ. Tennet eo bet ar standilhonoù eus an un poblañs.

2. Jedadur ar reveziadoù damkanel c_{ij} dindan ar goulakad mann G_0 : bodañ a reer an l standilhon en unan hepken a vent n, ha tebegezh an darvoud A_i zo par da :

$$p_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} a_{ij}}{n} = \frac{H_{Bi}}{n}.$$

Reveziad jedet ar rumm A_i evit ar standilhon E_j zo neuze :

$$c_{ij} = p_i \left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij} \right) = p_i \times H_{Rj} = \frac{H_{Bi} \times H_{Rj}}{n}.$$

3. Delakadenn : dindan ar goulakad mann, o vezañ ma kemer ar gwehanadur dargouezhel Y^2 war bep n-standilhon ar werzhad :

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(a_{ij} - c_{ij})^2}{c_{ij}}$$

zo dezhañ dasparzh ar χ^2 gant an dizankant $\nu = (k-1)(l-1)$.

4. Evezhiadenn : liesañ e c'houler ma ve $c_{ij} \geqslant 5$ evit pep i ha pep j. Ma ned eo ket an degouezh ez adstroller A_i-où 'zo.

• Devredad

Ar riskl a'r c'hentañ spesad α o vezañ festet hag an dizankant ν o vezañ anavezet e lenner en taolenn 5 ar werzhad χ^2_α, hevelep ma ve :

$$P\big(Y^2 \geqslant \chi^2_\alpha\big) = \alpha.$$

1. Mard eo $\chi^2_c \geqslant \chi^2_\alpha$ e tizarbenner ar goulakad mann gant ar riskl α.
2. Mard eo $\chi^2_c < \chi^2_\alpha$ ne c'hell ket ar goulakad mann bezañ dizarbennet.

EVEZHIADENN 1 — Er prouad o deus ar bannoù hag ar rezoù ur roll kemparzhek, ken evit saveladur ar reveziadoù jedet, ken evit saveladur an dizankant. E se e prouader ivez drezañ ar goulakad — mar bez ur ster dezhañ — e teu ar k standilhon (dasparzh) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ eus an un poblañs savelet warni un doareenn l modelezh (rumm, gwerzhad) $E_1, E_2, \ldots, E_l$.

EVEZHIADENN 2 — A-benn ar fin e kevaraez ar prouad da zinoiñ bezañs un ere etre div zoareenn doareadel dezho a-getep k hag l rumm pe modelezh. E gerioù all e c'haller prouadiñ ha dizalc'h pe get ez int. Heñvel eo argerzh ar *prouad dizalc'hted* ouzh ar prouad ungenezhded, daoust ma'z eo ur gudenn disheñvel.

EVEZHIADENN 3 — Un degouezh dibarek pouezus zo hemañ : unan eus an doareennoù (da skouer an hini a-rezoù) n'en deus nemet daou rumm (div werzhad, div vodelezh). Klask hag un ere zo etre an doareenn $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ hag an doareenn (E_1, E_2) (kudenn a ziskoulmer dre ur prouad a'r χ^2 gant un dizankant $(2-1)(k-1) = k-1$) a c'hell bezañ dezgeriet evel henn ivez : hag argemmañ a ra an dregantad arsellet eus E_1 (e-keñver an hollad $E_1 + E_2$) hervez ar rumm $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$? Ar prouad a gevaraez — mar bez azonek — da zizarbenn ar goulakad mann ezgeriet evel henn : an un dregantad eo evit pep rumm $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

EVEZHIADENN 4 — Un degouezh dibarekoc'h c'hoazh eo an hini ma ne chom evit an doareenn a-vannoù nemet daou rumm (A_1, A_2). Ar gudenn zo hini ar geñveriadenn etre daou dregantad arsellet. He diskoulmañ a reer dre ur prouad a'r χ^2 gant an dizankant 1. Arveret e vez alies ur rezi pevar log, ar gudenn keñveriañ daou dregantad arsellet o vezañ a bouez bras er pleustr.

SKOUERIOÙ :

1. Kroaziet ez eus bet div ouennad plantennoù, an eil o kaou an doareenn A hag eben an doareenn B. Ungenezh eo ar gentañ remziad, hag an eil a lak da ziwanañ 4 rizh plantennoù, a zo o fenotip notet AB, Ab, aB, ab. Mar bez treuzkaset an doareennoù hervez savelennoù Mendel ez eo kenfeurioù ar 4 fenotip : 9/16, 3/16, 3/16, 1/16.

An daolenn amañ dindan a erouez disoc'hoù un arnod war 160 plantenn. Ha gwiriañ a ra an doareennoù studiet savelennoù Mendel ?

Fenotip	AB	Ab	aB	ab	Hollad
Kenfeur damkanel (p_i) ...	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1
Reveziad jedet (c_i)	90	30	30	10	160
Reveziad arsellet (a_i)	100	18	24	18	160
Forc'had $(a_i - c_i)$	10	-12	-6	8	0

Bezet ar goulakad mann : ar standilhon a zeu eus ar boblañs.

Mar deu ar standilhon eus ar boblañs e c'haller degemer gant ur riskl da faziañ $\alpha = 0,05$ e rank χ^2_c chom bihanoc'h eget $\chi^2_\alpha = 7,815$ evit un dizankant =3. Amañ e jeder :

$$\chi^2 = \frac{10^2}{90} + \frac{(-10)^2}{30} + \frac{(-6)^2}{30} + \frac{8^2}{10} = 13,51.$$

Diskleriañ a reomp ez eo azonek ar forc'had ha darbenn a reomp an dazeilad, eleze an doareennoù studiet ne heuliont ket savelennoù Mendel. Bez' e c'haller spizañ an azonegezh : klaskomp e taolenn ar χ^2 an debegezh o klotañ gant 13,51 : gavaelet eo etre 0,001 hag 0,0001. E se ez eo azonek ar forc'had diouzh nebeutoc'h eget 1 %, pezh a dalvez kement-mañ : mar bije arloadus savelennoù Mendel ouzh an doareennoù studiet, hor bije nebeutoc'h eget 1 chañs diwar 100 da gaout ur forc'had brasoc'h pe bar ouzh an hini a zo bet arsellet.

2. Ur vaksin nevez enep ar grip zo bet prouadet war ur standilhon 120 hinienn. Ur strollad test a 120 den anvaksinet zo bet heuliet en ur ser. Sed an disoc'hoù :

A \ E	Tizhet	Antizhet	Hollad
Vaksinet	13	107	120
Anvaksinet	26	94	120
Hollad	39	201	240

Gant ur gwezhiader fiziañs 0,95 ha gallout a rit diogeliñ un dra bennak a-zivout gweredusted ar vaksin ?

Mar lakaer da c'houlakad mann ar vaksinadur hag ar c'hleñvel zo div zoareenn dizalc'h, ez eo dizarbenn ar goulakad mann a vo sellet evel diogeladur gweredusted ar vaksin. Ar prouad da seveniñ zo ur χ^2 dizalc'hted gant un dizankant par da 1. Bezet amañ dindan an daolenn enni ar reveziadoù arsellet en nec'h hag ar reveziadoù jedet en traoñ :

A \ E	Tizhet	Antizhet	Hollad
Vaksinet	13 19,5	107 100,5	120
Anvaksinet	26 19,5	94 100,5	120
Hollad	39	201	240

A se e jeder :

$$\chi_c^2 = \frac{(13-19,5)^2}{19,5} + \frac{(26-19,5)^2}{19,5} + \frac{(107-100,5)^2}{100,5} + \frac{(94-100,5)^2}{100,5} = 5,17.$$

Diskouez a reer ivez e c'haller jediñ war-eeun diwar an daolenn gentañ, hep tremen dre ar reveziadoù jedet :

$$\chi_c^2 = \frac{240(13 \times 94 - 26 \times 107)^2}{120 \times 120 \times 39 \times 201} = 5,17.$$

Ar gwezhiader fiziañs zo $0,95$, eleze ur gourin azonegezh $0,05$. An dizankant zo 1 hag an daolenn a ro ar χ_α^2 damkanel $\chi_{0,05}^2 = 3,841$. Neuze en hon eus

$$\chi_c^2 \geqslant \chi_{0,05}^2$$

ha devredañ a reer o tizarbenn ar goulakad mann. War a hañval ez eo gweredus ar vaksin.

3. Disoc'hoù dedro ur c'hleñved war-lerc'h daou vezegadur A ha B a roer en daolenn amañ dindan, e pep log niver ar glañvourion a bep rumm :

Stad / Mezegadur	Pare	Gwelladur	Stad kestal	Hollad
A	280	210	110	600
B	220	90	90	400
Hollad	500	3001	200	1000

Ha lavarout a c'haller ez eo disheñvel an daou vezegadur ?

Bezet ar goulakad mann: Heñvel eo an daou vezegadur A ha B.
Ur prouad a'r χ^2 a sevener : ur prouad ungenezhded. Bezet ar jedadurioù :

Stad / Mezegadur	Pare	Gwelladur	Stad kestal	Hollad
A	280 300	210 180	110 120	600
B	220 200	90 120	90 80	400
Hollad	500	300	200	1000

Bezet :

$$\chi_c^2 = \frac{(280-300)^2}{300} + \frac{(220-200)^2}{200} + \frac{(210-180)^2}{180} + \frac{(90-120)^2}{120} + \frac{(110-120)^2}{120} + \frac{(90-80)^2}{80} \approx 17,92$$

An dizankant : $\nu = (3-1)(2-1) = 2$.

1. Mard eo $\alpha = 0,05$ e lenner : $\chi^2_{0,05} = 5,99$.
2. Mard eo $\alpha = 0,01$ e lenner : $\chi^2_{0,001} = 13,82$.

En daou zegouezh en hon eus : $\chi_c^2 > \chi_\alpha^2$ ha dizarbennet eo G_0, gant ar riskl bihan kenan $0,001$ zoken. Gallout a reer diogeliñ enta : gweredoù disheñvel o deus an daou vezegadur.

16.2 PROUADOÙ KEÑVERIAÑ

16.2.1 Keñveriañ div aliested

16.2.1.1 Prouad kenfurmded etre un aliested arsellet hag un aliested damkanel

Ar gudenn-mañ he deus talvezet dimp da erouezañ an hentennouriezh amañ diaraok. Resizomp :

• **Degouezh ur prouad daoudu** — Ar goulakad dazeilat zo ar c'hontrol eus ar goulakad mann G_0, eleze ar forc'had etre f (arsellet) ha p (gortozet) zo re vras evit bezañ displegadus dre-berzh an neuennadoù standilhonañ.

Hentenn savelañ :

1. Bezet ar goulakad mann : kenfurm eo f arsellet ouzh p damkanel.
2. Jediñ a reer ar werzhad :

$$u = \frac{f-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

ha dibab ar riskl α a'r spesad kentañ.

3. Lenn a reer en daolenn 3 an niver u_α, hevelep ma'z eo :

$$P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$$

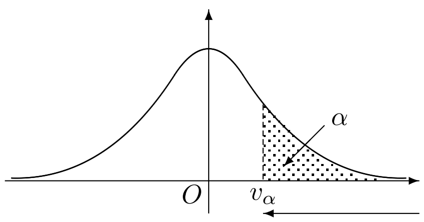
4. Klozañ a reer :
– Mard eo $u \in]-u_\alpha; u_\alpha[$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
– Mard eo $u \notin]-u_\alpha; u_\alpha[$ e tizarbenner G_0 gant un debegezh α da faziañ.

• **Degouezh ur prouad untu** — Lakaomp e ve *a-gentouez* an aliested arsellet f brasoc'h (pe vihanoc'h) eget an aliested damkanel. Anavezet eo arouez u a-gentouez enta, da skouer $u > 0$. Domani dizarbenn G_0 zo un entremez loet en un tu hepken e-keñver an orin O. En degouezh-se e saveler v_α, hevelep ma ve $P(U \geqslant v_\alpha) = \alpha$, pezh a glot gant $P\big(|U| \geqslant v_\alpha\big) = 2\alpha$.

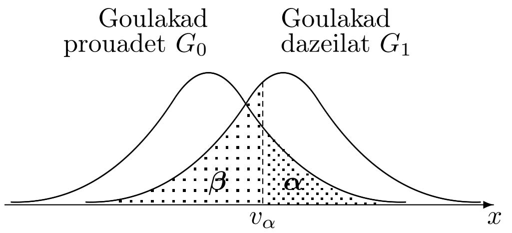
Klozadur $(u > 0)$ **:**

1. Mard eo $u < v_\alpha$, ar goulakad mann G_0 ne c'hell ket bezañ dizarbennet.

2. Mard eo $u \geqslant v_\alpha$, ar goulakad mann G_0 a zizarbenner gant ur riskl da faziañ par da α.



G_0 dizarbennet



Domani eizik : $x > u_\alpha$

Al lun dehou amañ diaraok a ziskouez an daou rizh fazi : dizarbenn G_0, hag eñ gwir (α) ha mirout G_0, hag eñ faos (β). Mard eo f ha g an tebekterioù ketep dindan G_0 ha G_1 ha mard eo W an domani eizik, teskad ar poentoù o kas da zizarbenn G_0, neuze ez eo tebegezh ar fazi a'r c'hentañ spesad par da :

$$\alpha = \int_W f(t)\, dt,$$

ha tebegezh ar fazi a'n eil spesad zo par da :

$$\beta = 1 - \int_W g(t)\, dt.$$

Kounañ avat ez eo jedet an tebegezhioù-se dindan goulakadoù disheñvel, hag ivez ne anavezer ket engortoz jedoniel p' an dazeilad !

16.2.1.2 Keñveriañ div aliested arsellet (prouad ungenezhded)

• Ar gudenn

War ziv boblañs P_1 ha P_2 e studier un doareenn stadegel dezhi div vodelezh A hag $\overline{A}$. Pep hinienn zo dezhi A pe $\overline{A}$. Aliestedoù A er poblañsoù P_1 ha P_2 zo p_1 ha p_2, daou niver dianav. Eus an div boblañs ez eztenner daou standilhon E_1 hag E_2 o mentoù a-getep n_1 hag n_2, aliestedoù an darvoud hinienn dezhi A o vezañ a-getep f_1 hag f_2.

Houmañ eo ar gudenn : hag azonek eo ar forc'had etre f_1 hag f_2, pe er c'hontrol displegadus dre an neuennadoù standilhonañ?

Notomp F_1 hag F_2 ar gwehanadurioù dargouezhel dezho ar gwerzhadoù f_1 hag f_2 war bep standilhon a ventoù n_1 hag n_2.

• Ar prouad

1. Goulakad G_0 : lakaomp e c'haller arnesaat an dasparzhioù binomel dre an dasparzhioù reol, an amplegadoù kendivizat dibabet o vezañ :

$$n_1 \geqslant 30 \ ; \ n_2 \geqslant 30 \ ; \ n_1 f_1 \geqslant 5 \ ; \ n_1(1-f_1) \geqslant 5 \ ; \ n_2 f_2 \geqslant 5 \ ; \ n_2(1-f_2) \geqslant 5.$$

Neuze, dindan ar goulakad G_0, ar gwehanadur dargouezhel :

$$U = \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n_1} + \dfrac{p(1-p)}{n_2}}}$$

zo dezhañ war-bouez nebeut un dasparzh reol kreizet direet.

2. Prizadur p : dindan ar goulakad mann G_0 e c'haller kembodañ an daou standilhon ha prizañ a reer p dre :

$$\hat{p} = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}.$$

• **Devredad, klozadur**

Jediñ a reer gwerzhad ar gwehanadur dargouezhel U, bezet :

$$u = \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}.$$

Ha dibab a reer ar riskl α a'r c'hentañ spesad. Daou zegouezh :

***a*) Prouad daoudu :** an dazeilad G_1 zo ar c'hontrol eus ar goulakad mann G_0. Lenn a reer en daolenn an niver u_α, hevelep ma'z eo $P\big(|U| \geqslant u_\alpha\big) = \alpha$.

Klozadur :

1. Mard eo $u \in]-u_\alpha, u_\alpha[$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
2. Mard eo $u \notin]-u_\alpha, u_\alpha[$ e tizarbenner ar goulakad mann gant un debegezh da faziañ par da α.

***b*) Prouad untu :** mard eo anvezus a-gentouez $p_1 < p_2$ ez eo ar goulakad dazeilat G_1 : $p_1 > p_2$. En degouezh-se ez eus atav $u > 0$. Savelañ a reer neuze v_α, hevelep ma'z eo $P\big(U \geqslant v_\alpha\big) = \alpha$, pezh a glot gant $p\big(|U| \geqslant v_\alpha\big) = 2\alpha$.

Klozadur ($u > 0$) :

1. Mard eo $u < v_\alpha$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
2. Mard eo $u \geqslant v_\alpha$ e tizarbenner ar goulakad mann gant un debegezh da faziañ par da α.

EVEZHIADENN — Evit keñveriañ div aliested kantouezel e c'haller arverañ ivez ur prouad ungenezhded a'r χ^2.

16.2.2 Keñveriañ daou geitad

16.2.2.1 Prouad kenfurmded etre ur c'heitad arsellet hag ur c'heitad damkanel

• **Ar gudenn**

Bezet X ur gwehanadur dargouezhel savelet war ur boblañs gant $E(X) = \mu$ ha $V(X) = \sigma^2$. An doareenn gementadel X a arseller war un n-standilhon, ar gwerzhadoù gorreet o deus da geitad $\overline{x}$ ha da hebiant prizet s^2. Houmañ eo ar gudenn : ha derc'houezañ ar boblañs a ra ar standilhon, ha derc'houezus eo, eleze ha displegadus eo ar forc'had stadet etre μ hag $\overline{x}$ dre an neuennadoù standilhonañ ?

Sed ar goulakadoù da brouadiñ :

1. G_0 : eztennet eo bet ar standilhon eus ar boblañs ; kenfurm eo e geitad $\overline{x}$ gant keitad μ ar boblañs.

Evit an dazeilad ez eus daou zibarzh :

2. G_1 : $\overline{x}$ ned eo ket kenfurm gant μ (prouad daoudu).
3. G_2 : $\overline{x}$ ned eo ket kenfurm gant μ, gant a-gentouez $\overline{x}$ brasoc'h (pe vihanoc'h) eget μ (prouad untu).

• Degouezh ur standilhon bras ($n > 0$)

***a*) Delakadenn :** evit ur gwehanadur dargouezhel X diforzh,

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

zo dezhañ war-bouez nebeut un dasparzh reol kreizet direet. Bezet :

$$u = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

ar werzhad kemeret gant ar gwehanadur U.

***b*) Devredad e degouezh ur prouad daoudu :** ar riskl α a'r spesad kentañ o vezañ festet e lenner en daolenn 3 an niver u_α, hevelep ma'z eo : $P\big(|U| \geqslant u_\alpha\big) = \alpha$.

1. Mard eo $u \in]-u_\alpha, u_\alpha[$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $u \notin]-u_\alpha, u_\alpha[$ e tizarbenner G_0 gant an debegezh α da faziañ.

***c*) Devredad e degouezh ur prouad untu ($u > 0$) :** ar riskl α a'r c'hentañ spesad o vezañ festet e saveler v_α, hevelep ma'z eo $P(U \geqslant v_\alpha) = \alpha$, pezh a glot gant $P\big(|U| \geqslant\ \big) = 2\alpha$, eleze $v_\alpha = u_{2\alpha}$.

1. Mard eo $u < v_\alpha$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $u \geqslant v_\alpha$ e tizarbenner G_0 gant un debegezh α da faziañ.

• Degouezh ur standilhon bihan hag ur boblañs c'haosat

***a*) Delakadenn :** mard eus da X un dasparzh reol, dindan ar goulakad mann G_0 ez eus da $\overline{X}$ un dasparzh reol war-bouez nebeut : $\mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.
Mard eo anavezet μ e rener ar prouad evel e degouezh ur standilhon bras.
Hogen dianav eo σ al liesañ hag e brizañ a reer dre s. E tro ur standilhon bihan e kemmer anien dasparzh $\overline{X}$ oc'h erlec'hiañ s ouzh σ.

***b*) Delakadenn :** dindan G_0, ar gwehanadur dargouezhel

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$$

zo dezhañ dasparzh Student gant $n-1$ derez dizankted. Jediñ a reer ar werzhad kemeret gant ar gwehanadur T, bezet :

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}.$$

***c*) Devredad e tro ur prouad daoudu :** ar riskl α a'r c'hentañ spesad o vezañ festet, an dizankant o vezañ anavezet, e lenner en daolenn nivXXXX an niver t_α, hevelep ma'z eo $P\big(|T| \geqslant t_\alpha\big) = \alpha$.

1. Mard eo $t \in]-t_\alpha, t_\alpha[$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $t \notin]-t_\alpha, t_\alpha[$ e tizarbenner G_0 gant un debegezh α da faziañ.

***d*) Devredad e tro ur prouad untu ($t > 0$) :** ar riskl α a'r c'hentañ spesad o vezañ festet, an dizankant o vezañ anavezet, e saveler r_α, hevelep ma'z eo $P(T \geqslant r_\alpha) = \alpha$, pezh a glot gant :

$$P\big(|T| \geqslant r_\alpha\big) = 2\alpha, \qquad \text{bezet :} \quad r_\alpha = t_{2\alpha}.$$

1. Mard eo $t < r_\alpha$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $t \geqslant r_\alpha$ e tizarbenner G_0.

16.2.2.2 Keñveriañ daou geitad arsellet e tro standilhonoù dizalc'h (prouad ungenezhded)

- **Ar gudenn**

Studiañ a reer ur gwehanadur dargouezhel X war ziv boblañs P_1 ha P_2. Notañ a reer : μ_1 ha σ_1 keitad ha strewant X war P_1, μ_2 ha σ_2 keitad ha strewant X war P_2. Dianav eo an holl arventennoù-se.

Eus P_1 ez eztenner ur standilhon E_1 a vent n_1 ha jediñ a reer e geitad $\overline{x}_1$ ha s_1, prizad σ_1.

Eus P_2 ez eztenner ur standilhon E_2 a vent n_2 ha jediñ a reer e geitad $\overline{x}_2$ ha s_2, prizad σ_2.

Lakaat a reer ez eo dizalc'h ar standilhonoù E_1 hag E_2. Houmañ eo ar gudenn : hag azonek eo ar forc'had etre ar c'heitadoù kantouezel $\overline{x}_1$ hag $\overline{x}_2$, pe re c'hontrol displegadus dre an neuennadoù standilhonañ ?

Ar goulakadoù da brouadiñ zo :

1. G_0 : $\mu_1 = \mu_2$, eleze ungenezh eo P_1 ha P_2, pe c'hoazh ned eo ket azonek ar forc'had etre $\overline{x}_1$ hag $\overline{x}_2$.

Evit an dazeilad ez eus daou zibarzh :

2. G_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$ (prouad daoudu).

3. G_2 : $\mu_1 > \mu_2$ (pe $\mu_1 < \mu_2$), mard eo anavezet arouez $\mu_1 - \mu_2$ a-gentouez (prouad untu).

- **Standilhonoù bras ($n_1 > 30$ hag $n_2 > 30$)**

***a*) Delakadenn :** dindan ar goulakad mann G_0 hag evit X diforzh, ar gwehanadur dargouezhel

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

zo dezhañ un dasparzh reol kreizet direet, war-bouez nebeut.

Amañ e chom digemm ar c'hlozadur pa erlec'hier s_1^2 hag s_2^2 ouzh σ_1^2 ha σ_2^2. Jediñ a reer enta :

$$u = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

***b*) Devredad e degouezh ur prouad daoudu :** α o vezañ festet e lenner u_α, hevelep ma'z eo $P\big(|U| \geqslant u_\alpha\big) = \alpha$.

1. Mard eo $u \in]-u_\alpha, u_\alpha[$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
2. Mard eo $u \notin]-u_\alpha, u_\alpha[$ e tizarbenner ar goulakad mann. Lavarout a reer neuze ez eo $\overline{x}_1$ hag $\overline{x}_2$ diforc'h gant ar riskl α.

***c*) Devredad e degouezh ur prouad untu ($u > 0$) :** α o vezañ festet e lenner v_α, hevelep ma'z eo $P(U \geqslant v_\alpha) = \alpha$, pezh a glot gant $P\big(|U| \geqslant v_\alpha\big) = 2\alpha$.

1. Mard eo $v < v_\alpha$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
2. Mard eo $v \geqslant v_\alpha$ e tizarbenner ar goulakad mann gant un debegezh (ur riskl) da faziañ α.

• Standilhonoù bihan ($n_1 \leqslant 30$ pe $n_2 \leqslant 30$) eztennet eus poblañsoù gaosat

***a*) Delakadenn :** dindan G_0, mard eus da X un dasparzh reol war P_1 ha war P_2, ha mard eo $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, neuze ar gwehanadur dargouezhel

$$T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sigma \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

zo dezhañ dasparzh Student gant un dizankant $n_1 + n_2 - 2$, war-bouez nebeut.

***b*) Evezhiadenn :** o vezañ ma ne anavezer na σ_1 na σ_2, evit dedalvout an delakadenn-se e ranker da gentañ prouadiñ parder an daou hebiant (Sl. ¶ 16.2.3.5). Mar darbenner ar goulakad $\sigma_1 = \sigma_2$ ez eo prizet ar werzhad voutin-se σ dre :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Evit dedalvout an delakadenn e jeder neuze :

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}.$$

***c*) Devredad e tro ur prouad daoudu :** ar riskl α o vezañ festet hag an dizankant o vezañ anavezet e lenner t_α en daolenn 4, hevelep ma'z eo $P\big(|T| \geqslant t_\alpha\big) = \alpha$.

1. Mard eo $t \in] - t_\alpha, t_\alpha[$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
2. Mard eo $t \notin] - t_\alpha, t_\alpha[$ e tizarbenner ar goulakad mann. Lavarout a reer neuze ez eo $\overline{x}_1$ hag $\overline{x}_2$ diforc'h gant ar riskl α.

***d*) Devredad e tro ur prouad untu ($t > 0$) :** α o vezañ festet hag an dizankant o vezañ anavezet e lenner r_α en daolenn 4, hevelep ma'z eo $P(T \geqslant r_\alpha) = \alpha$.

1. Mard eo $t < r_\alpha$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
2. Mard eo $t \geqslant r_\alpha$ e tizarbenner ar goulakad mann gant an debegezh (ar riskl) da faziañ α.

16.2.2.3 Keñveriañ daou geitad arsellet e degouezh standilhonoù parigellet (prouad ungenezhded)

• Ar gudenn

Daou standilhon E_1 hag E_2 a lavarer *parigellet* pa'z eo kevredet pep gwerzhad $x_{1,i}$ eus E_1 gant ur werzhad $x_{2,i}$ eus E_2. Daou standilhon parigellet zo dezho an un ment enta. Houmañ eo ar gudenn : ha displegadus eo ar forc'had etre keitadoù $\overline{x}_1$ hag $\overline{x}_2$ an daou standilhon dre an neuennadoù standilhonañ ?

Ar goulakadoù da brouadiñ zo :

1. Goulakad mann G_0 : $\mu_1 = \mu_2$;
2. Dazeilad G_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$ mard eo daoudu ar prouad ; $\mu_1 > \mu_2$ (pe $\mu_1 < \mu_2$) mard eo untu ar prouad.

• **Ar prouad**

Jediñ a reer an n forc'had $d_i = \overline{x}_1 - \overline{x}_2$. Ar standilhon $\{d_1, \ldots, d_n\}$ zo dezhañ da geitad $\overline{d}$ ha da strewant prizet s.

Dindan ar goulakad mann e rank ar gwehanadur dargouezhel $\overline{D} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$ kaout ur c'heitad mannel. A se e tisoc'her war geñveriadur ur c'heitad kantouezel $\overline{d}$ gant ur c'heitad damkanel $\mu = 0$.

1. Mard eo $n > 30$ ez arverer un dasparzh reol.
2. Mard eo $n \leqslant 30$ ha mard eo gaosat ar poblañsoù ez arverer un dasparzh Student.

EVEZHIADENN — Mard eo $n \leqslant 30$ ha ma ned eo ket anavezet dasparzhioù P_1 ha P_2 e c'haller arverañ prouad Wilcoxon (Sl. ¶ 10).

16.2.3 Keñveriañ hebiantoù

16.2.3.1 Keñveriañ un hebiant arsellet hag un hebiant damkanel (prouad kenfurmded)

• **Ar gudenn**

Bezet X ur gwehanadur dargouezhel savelet war ur boblañs P gant $E(X) = \mu$ ha $V(X) = \sigma^2$. An doareenn gementadel X a arseller war un n-standilhon, ar gwerzhadoù gorreet o deus da geitad $\overline{x}$ ha da hebiant prizet s^2.

Prouadiñ G_0 eo ar gudenn : ha displegadus eo ar forc'had etre σ^2 hag s^2 dre an neuennadoù standilhonañ, pe c'hoazh : ha desellout a c'haller ar standilhon evel eztennet eus P ?

Studiet e vo amañ degouezh ar prouad daoudu hepken.

• **Ar prouad**

***a*) Delakadenn :** dindan ar goulakad mann G_0, mard eus da X un dasparzh reol, ar gwehanadur dargouezhel

$$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2$$

zo dezhañ dasparzh ar χ^2 gant $\nu = n - 1$ derez dizankted.

***b*) Dedalvezadur e tro $n \leqslant 31$:** jediñ a reer ar werzhad a zo da Y^2 :

$$y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2.$$

Ar riskl a'r c'hentañ spesad α o vezañ festet hag an dizankant o vezañ anavezet e kevaraez an daolenn 5 savelañ a ha b, hevelep ma'z eo :

$$P(a < Y^2 < b) = 1 - \alpha \quad \text{gant} \quad P(Y^2 \geqslant b) = \frac{\alpha}{2} \text{ ha } P(Y^2 \geqslant a) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

1. Mard eo $y^2 \in]a, b[$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $y^2 \notin]a, b[$ e tizarbenner G_0 gant un debegezh α da faziañ.

***c*) Tro $n > 31$:** gwir eo an delakadenn evit n diforzh. Hogen taolennoù ar χ^2 ned eont ket boas pelloc'h eget $\nu = 30$. Ne c'haller ket o arverañ evit $n > 31$ enta.

Delakadenn : mard eo Y^2 ur gwehanadur dargouezhel dezhañ un dasparzh a'r χ^2 gant ν derez dizankted ha mard eo $\nu > 30$, neuze ar gwehanadur dargouezhel

$$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

zo dezhañ war-bouez nebeut un dasparzh reol kreizet direet.

Jediñ a reer ar werzhad a zo da U :

$$u = \sqrt{\frac{2(n-1)}{\sigma^2} s^2} - \sqrt{2n-3}.$$

Ar riskl a'r c'hentañ spesad α o vezañ festet e lenner en daolenn 3 an niver u_α, hevelep ma'z eo : $P\big(|U| \geqslant u_\alpha\big) = \alpha$.

1. Mard eo $u \in]-u_\alpha, u_\alpha[$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
2. Mard eo $u \notin]-u_\alpha, u_\alpha[$ e tizarbenner ar goulakad mann gant ar riskl α da faziañ.

16.2.3.2 Keñveriañ daou hebiant kantouezel (prouad ungenezhded)

• Ar gudenn

War div boblañs P_1 ha P_2 e studier ur gwehanadur dargouezhel X. Notañ a reer : μ_1 ha σ_1^2 keitad ha hebiant X war P_1 ; μ_2 ha σ_2^2 keitad ha hebiant X war P_2. Dianav eo an holl arventennoù-se.

Eus P_1 ez eztenner ur standilhon E_1 a vent n_1, a brizer ar c'heitad hag an hebiant anezhañ dre $\overline{x}_1$ ha s_1^2.
Eus P_2 ez eztenner ur standilhon E_2 a vent n_2, a brizer ar c'heitad hag an hebiant anezhañ dre $\overline{x}_2$ ha s_2^2. An daou standilhon E_1 hag E_2 a c'houlakaer dizalc'h.

Houmañ eo ar gudenn : hag azonek eo ar forc'had etre s_1^2 ha s_2^2, pe er c'hontrol displegadus dre an neuennadoù standilhonañ ? Prouadiñ a reer ar goulakad mann G_0 : $s_1^2 = s_2^2$ enta.

• Ar prouad

a) **Delakadenn :** dindan ar goulakad mann G_0, mard eo gaosat an div boblañs, ar gwehanadur dargouezhel,

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ derez dizankted.

b) **Dasparzh Snedecor :** un dasparzh Snedecor zo un tebekadur kendalc'hek a zo an tebekter par da vann evit $x < 0$ hag e dalc'h div arventenn anvet dizankantoù.

Ar riskl α a'r c'hentañ spesad o vezañ festet e kevaraez taolennoù Snedecor da savelañ f'_α hag f_α, hevelep ma'z eo :

$$P(f'_\alpha < F < f_\alpha) = 1 - \alpha \quad \text{gant} \begin{cases} P(F \leqslant f'_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2} \\ P(F \geqslant f_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

E gwir ne ro an taolennoù nemet f_α. Gallout a reer kaout f'_α : mard eus da F un dasparzh Snedecor gant an dizankantoù $(n_1 - 1, n_2 - 1)$, neuze $1/F$ zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant an dizankantoù $(n_2 - 1, n_1 - 1)$.

c) **Reolenn devredañ :** o vezañ ma ne ro taolennoù Snedecor nemet gwerzhadoù brasoc'h eget 1 e kevamsaver diouzh ret an daou standilhon evit ma ve $s_1^2/s_2^2 \geqslant 1$. Goude e keñverier s_1^2/s_2^2 ouzh f_α.

1. Mard eo $s_1^2/s_2^2 < f_\alpha$ ne c'haller ket dizarbenn ar goulakad mann G_0.
2. Mard eo $s_1^2/s_2^2 \geqslant f_\alpha$ e tizarbenner ar goulakad mann gant ar riskl α da faziañ.

Teurel evezh : bez' ez eus $P(F \geqslant f_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ evit ur riskl a'r c'hentañ spesad α.

16.2.3.3 Keñveriañ lies hebiant kantouezel (prouad Bartlett)

• Ar gudenn

War k poblañs $P_1, P_2, \ldots, P_k$ e studier ur gwehanadur X. Ar poblañsoù a c'houlakaer gaosat. σ_i^2 a arouez hebiant X war P_i ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$). Dianav eo an arventennoù-se.

Eus pep poblañs P_i ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) ez eztenner ur standilhon E_i a vent n_i a brizer σ_i^2 dre s_i^2. Bezet n sammad an n_i-où. Ar standilhonoù a c'houlakaer dizalc'h. Houmañ eo ar gudenn : hag azonek eo ar forc'hadoù arsellet etre an s_i^2, pe er c'hontrol displegadus dre an neuennadoù standilhonañ ?

Prouadiñ a reer ar goulakad mann G_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2$. σ^2 eo ar werzhad voutin-se.

• Ar prouad

S_i^2 o vezañ an hebiantoù standilhonañ (prizet) e c'haller savelañ ar gwehanadur dargouezhel :

$$S_D^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) S_i^2,$$

ha diskouez ez eo ar werzhad kemeret gant ar gwehanadur-se dindan G_0 :

$$s_D^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2,$$

ur prizad eus σ^2, kenhebiant ar poblañsoù.

***a*) Evezhiadenn :** s_D^2 zo keitad an hebiantoù prizet s_i^2, pep hini o vezañ dev-erket dezhañ ar gwezhiader $n_i - 1$.

s_D^2 zo hebiant dilerc'h (pe enstrollel) ar standilhonoù.

***b*) Delakadenn :** dindan G_0, ar gwehanadur savelet dre :

$$B = \frac{1}{\lambda}\left[(n-k)\ln S_D^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln S_i^2\right],$$

gant

$$\lambda = 1 + \frac{1}{3(k+1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-k}\right],$$

zo dezhañ war-bouez nebeut un dasparzh a'r χ^2 gant an dizankant $\nu = k - 1$.

***c*) Arver :** jediñ a reer b, ar werzhad kemeret gant ar gwehanadur B, hag ar riskl α o vezañ festet e lenner en daolenn 5 ar werzhad χ_α^2, hevelep ma ve $P(B > \chi_\alpha^2) = \alpha$.

***d*) Klozadur :**

1. Mard eo $b < \chi_\alpha^2$: ne c'haller ket dizarbenn G_0 ha gallout a reer dezevout o deus ar poblañsoù an un hebiant.
2. Mard eo $b \geqslant \chi_\alpha^2$: dizarbenn a reer G_0 gant ur riskl da faziañ bihanoc'h eget α (a zo an debegezh da faziañ).

16.2.3.4 Elfennadur an hebiant

• Hollekadurioù. Amplegadoù arver

Elfennadur an hebiant a gevaraez keñveriañ keitadoù lies standilhon dizalc'h war-benn prouadiñ delanvad un pe lies parenn. Seurt elfennadur ned eo talvoudek e pep rikted nemet evit standilhonoù eztennet eus poblañsoù reol kenhebiant. Koulskoude, peurliesañ e chom gwiriek ar prouad pa na vez ket kempleget d'an amplegadoù-se : gwevn eo elfennadur an hebiant. Seul vrasoc'h ar fazi devoudet avat, ma'z eo bihanoc'h ha digevataloc'h reveziadoù ar standilhonoù.

Ne vo studiet el levr-mañ nemet elfennadur an hebiant a-geñver gant ur barenn pe ziv.

• **Elfennadur an hebiant a-geñver gant ur barenn. Keñveriañ lies keitad**

***a*) Ar gudenn :** bezet k standilhon dizalc'h $E_1, E_2, \ldots, E_k$ eztennet eus k poblañs $P_1, P_2, \ldots, P_k$ goulakaet gaosat hag a un hebiant σ^2. Notañ a reer ar c'heitadoù ketep : $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

Elfennadur an hebiant a gevaraez keñveriañ a-vloc'h keitadoù ar poblañsoù. Houmañ eo ar goulakad mann enta :

$$G_0 \quad : \quad \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k.$$

Liesañ e klot ar k standilhon gant ar k modelezh eus ur barenn reolet. Da skouer, k stroll klañvourion, pep hini o kaout ur mezegadur disheñvel : ar barenn reolet o vezañ ar barenn mezegadur enta.

***b*) Hebiant dilerc'h, hebiant parennel :** evit pep standilhon E_i a vent n_i e jeder ar c'heitad $\overline{x}_i$ hag an hebiant prizet s_i^2.

Kembod an holl standilhonoù en deus ar vent n, ar c'heitad $\overline{x}$ hag an hebiant prizet s^2. Bez' ez eus :

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \qquad \text{hag} \qquad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \overline{x}_i.$$

s^2 a zezverk strewadur hollad ar roadennoù e-keñver ar c'heitad hollek $\overline{x}$.

Gant ar goulakadennoù derou ez eus ur prizad kentañ eus σ^2, anvet *hebiant dilerc'h* pe *hebiant enstrollel* ha despizet dre :

$$\boxed{\textbf{Hebiant dilerc'h :} \quad s_D^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ji} - \overline{x}_i\right)^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2}\,.$$

s_D^2 zo keitad an hebiantoù prizet s_i^2, ar gwezhiader $(n_i - 1)$ deverket outo.

E-barzh pep stroll ez engwerc'her an neuennadoù standilhonañ dre sammad daouvac'hadoù ar forc'hadoù etre pep gwerzhad ha keitad ar stroll. Dre sammañ an holl zaouvac'hadoù-se evit ar k standilhon e c'hounezer ur sammad a zo treuztaol ar strewadur bloc'hel degaset en hollad dre berzh ar strewadur a zo e-barzh pep stroll :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ji}-\overline{x}_i\right)^2.$$

Da reiñ d'ar sammad karrezioù-se ster ur strewant en e ranner dre an dizankant, eleze niver hollel ar gwerzhadoù lei 1 dre stroll, eleze

$$\nu_1 = n - k.$$

Disoc'hañ a reer evel-se gant an hebiant enstrollel a zo treuztaol ar strewadur degaset e teskad ar gwerzhadoù dre-berzh ar strewadur a zo e pep stroll. Lakaat meiz :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ji}-\overline{x}_i\right)^2 = (n_i-1)s_i^2 = n\cdot s_{ars,i}^2$$

EVEZHIADENN — Bennozh d'ar riñverezed e c'haller kaout s_i^2 pe $s_{ars,i}^2$ aes a-walc'h, hag alese S_D^2.

Dindan ar goulakad mann G_0 ez eus un eil prizad eus σ^2 anvet *hebiant parennel* pe *hebiant etrestrollel* ha despizet dre :

$$\boxed{\textbf{Hebiant parennel:}\qquad s_P^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overline{x}_i-\overline{x}\right)^2}.$$

c) Delakadenn elfennadur an hebiant :

$$(n-1)s^2 = (n-k)s_D^2 + (k-1)s_P^2.$$

Bezet :

$$s^2 = \frac{(n-k)s_D^2 + (k-1)s_P^2}{n-1}$$

d) Prouad ar goulakad mann :

Delakadenn : dindan ar goulakad G_0, ar gwehanadur dargouezhel

$$F = \frac{S_P^2}{S_D^2}$$

zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant an dizankantoù $\nu_1 = n-k$ ha $\nu_2 = k-1$.

Klozadur : bezet α ar riskl a'r c'hentañ spesad dibabet. Lenn a reer e taolenn Snedecor ar werzhad f_α, hevelep ma'z eo :

$$P\left(\frac{S_P^2}{S_D^2} \geqslant f_\alpha\right) = \alpha.$$

1. Mard eo $\dfrac{S_P^2}{S_D^2} < f_\alpha$ ne c'haller ket zizarbenn G_0.

2. Mard eo $\dfrac{S_P^2}{S_D^2} \geqslant f_\alpha$ e tizarbenner G_0 gant ar riskl α da faziañ, eleze ez ardaoler un delanvad azonek d'ar barenn studiet.

• Elfennadur an hebiant a-geñver gant div barenn. Standilhonoù lies arselladenn

***a*) Ar gudenn :** studiañ a reer div barenn war un dro, ur barenn A gant p modelezh hag ur barenn B gant q modelezh. Evit pep hini eus ar pq modelezh a'n daouac'h (A, B) ez eus ur standilhon E_{ij} gant $1 \leqslant i \leqslant p$ hag $1 \leqslant j \leqslant q$. Goulakaat a reer ez eo eztennet ar standilhonoù-se diouzh poblañsoù gaosat dezho an un hebiant. An un ment n zo dezho ivez $(n > 1)$.

Elfennadur an hebiant a-geñver gant div barenn a gevaraez keñveriañ keitadoù ar pq standilhon-se ha prouadiñ :

– Delanvad ar barenn A hepken ;

– Delanvad ar barenn B hepken ;

– Delanvad kenetrewered an div barenn : lavarout a reer ez eus un etrewered pa vez delanvad ur barenn war geitad ar poblañsoù disheñvel gant pe hep an eil parenn.

Bez' ez eus enta 3 goulakad mann ha da heul 3 frouad :

1. $G_{0,A}$: ar barenn A n'he deus delanvad ebet war geitad ar poblañsoù.
2. $G_{0,B}$: ar barenn B n'he deus delanvad ebet war geitad ar poblañsoù.
3. $G_{0,AB}$: n'eus etrewered ebet etre ar parennoù A ha B.

***b*) Hebiant dilerc'h, hebiant parennel :**

Evit pep standilhon E_{ij} e jeder ar c'heitad x_{ij} hag an hebiant prizet s_{ij}^2.

Kembod an holl standilhonoù zo dezhañ ar vent npq, ar c'heitad $\overline{x}$ hag an hebiant prizet s^2. Bez' ez eus :

$$\overline{x} = \frac{1}{npq} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} n\overline{x}_{ij}.$$

Heñvel ouzh elfennadur unparennel an hebiant e tespizer an hebiant dilerc'h dre :

$$\boxed{\textbf{Hebiant dilerc'h :} \qquad s_D^2 = \frac{1}{(n-1)pq} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} (n-1)s_{ij}^2}.$$

s_D^2 zo keitad an hebiantoù prizet s_i^2. E teu : $s_D^2 > 0$ mar $n > 1$.

Heñvel dra e tespizer an hebiant parennel dre :

$$\boxed{\textbf{Hebiant parennel :} \qquad s_F^2 = \frac{1}{pq-1} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} n\big(\overline{x}_{ij} - \overline{x}\big)^2}.$$

Delakadenn elfennadur an hebiant

$$(npq-1)s^2 = (n-1)pqs_D^2 + (pq-1)s_P^2.$$

s^2 zo ur c'heitad daspouezet eus s_D^2 hag s_P^2 enta.

c) **Digenaozadur an hebiant parennel :** evit studiañ delanvad pep hini eus ar parennoù A ha B ha hini o etrewered e tespizer :

1. Ar c'heitadoù a-zianouez :

$$\overline{x}_{i\bullet} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} \overline{x}_{ij} \quad \text{hag} \quad \overline{x}_{\bullet j} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \overline{x}_{ij}.$$

$\overline{x}_{i\bullet}$ zo keitad an $i$vet rez, $\overline{x}_{\bullet j}$ zo keitad an $j$vet bann.

2. An hebiant parennel dre-berzh A hepken :

$$s_A^2 = \frac{qn}{p-1} \sum_{i=1}^{p} \left(\overline{x}_{i\bullet} - \overline{x}\right)^2.$$

3. An hebiant parennel dre-berzh B hepken :

$$s_B^2 = \frac{pn}{q-1} \sum_{j=1}^{q} \left(\overline{x}_{\bullet j} - \overline{x}\right)^2.$$

4. An hebiant parennel dre-berzh etrewered A ha B :

$$s_{AB}^2 = \frac{n}{(p-1)(q-1)} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \left(\overline{x}_{ij} - \overline{x}_{i\bullet} - \overline{x}_{\bullet j} + \overline{x}\right)^2.$$

Delakadenn digenaozadur an hebiant parennel

$$(pq-1)s_P^2 = (p-1)s_A^2 + (q-1)s_B^2 + (p-1)(q-1)s_{AB}^2.$$

E se ez eo S_P^2 ur c'heitad daspouezet eus s_A^2, s_B^2 hag s_{AB}^2.

***d*) Prouad ar goulakadoù mann :**

Delakadennoù

1. Dindan G_{0A}, ar gwehanadur dargouezhel $F_A = \frac{S_A^2}{S_D^2}$ zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant an dizankant $\big(p-1, (n-1)pq\big)$.

2. Dindan G_{0B}, ar gwehanadur dargouezhel $F_B = \frac{S_B^2}{S_D^2}$ zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant an dizankant $\big(q-1, (n-1)pq\big)$.

3. Dindan G_{0AB}, ar gwehanadur dargouezhel $F_{AB} = \frac{S_{AB}^2}{S_D^2}$ zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant an dizankant $\big((p-1)(q-1), (n-1)pq\big)$.

Prouad pep goulakad mann a zezreer evel boaz.

• Elfennadur an hebiant a-geñver gant div barenn. Standilhonoù un arselladenn hepken

***a*) Ar gudenn :** ma n'eus nemet un arselladenn e pep standilhon (bezet $n = 1$) ez eo mannel ar s_{ij}^2-où ha $s_D^2 = 0$ ivez. Ar rannadoù jedet amañ diaraok n'o deus mui ster ebet.

***b*) Ar prouad :**

1. Delakadenn elfennadur an hebiant a zeu da vezañ :

$$(pq - 1)s^2 = (p - 1)s_A^2 + (q - 1)s_B^2 + (p - 1)(q - 1)s_{AB}^2$$

hag a gevaraez jediñ s_{AB}^2 goude bezañ jedet s^2, s_A^2, s_B^2.

2. **Delakadennoù :**

a) Dindan $G_{0,A}$, ar gwehanadur $F_A = \dfrac{S_A^2}{S_{AB}^2}$ zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant an dizankant $\big(p - 1, (p - 1)(q - 1)\big)$.

b) Dindan $G_{0,B}$, ar gwehanadur $F_B = \dfrac{S_B^2}{S_{AB}^2}$ zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant an dizankant $\big(q - 1, (p - 1)(q - 1)\big)$.

Prouad $G_{0,A}$ ha $G_{0,B}$ a zezreer evel boaz, hogen ne c'haller ket prouadiñ $G_{0,AB}$.

16.2.3.5 Keidañ linennek

• Prizadur poentel arventennoù un eeunenn argizañ

***a*) Ar gudenn :** arnodoù 'zo a gas da zesellout en ur ser daou wehanadur dargouezhel X ha Y. Daou zegouezh a c'hell bezañ :

X ha Y zo daou wehanadur dargouezhel a zo o gwerzhadoù savelet en ur ser ;

X zo ur gwehanadur *reolet* gant an imbourc'her, eleze ez eo e werzhadoù anavezet rik dre c'houlakad. Y zo ur gwehanadur dargouezhel ereet ouzh X. An degouezh-se a vo studiet amañ, gant an amkan seveniñ ur c'heidadur etre Y hag X. En amboaz-se e reomp ar goulakadennoù-mañ da heul.

Evit nep gwerzhad $X = x_i$ festet e savel gwerzhadoù ketep Y ur gwehanadur dargouezhel Y_i. Goulakaat a reer ez eus d'an Y_i-où dasparzhioù reol hag ivez :

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= \alpha + \beta x_i \\ V(Y_i) &= \sigma^2 \quad \text{gwerzhad dizalc'h diouzh } x_i. \end{aligned}$$

Liesañ, ar gwerzhadoù α, β ha σ ne vezont ket anavezet ha prizet e vint. Prizad an eeunenn argizañ eo a reer *eeunenn geidañ* anezhi.

EVEZHIADENN — Un doare all zo da zodiñ ar gudenn. Goulakaat a reer ez eo $Y = \alpha+\beta X+\varepsilon$, hag, evit pep gwerzhad festet eus X, ε zo dezhañ ur gwehanadur reol gant $E(\varepsilon) = 0$ ha $V(\varepsilon) = \sigma^2$. Dilerc'h a reer eus ε. Setu perak ez eo σ^2 *hebiant dilerc'h* Y.

***b*) Prizadoù poentel $\boldsymbol{\alpha}$ ha $\boldsymbol{\beta}$:** ouzh n gwerzhad $x_1, \ldots, x_n$ eus X en deus an arnod kevredet n gwerzhad $y_1, \ldots, y_n$ eus Y. Diwar ar standilhon amparet gant an n daouac'h $(x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$ e c'haller jediñ an eeunenn geidañ $y = ax + b$ hag ar gwezhiader keflended linennek r.

Bez' ez eus :

$$b = \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{s_e^2(x)} \quad ; \quad a = \overline{y} - b\overline{x} \quad ; \quad r = \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{s_e(x) \cdot s_e(y)},$$

ma'z eo :

$$\operatorname{Cov}(x, y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y},$$

hag : $s_e(x)$ hag $s_e(y)$ strewantoù ar standilhonoù ketep $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ha $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Bezet A ha B ar gwehanadurioù dargouezhel a zo dezho ar gwerzhadoù a ha b pa arreer ar standilhonoù a vent n.

Delakadenn :

$$E(A) = \alpha \quad ; \quad E(B) = \beta,$$

Neuze ez eo a ha b prizadoù poentel angwelch α ha β.

***c*) Prizad poentel an hebiant dilerc'h $\boldsymbol{\sigma^2}$:** gwelet hon eus e c'haller digenaozañ an hebiant :

$$\text{hebiant } y = \text{hebiant displeget } + \text{ hebiant dilerc'h.}$$

Delakadenn : prizadur σ^2 a c'hell bezañ sevenet angwelch dre :

$$\begin{aligned} s_D^2 &= \frac{n}{n-2} \times \text{hebiant dilerc'h ar standilhon} \\ &= \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \\ &= \frac{n}{n-2}(1-r^2)s_e^2(y) \end{aligned}$$

• **Entremezioù fiziañs**

***a*) Entremez fiziañs ar gwezhiader roud $\boldsymbol{\beta}$:**

Delakadennoù :

1. Hebiant B zo par da $\dfrac{\sigma^2}{ns_e^2(x)}$. Prizet e c'hell bezañ dre $s_B^2 = \dfrac{s_D^2}{ns_e^2(x)}$.

2. Ar gwehanadur dargouezhel $T\frac{B-\beta}{s_B}$ zo dezhañ un dasparzh Student gant an dizankant $n-2$.

Entremez fiziañs $\boldsymbol{\beta}$: ur riskl α_1 o vezañ dibabet e lenner en daolenn 4 gwerzh t_α, hevelep ma'z eo $P\big(|T| \geqslant t_{\alpha_1}\big) = \alpha_1$. Ha lavarout a c'haller, gant ar riskl α_1, emañ ar gwezhiader roud damkanel β en entremez fiziañs : $]b-t_{\alpha_1}s_B, b+t_{\alpha_1}s_B[$?

***b*) Etremez fiziañs $\boldsymbol{\alpha}$:**

Delakadennoù :

1. Hebiant A zo par da $\sigma^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\overline{x}^2}{ns_e^2(x)}\right)$. Prizet e c'hell bezañ dre :

$$s_A^2 = s_D^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{ns_e^2(x)}\right) = \frac{s_D^2}{n^2 s_e^2(x)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

2. Ar gwehanadur dargouezhel $T = \dfrac{A-\alpha}{s_A}$ zo dezhañ un dasparzh Student gant an dizankant $n-2$.

Entremez fiziañs α : evel diaraok e c'haller lavarout emañ α damkanel, gant ar riskl α_1 en entremez fiziañs : $]a - t_{\alpha_1} s_A, a + t_{\alpha_1} s_A[$.

***c*) Entremez fiziañs ur werzhad hiniennel prizet :** Ar c'heidadur linennek ur wech sevenet a c'hell talvout da rakwelout gwerzhad c'hortozet Y pa vez festet $X = x_0$ gant an imbourc'her. Prizad poentel ar werzhad-se zo :
$\hat{y}_0 = a + bx_0$.
Gant ar riskl α_1 ez eo entremez fiziañs Y :

$$\left]\hat{y}_0 - t_{\alpha_1}\sqrt{s_D^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\overline{x}\right)^2}{ns_e^2(x)}\right)},\ \hat{y}_0 + t_{\alpha_1}\sqrt{s_D^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\overline{x}\right)^2}{ns_e^2(x)}\right)}\right[$$

ma wir t_{α_1} : $P\big(|T| \geqslant t_{\alpha_1}\big) = \alpha_1$, pa en deus T un dasparzh Student gant an dizankant $n-2$.

• Keñveriañ arventennoù un eeunenn geidañ kantouezel gant gwerzhadoù damkanel

***a*) Ar gudenn :** heñvel eo an notadurioù. Anavezet eo ar gwerzhadoù damkanel α ha β a sell ouzh ar boblañs hag ar gwerzhadoù a ha b eus un eeunenn geidañ gounezet diwar un n-standilhon. Keñveriet e vo lerc'h ouzh lerc'h b gant β, ha goude a gant α.

***b*) Keñveriañ ar gwezhiaderioù roud :**

G_0 : ar forc'had etre β damkanel ha b kantouezel zo displegadus dre an neuennadoù standilhonañ.
O vezañ ma'z eus da $T = \frac{B-\beta}{s_B}$ un dasparzh Student gant an dizankant $n-2$ e jeder $t = \frac{b-\beta}{s_B}$. A hent all, ar riskl α_1 o vezañ dibabet hag an dizankant anavezet, e saveler gant an daolenn 4 an niver t_{α_1}, hevelep ma'z eo :
$P\big(|T| \geqslant t_{\alpha_1}\big) = \alpha_1$.

1. Mard eo $t \in]-t_{\alpha_1}[$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $t \notin]-t_{\alpha_1}[$, e tizarbenner G_0 gant ar riskl α_1.

Degouezh dibarek : gallout a reer prouadiñ $\beta = 0$. Kement-se a dalvez n'emañ ket $E(Y)$ e dalc'h X.

A-wechoù e lavarer ez eo azonek ar c'heidañ mard eo dizarbennet ar goulakad $\beta = 0$.

***c*) Keñveriañ an hedennoù en orin :**

G_0 : ar forc'had etre α ha a zo displegadus dre an neuennadoù standilhonañ.

O vezañ ma'z eus da $T = \frac{A-\alpha}{s_A}$ un dasparzh Student gant an dizankant $n-2$ ez eo heñvel ar prouad ouzh an degouezh amañ diaraok.

Degouezh dibarek : gallout a reer prouadiñ $\alpha = 0$. Kement-se a dalvez ne dremen ket an eeunenn argizañ, er boblañs, dre an orin.

• **Keñveriañ div eeunenn geidañ kantouezel** — Ne vo keñveriet amañ nemet ar gwezhiaderioù roud.

***a*) Ar gudenn :** war ur boblañs P e wir gwehanadurioù X ha Y ar goulakadoù ezgeriet e derou ar rannbennad-mañ.
War ur boblañs P' ez eo ereet ur gwehanadur Y' ouzh an un gwehanadur reolet X, gant an hevelep goulakadoù.

Eus pep poblañs ez eztenner ur standilhon gant pep a vent n ha n'. Gwezhiaderioù roud an eeunennoù keidañ gounezet zo a-getep : b ha b', ha prizadoù poentel an hebiant dilerc'h : s_D^2 ha $s_D'^2$.

Mennout a reer keñveriañ gwezhiaderioù roud β ha β' an eeunennoù argizañ damkanel.

***b*) Rakprouad :**

G_0 : $\sigma^2 = \sigma'^2$.

Delakadenn : dindan G_O hag ar goulakadoù usveneget, ar gwehanadur $F = \frac{S_D^2}{S_D'^2}$ zo dezhañ un dasparzh Snedecor gant an dizankant $(n-2, n'-2)$.
Heñvel eo ar prouad ouzh hini keñveriadenn daou hebiant kantouezel.

Mard eo darbennet G_0 ez eo prizet an hebiant dilerc'h boutin d'an div boblañs dre :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n-2)s_D^2 + (n'-2)s_D'^2}{n+n'-4}.$$

***c*) Keñveriañ gwezhiaderioù roud an div eeunenn argizañ :**

$G_0:\ \beta = \beta'$.

Delakadenn : dindan G_0 hag ar goulakadoù usveneget, ar gwehanadur

$$T = \frac{B - B'}{\hat{\sigma}\sqrt{\dfrac{1}{ns_e^2(x)} + \dfrac{1}{n's_e'^2(x)}}}$$

zo dezhañ un dasparzh Student gant an dizankant $n + n' - 4$.

Er riñvenn-se ez eo $s_e^2(x)$ hebiant x_i-où ar standilhon eztennet eus P — eleze a-geñver gant X ha Y — hag $s_e'^2(x)$ hebiant x_i-où ar standilhon eztennet eus P' — eleze a-geñver gant X ha Y'.

Ar prouad : jediñ a reer t, ar werzhad kemeret gant T.

Ar riskl α_1 a'r c'hentañ spesad o vezañ dibabet hag an dizankant anavezet e saveler gant an daolenn 4 an niver t_{α_1}, hevelep ma'z eo
$P\big(|T| \geqslant t_{\alpha_1}\big) = \alpha_1$.

1. Mard eo $t \in]-t_{\alpha_1}[$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $t \notin]-t_{\alpha_1}[$, e tizarbenner G_0 gant ar riskl α_1.

16.2.3.6 Keflended

• Prizadur ur gwezhiader keflended

***a*) Ar gudenn :** war ur boblañs P e teseller daou wehanadur dargouezhel X ha Y, hevelep ma'z eo :

Pe ez eo X ur gwehanadur reolet, Y ur gwehanadur en e zalc'h o wiriañ goulakadoù ar rannbennad kent, ha linennek eo argizañ Y e-keñver X.

Pe ez eus d'an daouac'h (X, Y) un dasparzh reol divvent.

Bezet ρ ar gwezhiader keflended etre X ha Y er boblañs. Prizañ ρ eo ar gudenn.

***b*) Prizad poentel ρ :**

Eus ar boblañs e eztenner ur standilhon n daouac'h (x_i, y_i) hag e kevreder outañ e wezhiader keflended :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{s_e(x)\cdot s_e(y)}, \quad \text{ma'z eo : } \mathrm{Cov}(x,y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y},$$

kehebiant ar standilhon, $s_e(x)$ hag $s_e(y)$ zo strewantoù ar standilhonoù ketep $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ha $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Bezet R ar gwehanadur dargouezhel a gemer ar werzhad r pa arreer ar standilhonoù a vent n.

Delakadenn :

$$E(R) \approx \rho + \frac{\rho(1-\rho^2)}{2(n-1)}.$$

Prizad poentel $\boldsymbol{\rho}$: liesañ e kemerer r evit prizad ρ. A-wechoù ez arverer ur prizad spisoc'h :

$$r\left(1 + \frac{1-r^2}{2(n-3)}\right).$$

c) Prizad $\boldsymbol{\rho}$ dre un entremez fiziañs :

Bezet an niver z savelet dre :

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \mathrm{Arg\,th}\, r,$$

ha Z ar gwehanadur dargouezhel a gemer ar werzhad z pa arreer ar standilhonoù a vent n.

Bezet ζ an niver savelet dre :

$$\zeta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = \mathrm{Arg\,th}\, \rho.$$

Delakadenn : dindan ar goulakadoù usveneget, gant n bras a-walc'h, Z zo dezhañ un dasparzh reol war-bouez nebeut :

$$\mathcal{N}\left(\zeta\,;\, \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right).$$

Dereat eo ar prizad-se evit $n \geqslant 20$.

Entremez fiziañs ρ : eus an delakadenn e tezreer entremez fiziañs ζ gant ar riskl α :

$$\left]z - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n-3}}\,;\, z + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n-3}}\right[$$

ma lenner u_α en daolenn 3.

Gallout a reer dezren un entremez ennañ ρ gant un debegezh

$$1-\alpha \ :]r_1, r_2[=]\operatorname{th} z_1; \operatorname{th} z_2[$$

ma'z eo th savelet dre :

$$\operatorname{th} z = \frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}},$$

hag a zo kevreizhenn geveskemm Arg th.

• Keñveriañ ur gwezhiader keflended kantouezel gant ur werzhad damkanel

***a*) Ar gudenn :** ar goulakadoù o vezañ an hevelep re ha diaraok e teseller ur standilhon n daouac'h (x_i, y_i) a zo ar gwezhiader keflended r. Ha gallout a reer lavarout ez eo ar standilhon-se tennet eus ur boblañs ma'z eo ρ ar gwezhiader keflended ?

Houmañ eo ar goulakad mann enta G_0 : eztennet eo ar standilhon eus ar boblañs ; ned eo ket azonek ar forc'had etre ρ ha r.

***b*) Degouezh $\rho = 0$:** en degouezh-se, mard eo gwir G_0,

$$T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$$

zo dezhañ un dasparzh Student gant an dizankant $n-2$. Jediñ a reer enta :

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

A du 'rall e ro an daolenn 4 an niver t_α, hevelep ma'z eo : $P\big(|T| \geqslant t_\alpha\big) = \alpha$.

1. Mard eo $t \in]-t_\alpha, t_\alpha[$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $t \notin]-t_\alpha, t_\alpha[$, e tizarbenner G_0 gant ar riskl α_1.

Evezhiadenn — Mar bez dizarbennet G_0 ez empleg ned eo ket dizalc'h ar gwehanadurioù dargouezhel X ha Y.

***c*) Degouezh $\rho \neq 0$:** dindan G_0 hag ar goulakadoù usveneget, $U = (Z - \zeta)\sqrt{n-3}$ zo dezhañ dasparzh $\mathcal{N}(0;1)$ war-bouez nebeut. Jediñ a reer enta :

$$u = (z - \zeta)\sqrt{n-3}.$$

A hent all e ro an daolenn 3 an niver u_α, hevelep ma'z eo : $P\big(|U| \geqslant u_\alpha\big) = \alpha$.

1. Mard eo $u \in]-u_\alpha, u_\alpha[$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $u \notin]-u_\alpha, u_\alpha[$, e tizarbenner G_0 gant ar riskl α.

• Keñveriañ daou wezhiader keflended kantouezel

***a*) Ar gudenn :** desellout a reer div boblañs o wiriañ ar goulakadoù usveneget, ma'z eo ar gwezhiaderioù keflended dianav ρ_1 ha ρ_2.

Bezet daou standilhon a ventoù n_1 hag n_2, dezho da wezhiaderioù keflended ketep r_1 ha r_2.

Prouadiñ a reer G_0 : $\rho_1 = \rho_2$.

***b*) Ar prouad :** bezet

$$z_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right), \quad z_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right)$$

ha Z_1 ha Z_2 ar gwehanadurioù dargouezhel keñverek.

Delakadenn : mard eo gwir G_0 ha mard eo n_1 hag n_2 bras a-walc'h ($\geqslant 20$), neuze

$$U = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}}$$

zo dezhañ dasparzh $\mathcal{N}(0;1)$.

Alese e rener prouad G_0 evel boaz.

• Keñveriañ lies gwezhiader keflended kantouezel

***a*) Ar gudenn :** bezet k poblañs ($k > 2$) o wiriañ ar goulakadoù usveneget, ma'z eo ar gwezhiaderioù keflended dianav : $\rho_1, \ldots, \rho_k$.

Eztennañ a reer k n_i-standilhon dezho bep a wezhiader keflended r_i.

Kel zo a geñveriañ a-vloc'h ar gwezhiaderioù keflended, pezh a gas da brouadiñ G_0 : $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k$.

***b*) Ar prouad :** evit i oc'h argemmañ eus 1 da k e saveler an niveroù

$$z_i = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r_i}{1 - r_i} \right)$$

hag o c'heitat daspouezet :

$$\overline{z} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} (n_i - 3) z_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} (n_i - 3)}.$$

Notañ a reer Z_i ha $\overline{Z}$ ar gwehanadurioù keñverek.

Delakadenn : mard eo gwir G_0 ha mard eo bras a-walc'h an n_i-où ($\geqslant 20$), neuze

$$Y^2 = \sum_{i=1}^{k} \big(n_i - 3\big)\big(Z_i - \overline{Z}\big)^2$$

zo dezhañ dasparzh ar χ^2 gant an dizankant $k - 1$.

Jediñ a reer neuze :

$$y^2 = \sum_{i=1}^{k} \big(n_i - 3\big)\big(y_i - \overline{y}\big)^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3) z_i^2 - \overline{z}^2 \sum_{i=1}^{k} (n_i - 3).$$

A hent all, an dizankant o vezañ anavezet hag ar riskl α o vezañ dibabet, e ro an daolenn 5 an niver χ^2_α, hevelep ma'z eo : $P\big(Y^2 \geqslant \chi^2_\alpha\big) = \alpha$.

1. Mard eo $y^2 \leqslant \chi^2_\alpha$, ne c'haller ket dizarbenn G_0.
2. Mard eo $y^2 > \chi^2_\alpha$, e tizarbenner G_0 gant ar riskl α.

16.2.3.7 Prouadoù anarventennel

• Digoradur

Ar prouadoù klasel keñveriañ keitadoù ha hebiantoù, hag ivez elfennadur an hebiant, ne c'hellont bezañ dedalvezet e pep rikted nemet da standilhonoù o tont diouzh poblañsoù reol. Peurliesañ, ma ne gempleger ket d'an amplegadoù-se, ned eo ket re bouezus evit a sell gwiriegezh ar prouad (nemet evit keñveriañ an hebiantoù). Pa vez bihan reveziadoù ar standilhonoù e c'hell ar fazi bezañ brasoc'h ha gwell eo arverañ ur rizh prouadoù all, talvoudek evit forzh petore poblañsoù. Lavarout a reer ez eo *anarventennel* ar prouadoù-se, pa na rekizont ket prizadur arventennoù (keitad ha strewant) ar poblañsoù.

Studiet e vo amañ dindan ar pevar frouad anarventennel :

1. Prouad Mann ha Whitney a gevaraez keñveriañ keitadoù daou standilhon dizalc'h (keveleb anarventennel prouad Student eo).
2. Prouad Wilcoxon a gevaraez keñveriañ keitadoù daou standilhon parigellet (kevredet elfenn hag elfenn).
3. Prouad Kruskal ha Wallis a gevaraez keñveriañ keitadoù lies standilhon (keveleb anarventennel elfennadur unparennel an hebiant eo).
4. Prouad Spearman : ur prouad keflended anarventennel.

Ar pevar frouad-se o deus ar perzh-mañ : ouzh ar gwerzhadoù arsellet ez erlec'hier o renkoù er standilhonoù. Prouadoù renkoù eo ez int.

• Prouad Mann ha Whitney

***a*) Ar gudenn :** bezet daou standilhon, dizalc'h hag andizilerc'h, E_1 hag E_2, a ventoù ketep n_1 ha n_2. Ar pal zo keñveriañ daou geitad kantouezel, eleze prouadiñ ar goulakad mann G_0 : $\mu_1 = \mu_2$.

***b*) Ar prouad :** renkañ a reer war gresk hollad gwerzhadoù an daou standilhon. Ouzh pep gwerzhad eus $E_1 \cup E_2$ e teverker e renk er rummadur-se. Mar bez rampo gant gwerzhadoù 'zo e teverker da bep hini ur renk par da geitad ar renkoù o deus (da skouer, mar bez daou bevare rampo e teverker da bep hini ar renk 4,5).

Evit pep elfenn x_i eus E_1 e konter niver an elfennoù eus E_2 loet war-lerc'h x_i (o kontañ 0,5 pep elfenn eus E_2 rampo gant x_i).

Notañ a reer u_1 sammad an holl werzhadoù kevredet en doare-se ouzh holl elfennoù E_1.

Heñvel dra e tespizer u_2 dre gantamsaviñ rolloù E_1 hag E_2. Goude e toder :

$$u = \min(u_1, u_2),$$

eleze ez eo u ar werzhad bihanañ.

Evezhiadennoù :

1. Gwiriañ a reer : $u_1 + u_2 = n_1 n_2$.
2. u_1 hag u_2 a c'haller kaout ivez evel henn : bezet r_1 ha r_2 sammad renkoù gwerzhadoù pep hini eus an daou standilhon. E degouezh rampo e saveler ar renkoù evel diskouezet amañ diaraok. Bez' ez eus :

$$u_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - r_1 \quad \text{hag} \quad u_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - r_2.$$

Da ren ar prouad ez arverer u. Ur prouad all oc'h arverañ r_1 hag r_2 a c'hell bezañ erlec'hiet outañ.

***c*) Devredad :** bezet $\mathcal{U}$ ar gwehanadur dargouezhel dezhañ ar werzhad u e disoc'h an arnod dargouezhel.

1. An taolennoù 8 ha 9 a ro, a-gevreizh da n_1, n_2 hag α ar werzhad m_α, hevelep ma'z eo dindan ar goulakad mann G_0 : $P(\mathcal{U} \leqslant m_\alpha) = \alpha$, en degouezhioù ma'z eo $\alpha = 0,005$ hag $\alpha = 0,01$. Ar goulakad mann a zizarbenner neuze mar bez $u \leqslant m_\alpha$.
2. Mard eo n_1 ha n_2 bras a-walc'h (n_1 hag $n_2 \geqslant 20$), neuze, mard eo gwir G_0, $\mathcal{U}$ zo dezhañ war-bouez nebeut an dasparzh reol $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, gant :

$$\mu = \frac{n_1 n_2}{2} \quad \text{hag} \quad \sigma = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}.$$

Neuze e jeder gwerzhad ar gwehanadur dargouezhel reol direet : $\varepsilon = u - \mu/\sigma$.Ar riskl α a'r c'hentañ spesad o vezañ dibabet e ro an daolenn 3 u_α. Dizarbenn a reer G_0 ma n'emañ ket ε en entremez $]-u_\alpha, u_\alpha[$.

• **Prouad Wilcoxon**

***a*) Ar gudenn :** bezet daou standilhon parigellet, eleze pep gwerzhad eus ur standilhon zo kevredet ouzh ur werzhad a'r standilhon all. An un ment zo dezho enta. Ar goulakad mann G_0 zo parder keitadoù an daou standilhon : $\mu_1 = \mu_2$.

***b*) Ar prouad :** jediñ a reer ar forc'had etre ar gwerzhadoù parigellet. An diforc'hioù mannel a lamer ha notañ a reer N niver ar forc'hadoù anvannel.

An kez forc'hadoù a rummer dre urzh war gresk o gwerzhadoù dizave. Ouzh pep forc'had e teverker e renk er rummadur-se. Mar bez rampo etre gwerzhadoù 'zo e teverker dezho ur renk par da geitad ar renkoù o deus. Jediñ a reer : w_+ sammad renkoù ar forc'hadoù muiel ha w_- sammad ar renkoù leiel. Gwiriañ a reer ez eo :

$$w_+ + w_- = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Notañ a reer : $w = \min(w_+, w_-)$ ar werzhad vihanañ.

***c*) An devredad :** bezet ar gwehanadur W dezhañ ar werzhad w e disoc'h an arnod dargouezhel.

1. Mard eo $N \leqslant 25$ e ro an daolenn 10 a-gevreizh da N ar werzhad w_α, hevelep ma'z eo dindan ar goulakad mann G_0 : $P(W \leqslant w_\alpha) = \alpha$ en degouezhioù $\alpha = 0,05$ hag $\alpha = 0,01$.

Ar goulakad mann a zizarbenner mard eo $w \leqslant w_\alpha$

2. Mard eo $N > 25$, pa vez gwir G_0, W zo dezhañ war-bouez nebeut dasparzh ar gwehanadur reol $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, gant

$$\mu = \frac{N(N+1)}{4} \quad \text{hag} \quad \sigma = \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}.$$

Neuze e jeder gwerzhad ar gwehanadur dargouezhel reol direet : $u = w - \mu/\sigma$ hag he c'heñveriañ a reer gant ar werzhad u_α lennet war an daolenn 3.

Mard eo $|u| \geqslant u_\alpha$ e tizarbenner ar goulakad mann gant ar riskl α. Klozañ a reer enta ez eo azonek forc'had ar c'heitadoù.

• **Prouad Kruskal ha Wallis**

***a*) Ar gudenn :** bezet k standilhon dizalc'h hag andizilerc'h $E_1, \ldots, E_k$ a ventoù ketep $n_1, \ldots, n_k$. Ar pal zo keñveriañ a-vloc'h ar k keitad kantouezel, eleze prouadiñ ar goulakad mann G_0 : $\mu_1 = \cdots = \mu_k$.

***b*) Ar prouad :** rummañ a reer war gresk hollad ar gwerzhadoù eus ar k standilhon. Renk pep gwerzhad a saveler goude, evel er prouadoù amañ diaraok, mar bez rampo etre reoù 'zo.

Evit pep standilhon E_i e noter r_i sammad renkoù gwerzhadoù ar standilhon. Jediñ a reer neuze ar c'hementad :

$$h = \frac{12}{n(n+1)} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{n_i} \right) - 3(n+1)$$

ma'z eo $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ ar reveziad hollel.

***c*) Devredad :** bezet H ar gwehanadur dargouezhel dezhañ ar werzhad h e disoc'h an arnod dargouezhel.

1. Mard eo an n_i-où bras a-walc'h ($n_i > 5$ evit pep i), neuze, mard eo gwir G_0, H zo dezhañ war-bouez nebeut dasparzh ar χ^2 gant an dizankant $k-1$. En daolenn 5 e lenner ar werzhad χ^2_α, hevelep ma'z eo $P(H \geqslant \chi^2_\alpha) = \alpha$ ha dizarbenn a reer G_0 mar bez $h \geqslant \chi^2_\alpha$.

2. Ma n'eo ket bras a-walc'h an n_i-où ez eus taolennoù o reiñ ar werzhad h_α, hevelep ma'z eo $P(H \geqslant h_\alpha) = \alpha$. Dizarbenn a reer neuze G_0 evit $h \geqslant h_\alpha$.

An daolenn 11 a ro h_α, evit $\alpha = 0,05$ hag $\alpha = 0,01$, e degouezh tri standilhon a vent bihanoc'h pe bar ouzh 5.

• **Gwezhiader keflended renkel Spearmann**

***a*) Ar gudenn hag ar prouad :** war ur boblañs e teseller daou wehanadur dargouezhel X ha Y, ar pal o vezañ prouadiñ ar goulakad mann G_0 : ankeflended etre X ha Y.

War an amboaz-se e vez peurliesañ n daouac'h (x_i, y_i) a werzhadoù eus X ha Y savelet war un dro. Ma ne ouzer netra a-zivout X ha Y, ne c'haller ket dedalvout an disoc'hoù gounezet amañ diaraok. En dro-se e renker dre an urzh war gresk, a-ziforc'h, ar werzhadoù $\{x_1, \ldots, x_n\}$ hag $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Amsaviñ a reer neuze pep gwerzhad x_i dre he renk x'_i ha pep gwerzhad y_i dre he renk y'_i. Mar bez rampo e reer evel amañ diaraok.

Evezhiadenn : mar c'hoarvez an arselladennoù a rummañ war-eeun an hiniennoù a-geñver gant an div zoareenn X ha Y en hon eus diouzhtu an daouac'hoù (x'_i, y'_i).

Despizadur : *gwezhiader keflended renkel Spearmann* a reer eus an niver r_s par d'ar gwezhiader keflended jedet diwar an daouac'hoù (x'_i, y'_i).

Delakadenn : bezet $d_i = x'_i - y'_i$ an diforc'hioù renk. Ma n'eus ket rampo etre gwerzhadoù 'zo ez eus ivez :

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2 - 1)}.$$

Goulakad mann : mar arouez ρ_s gwezhiader keflended renkel Spearman war ar poblañsoù e skriver G_0 da brouadiñ : $\rho_s = 0$.

***b*) Devredad :** bezet R_s ar gwehanadur dargouezhel dezhañ da werzhad r_s e disoc'h an arnod dargouezhel.

1. Mard eo $n \geqslant 10$, mard eo gwir G_0, ar gwehanadur dargouezhel :

$$T = \frac{R_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - R_s^2}}$$

zo dezhañ war-bouez nebeut un dasparzh Student gant an dizankant $n-2$. Jediñ a reer neuze

$$t = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_s^2}}.$$

A du 'rall, an daolenn 4 a ro an niver t_α, hevelep ma'z eo : $P\big(|T| \geqslant t_\alpha\big) = \alpha$.

a) Mard eo $t \in]-t_\alpha, +t_\alpha[$, ne c'haller ket dizarbenn G_0 gant ar riskl α.

b) Mard eo $t \notin]-t_\alpha, +t_\alpha[$, e tizarbenner G_0 gant ar riskl α. Dezastum a reer ez eo ereet X ha Y, hep gouzout penaos.

2. Mard eo $n < 10$ ne c'haller ket arverañ an arnesadur kent. Hogen taolennoù zo o reiñ a-geñver gant n hag α ar werzhad r_α, hevelep ma'z eo dindan G_0 : $P\big(|R_s| > r_\alpha\big) = \alpha$.

Dizarbenn a reer enta ar goulakad mann mard eo $|r_s| > r_\alpha$.

An daolenn 12 a ro r_α evit $n \in \{4, \ldots, 13\}$ hag ar riskloù $\alpha = 0,10$; $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,02$; $\alpha = 0,01$.

POELLADENNOÙ

16.01 En ur greizenn treuzskuilhañ gwad ez eus bet gorreet an dasparzh-mañ da heul eus rizhoù gwad 525 roer gwirvoziat :

O	A	B	AB
251	219	29	26

O c'houzout ez eo dasparzh ar rizhoù gwad er boblañs vloc'hel an hini da heul :

O	A	B	AB
44,5 %	44 %	8 %	3,5 %

arverañ prouad ar χ^2 gant ar gwehin faziañ $\alpha = 5$ % evit gouzout ha heñvel eo dasparzh ar roerion dre rizh gwad ouzh hini ar boblañs, war-bouez an neuenn-adoù standilhonañ.

16.02 *a*) War ur rolled ez eus 37 niverenn. A-douez 10 000 abadenn ez eo deuet ar mann 298 gwech er-maez. Prouadiñ diouzh ar gwehin 5 % ar goulakad-mañ : azonek eo ar forc'had etre tebegezh kaout ar mann diouzh 1/37.

b) Prouadiñ an un goulakad gant ur prouad a'r χ^2. Keñveriañ.

16.03 Da-geñver un imbourc'h greunventerezh war ouelezennoù ez eus bet gorreet, evit daou standilhon C ha D, an naouusterioù da heul a-zivout dasparzh treuzkizoù ar greun (e mikron).

	C	D
Niver ar greun	96	53
Keitad	62	72
Strewant	15	13

Hag azonek eo ar forc'had etre an daou standilhon evit a sell treuzkiz ar greun ?

16.04 Niver an dornlevrioù Jedoniezh angerc'het e kreizenn teuliaouiñ ha stlennañ ul lise zo erouezet en daolenn amañ dindan, evit ur sizhun ordinal :

Dilun	Dimeurzh	Dimerc'her	Diriaou	Digwener
3	14	11	13	15

Ha desellout a c'haller ez eo an angerc'hadennoù dornlevrioù dizalc'h diouzh an deiz a'r sizhun ?

16.05 Ur bevoniour a ra dezventadurioù diwar-bouez un hentenn vuzuliañ ar skinoberiegezh ha n'en deus neuze nemet un niver bihan kenan a werzhadoù. Bec'h B_1 un erlamad kentañ zo bet muzuliet peder gwech ha setu ar gwerzhadoù gorreet :

$$3,9 \quad ; \quad 3,8 \quad ; \quad 4,1 \quad ; \quad 3,6.$$

Bec'h B_2 un eil erlamad zo bet muzuliet pemp gwech ha setu ar gwerzhadoù gorreet :

$$3,9 \quad ; \quad 2,8 \quad ; \quad 3,1 \quad ; \quad 3,7 \quad ; \quad 4,1.$$

Jediñ prizadoù $\overline{x}_1$ hag s_1, $\overline{x}_2$ hag s_2 keitad ha strewant an daou steudad muzulioù. Prouadiñ ar goulakad G_0 : $E(B_1) = E(B_2)$.

16.06 Un amaezhierezh a ra un enklask a-zivout arc'hwel e zrafoù. Un draf test zo bet prouadet e-pad un devezhiad labour didorr 8 eurvezh ha taolet ez eus bet pled ouzh hirder al lost gortoz. Gorreet eo bet hirder al lost bep 5 munut. Sev an disoc'hoù :

Lost gortoz	goullo	1 arval	2 arval	3 arval	4 arval	$\geqslant$ 5 arval
Niver an arselladennoù	29	36	25	2	3	0

a) Bezet ar gwehanadur dargouezhel X : hirder al lost gortoz. Jediñ ur prizad eus an engortoz jedoniel $E(X)$.

b) Arverañ prouad ar χ^2 diouzh ar gourin 5 % evit prouadiñ ar goulakad G_0 : ar gwehanadur dargouezhel X zo dezhañ un dasparzh poasonat.

16.07 Klask a reer gouzout hag un ere bennak zo etre aliested ur c'hleñved hag ar rizh gwad. War 200 klañvour arsellet ez eus 104 den a'r rizh O, 76 a'r rizh A, 18 a'r rizh B ha 2 a'r rizh AB. War ar boblañs a-bezh e tarbenner an dasparzh-mañ da heul : O : 47 % ; A : 43 % ; B : 7 % ; AB : 3 %. Petra dezastum ?

16.08 Un enklask renet e 150 kevelouri c'hounezel a-zivout donedigezh ar gevelourion en deus roet an disoc'hoù-mañ da heul dre eurvezh :

Niver ar gevelourion	0	1	2	3	4	5	6
Niver ar c'hevelourioù	37	46	39	19	5	3	1

a) Prizañ keitad ha hebiant ar boblañs.

b) Ha darbenn a c'haller, diouzh ar riskl 5 %, ez eus un dasparzh poasonat gant ar boblañs?

16.09 Dezventadurioù kementad hollel an drenkenn aspartek en troazh e mg / 24 h, zo bet graet war daou stroll oadourion dezho un hanren boued reol, ur stroll 53 maouez hag ur stroll 48 paotr. Setu en daolenn amañ dindan an disoc'hoù :

Rummadoù (mg / 24 h)	Reveziadoù (merc'hed)	Reveziadoù (paotred)
0 – 20	0	2
20 – 40	2	1
40 – 60	6	4
60 – 80	10	4
80 – 100	17	6
100 – 120	8	11
120 – 140	9	8
140 – 160	0	5
160 – 180	0	3
180 – 200	1	2
200 – 220	0	0
220 – 240	0	2

Savelañ a reer daou wehanadur dargouezhel : $X=$ gwerzh an dezventad evit ur plac'h ha Y = gwerzh an dezventad evit ur paotr. Jediñ ar prizadoù m_X eus $E(X)$ ha s_X eus $\sigma(X)$. Jediñ ar prizadoù m_Y eus $E(Y)$ ha s_Y eus $\sigma(Y)$.

Prouadiñ diouzh ar gourin faziañ 1 % ar goulakad mann : E(X)=E(Y).

16.10 War-lerc'h an un mezegadur ez eus bet arsellet 40 disoc'h mat war ur boblañs a 70 klañvour yaouank ha 50 disoc'h mat war ur boblañs a 100 klañvour kozh.

Hag un ere zo etre oad ar c'hlañvour ha gwered ar mezegadur, diouzh ar riskl 10 %?

16.11 Da-geñver arnodoù hiloniel war ar gwini ez eus bet stadet dinodadur un doare-enn nevez, dinoadus hepken er bleuñv. Savelet ez eus bet ent kantouezel er skodad nevez-se e oa aliested dinodiñ an doareenn par da 0,15. War-benn prouadiñ amveziadoù paotaat an hiniennoù dezho an doareenn-se e tasparzher standilhonoù 5 hinienn e douaroù ha gweredreoù disheñvel.

a) Desellout a reer ar gwehanadur dargouezhel X a ro niver dinodadurioù an doareenn studiet en ur standilhon 5 hinienn.

Pe zasparzh tebegoù zo gant X ?

b) Studiañ a reer 100 standilhon 5 hinienn. Da goulz ar bleuñv e saveler war bep standilhon niver an hiniennoù o tiskouez an doareenn. Sed an disoc'hoù :

Niver an hiniennoù dezho an doareenn	0	1	2	3	4	5
Niver ar standilhonoù	399	401	150	46	3	1

Studiañ kenfurmded an disoc'hoù-se gant an dasparzh damkanel savelet er *a*).

16.12 Da-geñver ur studi vevoniel a-zivout ur spesad blotviled ez eus bet muzuliet bec'h ar protein evit 36 hinienn. Sed an disoc'hoù gorreet :

Bec'h protein e mg	$]0;1,5]$	$]1,5;3]$	$]3;4,5]$	$]4,5;6]$	$]6;7,5]$	$]7,5;9]$	$]9;10,5]$
Niver an hiniennoù	8	7	4	9	2	3	3

a) Prizañ keitad ha hebiant ar boblañs.

b) Ha darbenn a c'haller ez eo gaosat dasparzh ar bec'h protein ?

16.13 E poblañs ar Frañsizion, dregantad an dud dezho ur gwad resuz leiel zo 15 %. En ur standilhon derc'houezus a 200 euskariz ez arseller 44 hinienn dezho ur resuz leiel.

Ha diogeliñ a c'haller, diouzh ar riskl 0,05, ez eo disheñvel Euskariz diouzh peurrest Frañs, evit a sell an doareenn resuz ?

16.14 Gorreet ez eus bet an disoc'hoù-mañ da heul goude bezañ heuliet e-doug 20 vloaz ur stroll 200 butuner hag ur stroll 200 anvutuner.

	Anvutunerion	Butunerion
Kankreion	20	40
Ankankreion	180	160

Arverañ daou brouad disheñvel evit skarat, diouzh ar riskl 5 %, hag azonek eo ar forc'hadoù arsellet pe get.

16.15 War-benn prederiañ ur rizh yoc'henn bennak ez eus bet arveret daou zoare.

War 40 klañvour prederiet hervez an doare A ez eus bet arsellet ur feur mervel 15 % dindan 5 bloaz.

War 60 klañvour prederiet hervez an doare B ez eus bet arsellet ur feur mervel 25 % dindan 5 bloaz.

Mar deseller ar feur mervel dindan 5 bloaz, ha diogeliñ a c'haller ez eo azonek an disheñvelder etre an doareoù A ha B diouzh ar riskl 10 % ? diouzh ar riskl 5 % ?

16.16 Feur ar berzh er vachelouriezh en ur steudad roet zo bet 67 %.

a) En ur greizenn arnodenniñ A ez eus bet 216 degemered diwar 300 emstriver. Ha kenfurm eo an disoc'hoù-se gant an disoc'hoù hollek ?

b) En ur greizenn arnodenniñ B eus an un kêr ez eus bet 126 degemered diwar 200 emstriver. Hag azonek eo ar forc'had etre an div greizenn A ha B ?

c) Ar 150 emstriver eus ur greizenn C o deus holl heuliet un hentenn diougonadel dibarek. Ha gwerc'hek eo bet an hentenn pa'z eus bet 109 degemered ?

Seveniñ ar prouadoù diouzh ar gourin azonegezh 5 %.

16.17 Erspizadurioù ul lia bennak a veneg e rank pep moustrad enderc'hel 2,5 g eus un danvezenn weredus. 100 moustrad zo bet dibabet ent dargouezhel er c'henderc'had ha dielfennet. Ent keitad ez eus 2,6 g eus an danvezenn weredus, gant ur strewant prizet $s = 0{,}4$ g.

Ha gallout a reer diogeliñ e kempleg al lia d'an erspizadurioù ($\alpha = 0{,}05$) ?

16.18 War zaou standilhon avaloù eo bet gorreet :

a) An hini kentañ e derou an eost : ment = 100, keitad = 120 g, strewant prizet = 20 g.

b) An eil e dibenn an eost : ment = 150, keitad = 150 g, strewant prizet = 10 g.

Hag azonek eo ar forc'had etre ar pouez keitat e derou hag e dibenn an eost ?

16.19 Da 6 youlad ez eus bet diounezet un hunwezher A hag arselliñ a reer ar c'houskvezhioù da heul :

Hinienn	1	2	3	4	5	6
t (min)	15	27	38	19	45	8

D'an dud-se e tiounezer un hunwezher all B ur miz goude. Sed an disoc'hoù neuze :

Hinienn	1	2	3	4	5	6
t (min)	10	23	35	10	45	10

Ha forc'hadoù azonek zo diouzh ar riskl 5 % etre kouskvezhioù A ha B ? Kentren a reer ez eo gaosat an daou zasparzh.

16.20 War ur stroll 10 klañvour ez arnoder gweredoù ur mezegadur evit digreskiñ ar gwask talmerel. Sed an disoc'hoù arsellet (gwerzhioù ar gwask talmerel sistolek e cm Hg).

Hinienn	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kent mezegadur	15	18	17	20	21	18	17	15	19	16
Goude prederiadur	12	16	17	18	17	15	18	14	16	18

Hag azonek eo gwered ar mezegadur, diouzh ar gourin 5 % ? Kentread : gaosat eo ar poblañsoù.

16.21 Arc'hwel un doenerez nevez a venner keñveriañ gant reolad boas ar greanti, eleze ur strewant par da $\sigma = 4$ g.

a) Gorren a reer a-douez ar boestoù leuniet gant an doenerez nevez ur standilhon a vent 10 gant ur strewant prizet par da $s = 4{,}84$ g.

Ha gallout a reer lavarout ez eo kenfurm ar werzhad-se ouzh ar reolad ? ren ar prouad diouzh ar gourin 5 % o lakaat ez eo reol ar gwehanadur dargouezhel o reiñ tolz pep boest.

b) Hevelep goulenn o lakaat ez eo bet jedet an strewant gant ur standilhon 50 hinienn.

16.22 Studiet eo bet ungenezhded askorad daou rizh pradoù. Pep rizh zo bet rannet e logelloù. Sed an disoc'hoù gorreet (e kg/ar) :

	Prad 1	Prad 2
Logell 1	19,8	15,9
Logell 2	20,6	19,8
Logell 3	27,0	20,9
Logell 4	29,5	22,5
Logell 5	29,9	26,3

Lakaat a reer ez eo dasparzh ar gwehanadur o reiñ an askoradoù. Ha lavarout a c'haller o deus an div boblañs an un hebiant, diouzh ar gourin 5 % ? Mar bez ya ar respont, ha gallout a reer dastum ez eo ungenezh an askoradoù en daou rizh pradoù, dre geñveriañ ar c'heitadoù ?

16.23 Klask a reer gouzout hag azdod danvezennoù harper 'zo en ur vaksin a zaskemm paridigezh an antikorfoù. Evit se e vuzulier ar c'hementadoù antikorfoù paret gant hiniennoù war-lerc'h diounezadur kementadoù vaksin kevatal, enno un harper pe get. Sed ar bec'hioù :

- hep harper : 1, 3, 3, 0, 1 ;
- gant albumin : 2, 4, 5, 4, 3, 6 ;
- gant halioù kalkiom : 3, 3, 4, 5 ;
- gant fosfatoù : 1, 4, 2, 3, 3.

a) Petore goulakadur(ioù) a ranker ober evit gallout erounit kalvezerezh elfennadur an hebiant da ziskoulmañ ar gudenn ? Ha pouezus eo gwiriegezh ar goulakadoù-se en degouezh-mañ ?

b) Mar bez bastet d'ar goulakadurioù-se, hag emañ efedusted ar vaksin e dalc'h :

bezañs an harperioù ?

o hennad ?

c) Ma ne vez ket bastet d'ar goulakadurioù-se, petore araezad stadegel a c'hallfed arverañ ?

16.24 Studiet eo bet padelezh diorreadur un arvevad e diabarzh ur vevedeg ostiz, a-gevreizh d'ar gwrezverk saverezh. Sed an disoc'hoù amañ dindan :

Gwrezverk (° C)	Niver al loened	Pad diorren (deizioù)	
		Keitad	Strewant prizet
16	32	81	6,8
20	33	52	5,2
23	31	46	6,7

16.25 Klask a reer prientiñ ul livrizhenn stabilañ gwellañ. Evit se e kevreder al livrizhuzennoù a, b, c, d ouzh an druzennoù α, β ha γ. Stabilder an 12 livrizhenn a noter eus 0 da 10 :

	a	b	c	d
α	2	1	3	1
β	3	2	3	2
γ	3	4	5	3

Ha disheñvel ent azonek eo ar stabilder diouzh ar gourin 2,5 % ?

– A-geñver gant an druzenn ?

– A-geñver gant al livrizhuzenn ?

16.26 Studiañ a reer ar perzh enzim gant hiniennoù yaouank a-geñver gant an oad hag ar rev. Sed an disoc'hoù :

rev \ oad	< 12	> 12	rev \ oad	< 12	> 12
Paotred	4,9	2,1	Merc'hed	4,5	2,4
	2,9	2,2		6,9	3,6
	2,7	1,1		4,0	4,8
	3,9	2,9		5,4	3,9
	4,6	5,0		1,9	5,5
	3,3	3,5		3,6	5,0
	5,9	2,4		4,8	6,8
	4,8	4,4		3,3	2,2
	4,1	2,1		7,5	3,1
	3,5	3,0		5,8	5,0
	7,2	3,9		4,4	4,1
	6,1	5,6		6,0	4,7

Hag emañ ar perzh enzim e dalc'h an oad ? ar rev ?

16.27 Muzuliet eo bet lugadur ar goulou gant dileizhennoù 4-nitrofenol dezho bec'hioù war gresk. Sed an disoc'hoù evit ul luc'h 400 nm e drohed :

Bec'h B (mol/l)	1×10^{-5}	2×10^{-5}	3×10^{-5}	4×10^{-5}	5×10^{-5}
Lugrez L	0,1865	0,3616	0,5370	0,7359	0,9238

a) Gwiriañ gant ur c'hevregad e c'haller darbenn un daveadur keouenn etre al lugrez hag ar bec'h.

b) O lakaat n'eus fazi ebet war ar bec'hioù, prizañ arventennoù eeunenn geidañ L a-geñver gant B.

1. ent poentel,
2. dre entremezioù fiziañs diouzh ar riskl 5 %.

16.28 Ur c'horf kimiek a zigenaoz diouzh ur gorzh a'r gentañ urzh dezverket gant an atalad : $Q = Q_0 e^{-kt}$, ma'z eo : Q ar c'hementad eus ar c'horf o chom er pred t ; Q_0 ar c'hementad derou : k arstalenn ar buanez digenaozañ.

Sed an disoc'hoù arnodel da heul :

t (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q (nanomol)	416	319	244	188	144	113	85	66	50	41

Diwar-bouez ur c'heidañ linennek, prizañ k ent poentel ha dre un entremez fiziañs diouzh ar riskl 5 %.

16.29 Adkemer roadennoù ar boelladenn 16.26. Ha darbenn a c'haller ez eo kenfeuriek an daveadur etre al lugrez hag ar bec'h, eleze e tremen an eeunenn argizañ (e par ar boblañs) dre an orin (diouzh ar riskl 5 %).

16.30 Adkemer roadennoù ar boelladenn 16.26. Un arnod all a ro an disoc'hoù da heul :

Bec'h B (mol/l)	$2,5 \times 10^{-5}$	5×10^{-5}	10×10^{-5}
Lugrez L	0,396	0,812	1,608

Keñveriañ gwezhiaderioù roud an div eeunenn geidañ.

16.31 Evit prizañ ar gwezhiader keflended etre daou wehanadur war ur boblañs roet e tenner ur steudad standilhonoù dizalc'h, dezho reveziadoù war gresk. Ar gwezhiaderioù keflended arnodel-mañ a c'hounezer :

Standilhon	niv 1	niv 2	niv 3	niv 4
Ment	10	20	50	100
r	0,80	0,52	0,75	0,68

Diwar pep standilhon, prizañ ρ dre un entremez fiziañs diouzh ar riskl 5 %. Kevregañ pep entremez en ur erouezañ gwerzh r. Petra a zezevit da heul an disoc'hoù-se ?

16.32 Studiañ a reer ar geflended etre perzhioù daou enzim gwadveiz. Sed an disoc'hoù :

- er spesad denel $r = -0,296$ evit ur standilhon 30 hinienn.
- er spesad ar bioù $r = 0,452$ evit ur standilhon 21 hinienn.

Evit pep hini eus an daou spesad hag azonek eo ar forc'had etre r ha $\rho = 0$?

16.33 Daou imbourc'hva ospital dizalc'h a studi ar geflended etre disoc'h ur prouad bevoniel ha oad ar glañvourion.

- An imbourc'hva kentañ a gav $r_1 = 0,80$ evit ur standilhon 30 klañvour.
- An eil imbourc'hva a gav $r_2 = 0,95$ evit ur standilhon 50 klañvour.

Hag azonek eo ar forc'had etre an daou imbourc'hva ?

16.34 Da-geñver ur studienn drevvaoniezh a-zivout dasparzh douaregorel ur spesad maligorned ez eo bet muzuliet ar gwezhiader keflended etre uhelder ha ledander ar c'hregin, evit standilhonoù a lies orin douaregorel. Sed an disoc'hoù :

Ment ar standilhon	125	125	30	200	200
r	0,96	0,89	0,98	0,98	0,97

Ha lavarout a c'haller ez eo tennet ar pemp standilhon eus an un poblañs ?