STADEGOURIEZH JEDONIEL

15

Prizañ

15.1 DIVOUD AR STADEGOURIEZH JEDONIEL

15.1.1 Standilhonañ

Studiañ a reer un doareenn en ur boblañs P na c'haller ket haeziñ. Mar eztenner lies standilhon derc'houezus a vent n festet, an neuennadoù arsellet etre an disoc'hoù dre berzh an dargouezh a anver *neuennadoù standilhonañ*. Diwar ur standilhon enta ne c'haller ket kaout gwerzhioù rik an arventennoù, prizadoù hepmuiken.

Adal ma empenter neuennadoù diwar an dargouezh e riskler eus domani an deskrivañ da hini ar Jedoniezh. E se e vo dedalvezet an disoc'hoù gounezet e ser an Debegouriezh. Ar roadennoù gorreet $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dre zargouezh eus ar boblañs — eleze an arselladennoù — a c'hell bezañ desellet evel sevenidigezhioù n gwehanadur dargouezhel $X_1, X_2, \ldots, X_n$, arreadurioù ur gwehanadur dargouezhel X.

15.1.2 Amkanioù

Lazout a ra diforc'hañ daou live :

1. Hini an arselladennoù $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dezho arventennoù kantouezel piaouel : ar c'heitad arsellet $\overline{x} = m_{ars}$, an hebiant arsellet $V_{ars} = s^2_{ars}$, ar strewant arsellet s_{ars}, evel despizet er Stadegouriezh deskrivañ.
2. Hini ar standilhon, sellet evel arreadur ur gwehanadur dargouezhel X_i, evit $i = 1, 2, \ldots, n$. E gerioù all ez arlakaer ez eus d'ar boblañs un delvan jedoniel

evit a sell an doareenn. Eleze e saveler ur gwehanadur dargouezhel X, dezhañ naouusterioù evel an engortoz jedoniel $E(X) = \overline{X} = \mu$, ar strewant σ, an hebiant σ^2. Dianav eo an naouusterioù-se.

Amkan ar Stadegouriezh jedoniel zo diansavelañ delvan tebegouriel ur blegenn dargouezhel. Al lankad kentañ a c'hoarvez eus arlakaat rizh ar gwehanadur studiet : gwehanadur binomel, poasonat, argemmvac'hel, reol . . ? D'an eil e *prizer* naouusterioù ar gwehanadur-se diwar an arselladennoù, ar standilhon a vent n. An trede lankad a vo prouadiñ kevazasted an diansaveladur.

EVEZHIADENN — Evit a sell an notadurioù e vo amberzet al lizherennoù gresianek bihan evit an arventennoù tebegouriel (μ, σ, ρ,. . .), nemet an tebegoù aroueziet dre p, pe q, h.a. Al lizherennoù latin bihan a vo miret evit an arventennoù stadegel (x_i, m_{ars}, s_{ars}, s, r_{ars}, $\overline{x}$, V, . . .). Ar gwehanadurioù dargouezhel pe stadegel a vez aroueziet dre lizherennoù latin bras (X, $\overline{X}$, Y, Z, . . .).

15.2 PRIZAÑ

15.2.1 Perzhioù ur prizer

Bezet θ un arventenn a glasker prizañ hag ivez $X_1, X_2, \ldots, X_n$ an n gwehanadur dargouezhel, eiladoù dizalc'h eus ar gwehanadur dargouezhel delvan. Savelañ a reer ur prizer eus an arventenn θ evel un heuliad gwehanadurioù dargouezhel Y_n kevreizh d'an X_i-où :

$$Y_n = Y_n(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Mar deseller bremañ n arselladenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e pourchaso ar prizer Y_n ur prizad y_n eus θ :

$$y_n = Y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Un nebeut amplegadoù a c'haller savelañ evit ma ve Y_n ur prizer mat eus θ :

Perzh 1 : Y_n zo ur prizer *kengerc'hus* mar kengerc'h a-debegezh war-du θ :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\big(|Y_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \theta| > \varepsilon\big) = 0.$$

Perzh 2 : Ur prizer *angwelch* eo Y_n, mard eo :

$$\forall n, E\big(Y_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta.$$

Ur prizer a vez lavaret *angwelch ent kehelc'hat* mard eo :

$$\lim_{n\to\infty} E\big(Y_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big) = \theta.$$

Perzh 3 : Ur prizer *dirwerc'hek* eo Y_n, mar en deus — o vezañ kengerc'hus hag angwelch — ar bihanañ hebiant a-douez an holl brizerioù dezho an daou berzh kentañ-se.

Un delakadenn a bouez a zienaer diwar-bouez dibarder Čebičev : mard eo ur prizer angwelch ent kehelc'hat ha mar tenn e hebiant war-du mann pa $n \to \infty$, neuze ez eo kengerc'hus. Diwar se e veizer ivez perak ez eo ar werc'hegezh liammet war-eeun ouzh bihander an hebiant.

EVEZHIADENN — E-lec'h angwelch e lavarer ivez *eogreizet*, ar c'hontrol o vezañ *gwelchet* pe *dogreizet*.

15.2.2 Prizadur poentel

15.2.2.1 Prizadur un debegezh

Dianav eo tebegezh $p = P(A)$ un darvoud A. Da brizañ p ez eo azas aliested f an darvoud A en un arnod n arreadur dizalc'h, eleze n arselladenn. An aliested f — e dalc'h an dargouezh — zo sevenidigezh ar gwehanadur dargouezhel F. Da gaout f e ranner reveziad $r_n(A)$ an darvoudoù A dre ment n ar standilhon. An n arselladenn zo sevenidigezhioù ur gwehanadur dargouezhel X dasparzhet ent binomel $\mathcal{B}(n, p)$. Neuze en hon eus :

$$E(X) = n \cdot p \qquad \text{hag} \quad V(X) = np(1-p).$$

O vezañ ma'z eo $f = \frac{r_n(A)}{n}$ e tespizer ar gwehanadur dargouezhel $F = \frac{X}{n}$. Diwar berzhioù an engortoz hag an hebiant e tenner :

$$E(F) = p \qquad \text{hag} \qquad V(F) = \frac{p(1-p)}{n} \leqslant \frac{1}{4n}.$$

An hebiant a c'hell bezañ ken bihan ha ma venner, mar dibaber n bras a-walc'h. Neuze :

$$\lim_{n\to\infty} V(F) = 0.$$

Evit pep n ez eo engortoz jedoniel ar gwehanadur dargouezhel F par d'an arventenn p a glasker prizañ. E se ez eo F ur prizer angwelch eus p. An angwelchded zo kefleuniet evit n diforzh, eleze evit gwerzhioù bihan eus n. Prizadoù dereat a c'hounezer gant gwerzhioù etre. Gwerc'hegezh ur prizer bennak zo e dalc'h hebiant F, a c'hell bezañ ken bihan ha ma venner, gant ma ve n bras a-walc'h. Da heul, evit n bras e vo an darn vuiañ eus gwerzhioù F en-dro d'e engortoz jedoniel p. E se ma ne gerzer nemet ur standilhon a vent n ez eo an aliested f arsellet prizad gwellañ p.

15.2.2.2 Prizadur un engortoz

Dianav eo engortoz jedoniel (keitad) $E(X) = \mu$ ur gwehanadur dargouezhel X. War-benn prizañ an arventenn μ e sevener n arread dizalc'h eus an arnod dargouezhel o savelañ bondeskad X. D'an i-vet arread e c'horreer ar werzhad x_i eus ar standilhon a zo sevenidigezh ar gwehanadur dargouezhel X_i evit $i = 1, 2, \ldots, n$. Da neuze ar c'heitad arsellet :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

zo sevenidigezh ar gwehanadur dargouezhel

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Ar gwehanadur X zo dezhañ an hebiant $V(X) = \sigma^2$, a zo ivez hebiant an holl wehanadurioù X_i.

Diwar berzhioù an engortoz jedoniel hag an hebiant e teu :

$$E\big(\overline{X}\big) = \mu \qquad \text{hag} \qquad V\big(\overline{X}\big) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Evit pep n ez eo ar gwehanadur dargouezhel keitad $\overline{X}$ ur prizer kengerc'hus hag angwelch. Ouzhpenn se e vez peurliesañ (nemedennoù zo) ur prizer dirwerc'hek eus an engortoz jedoniel μ. Hebiant ar gwehanadur $\overline{X}$ a c'hell bezañ ken bihan ha ma venner, gant ma ve n bras a-walc'h. Ar perzh-se zo talvoudek c'hoazh pa na anavezer ket hebiant σ^2 ar gwehanadur X. Eleze ez eus atav :

$$\lim_{n\to\infty} V\big(\overline{X}\big) = 0.$$

A se e c'hounezer ar peurliesañ evit mentoù standilhonoù bras n gant $\mu \approx \overline{x}$ prizadoù dereat evit μ.

15.2.2.3 Prizadur un hebiant

Ur gwehanadur bennak X he deus un hebiant dianav $V(X) = \sigma^2$. Evit prizañ an hebiant-se e loc'her diwar hebiant arsellet ar standilhon :

$$s^2_{ars} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right).$$

Emañ an hebiant arsellet-se e dalc'h an dargouezh ha da heul ez eo sevenidigezh ur gwehanadur dargouezhel, despizet evel henn :

$$S^2_{ars} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - \overline{X}\big)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

O vezañ ma'z eo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ arreadoù dizalc'h eus X — dezho an un keitad $E(X_i) = \mu$ hag an un hebiant $V(X_i) = \sigma^2$ — e teu diwar sammadezh an engortoz jedoniel :

$$\begin{aligned} E\big(S^2_{ars}\big) &= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - \overline{X}\big)^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E\big(X_i^2\big) - nE\big(\overline{X}^2\big)\right) \\ &= E\big(X^2\big) - E\big(\overline{X}^2\big). \end{aligned}$$

Hogen evit nep gwehanadur Z ez eus :

$$V(Z) = E\big(Z^2\big) - \big[E(Z)\big]^2, \quad \text{ha neuze} \quad E\big(Z^2\big) = V(Z) + \big[E(Z)\big]^2.$$

Arveromp ar reollun-se evit an daou wehanadur dargouezhel X hag $\overline{X}$, hag e tisoc'her gant :

$$\begin{aligned} E\big(X^2\big) &= V(X) + \big[E(X)\big]^2 = \sigma^2 + \mu^2; \\ E\left(\overline{X}^2\right) &= V\big(\overline{X}\big) + \big[E(X)\big]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2. \end{aligned}$$

Diwar se e teu :

$$E\left(S_{ars}^2\right) = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Gwelchet eo ar prizer S_{ars}^2 enta, pa n'emañ ket e engortoz par evit pep n d'an arventenn a glasker prizañ. Padal :

$$\boxed{S^2 = \frac{n}{n-1} S_{ars}^2},$$

zo ur prizer angwelch eus an hebiant σ^2.

Ar gwehanadur S^2 zo dezhañ an engortoz jedoniel σ^2, dav eo liesaat an hebiant arsellet S_{ars}^2 dre ar periad $\frac{n}{n-1}$ evit e ziwelchiñ. A se ez eo s^2 ar prizad gwellañ eus hebiant σ^2 ar boblañs. Lavarout a reer ez eo s^2 an hebiant prizet. Neuze :

$$\boxed{s^2 = \frac{n}{n-1} \times s_{ars}^2}.$$

Lakaat meiz ez eo : $s^2 > s_{ars}^2$. Alese e teu prizad skoueriekaet ar strewant :

$$\boxed{s = \sqrt{s^2}}.$$

Evit gwir ez eus ur gwelchadur (bihan kenan hag a denn da vann pa $n \to \infty$), rak engortoz an daouvonad ned eo ket ent hollek daouvonad an engortoz. Hogen ne c'haller ket reiñ ur reollun hollek a ve ur prizer angwelch eus ar strewant.

EVEZHIADENN — An niver $n-1$ a reer anezhañ niver derezioù *dizankted* ar prizadur. Bez' ez eo niver ar roadennoù dizank evit gwir. An n arselladenn zo dizank — dizalc'h — evit gwir, pa na c'haller dezren hini ebet anezho eus ar re all. E se, da jediñ ar c'heitad e ranner dre n, a zo niver an derezioù dizankted en degouezh-se. Hogen evit a sell an hebiant ned eo ket mui heñvel, rak ar c'heitad zo ereet ouzh ar forc'hadoù dre an daveadur : sammad aljebrel ar forc'hadoù $= 0$. Mar anavezer $n-1$ forc'had e vo dezreet an n-vet diouzhtu. Neuze ez eus $n-1$ roadenn dizank evit a sell heuliad ar forc'hadoù diouzh ar c'heitad, eleze $n-1$ derez dizankted.

15.2.3 Prizadur dre un entremez

15.2.3.1 Pennaenn

Hag eñ ken resis ha ma c'hell bezañ, ne c'hell ket ur prizad pourchas gwerzh dik an arventenn. Ur werzhad arnesadek a'n arventenn eo a vez prizet ha lazout a ra kaout un araez jedoniel da vuzuliañ perzhded ar prizad. Dre ret e vo an araezse a rizh tebegouriel, dindan rezh ur gavael anvet *entremez fiziañs* pe c'hoazh *entremez diogelroez*.

Desellomp da skouer degouezh klasel kenan prizadur un engortoz jedoniel. Mar fester ur gwezhiader *riskl da faziañ* α — pe, pezh zo kevatal, ur *gwehin fiziañs* pe c'hoazh *gwezhiader diogelroez* $1-\alpha$ — e c'haller evit pep gwerzhad vezus eus an engortoz μ savelañ un entremez neuenniñ $\mathcal{E}_{neu}(\mu)$ a'r c'heitad arsellet $\overline{x}$ gant ar riskl α da faziañ, pe gant ur fiziañs $1-\alpha$. Mard eo $\overline{X}$ ar gwehanadur dargouezhel keitad, prizer an engortoz, e naou an entremez kemparzhek

$$\mathcal{E}_{neu}(\mu) = \big[\mu - d_\alpha, \mu + d_\alpha\big]$$

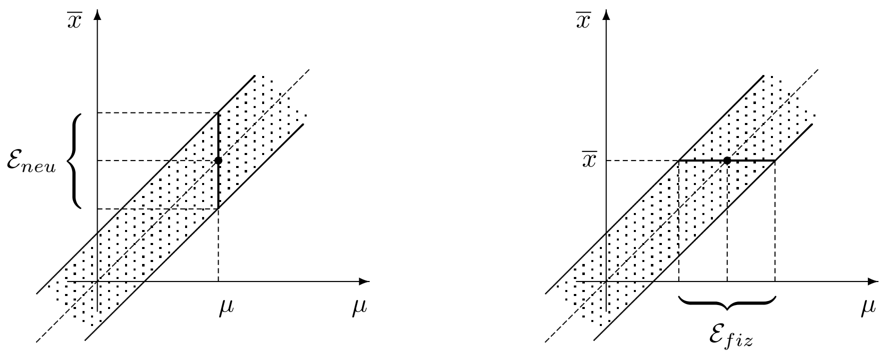
dre :

$$P\left(\overline{X} < \mu - d_\alpha\right) = \frac{\alpha}{2}, \qquad P\left(\overline{X} > \mu - d_\alpha\right) = \frac{\alpha}{2},$$

ha :

$$P\left(\mu + d_\alpha \leqslant \overline{X} \leqslant \mu - d_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

Teskad an holl entremezioù neuenniñ $\mathcal{E}_{neu}(\mu)$ a zezvonn un domani neuenniñ hag a-walc'h eo tuginañ an argerzh da gaout, mar anavezer ur c'heitad arsellet $\overline{x}$, un entremez fiziañs $\mathcal{E}_{fiz}(\overline{x})$, gant an un gwehin fiziañs $1-\alpha$, kreizet war $\overline{x}$. Sellout al lunioù amañ dindan :



Evit dedalvout ar bennaenn e ranker prizañ ar strewant (skin d_α an entremez neuenniñ a zewerzher a-gevreizh d'ar strewant rik σ, a zo dianav evel reizh er pleustr), hag ivez engwerc'hañ amplegadoù gwiriegezh adal ma n'eo ket reol an dasparzh.

15.2.3.2 Entremez fiziañs un debegezh

Bezet p tebegezh un doareenn A en ur boblañs (a zo ivez dregantad A er boblañs) ha f aliested an doareenn A en ur standilhon a vent n (un n-standilhon). f zo ur prizad poentel angwelch eus p. Hogen pe fiziañs a c'haller reiñ d'ar prizad-se? Dibab a reer $\alpha \in]0,1[$ ha savelañ a reer un entremez $]a,b[$, hevelep ma ve α an debegezh (ar riskl) da faziañ pa lavarer emañ p en entremez-se.

Klaskomp an holl werzhadoù eus p, hevelep ma ve f e-barzh entremez neuenniñ p gant ar riskl (an debegezh) α da faziañ, pe pezh zo kevatal gant ur fiziañs $1-\alpha$.

f o vezañ e dalc'h an dargouezh zo sevenidigezh ur gwehanadur dargouezhel F ha da heul nF, niver an unvezioù dezho an doareenn A er standilhon a vent n, zo dezhañ un dasparzh binomel $\mathcal{B}(n,p)$. A se e c'haller dezren un entremez fiziañs evit p, hogen diaes eo ar jediñ. Mard eo bras n ha p pell diouzh 0 hag 1 e c'haller arnesaat $\mathcal{B}(n,p)$ dre an dasparzh reol $\mathcal{N}(np,\sqrt{npq})$ (Sl. ¶ 9.3.2.7 evit an amplegadoù kendivizat dibabet : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ ha $nq \geqslant 5$). Neuze :

$$U = \frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

zo dezhañ un dasparzh reol kreizet direet.

An taolennoù 1 ha 2 dre hantererezh ar gevreizhenn Π pe taolenn 3 ar forc'had direet a gevaraez lenn u_α, hevelep ma'z eo

$$P(-u_\alpha < U < u_\alpha) \simeq \Pi(u_\alpha) - \Pi(-u_\alpha) = 2 \cdot \Pi(u_\alpha) - 1 = 1-\alpha.$$

O vezañ ma'z eo

$$\frac{f(1-f)}{n-1}$$

ur prizad angwelch eus

$$\frac{p(1-p)}{n},$$

e kemerer da entremez fiziañs p gant ar gwezhiader riskl α :

$$\boxed{\left]f - u_\alpha\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}; f + u_\alpha\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\right[}.$$

E gerioù all e c'haller lavarout ez eus $\alpha \times 100$ % a chañsoù da faziañ mar kemerer f evel prizad da p, pe c'hoazh e c'haller kaout fiziañs ez eus $(1-\alpha) \times 100$ % a chañsoù e ve p en entremez-se.

Resister ar sontadur — Mar kresker ar gwezhiader fiziañs $1-\alpha$ gant an hevelep ment standilhon n e kresk ivez an arstalenn u_α. A se e teu an entremez da vezañ brasoc'h, ha da heul e tigresk resister ar prizad. Evit ur riskl roet α ez eo savelet resister an ditour dre an entremez fiziañs. Seul vrasoc'h eo ma'z eo bihanoc'h an entremez. Neuze ez argemm a-c'hinfeur da $\sqrt{f(1-f)/n-1}$, alese un dezrevell gentañ : resister ar sontadur zo a-genfeur da $n-1 \simeq n$, pezh a zewerzh roll a bouez ment ar standilhon. Da skouer : da gaout ur resister 10 gwech brasoc'h e ranker kaout 100 gwech muioc'h a unvezioù er sontadur.

Teurel pled avat ne c'hoari ment ar boblañs roll ebet er reollun, hep delanvad war resister an disoc'h eo enta. Hag a-c'hin d'ar meno boutin n'eo ket ret kaout muioc'h a unvezioù er standilhon evit ur boblañs vrasoc'h. Dav notañ ivez n'eo talvoudek seurt evezhiadenn nemet a-geñver gant an amplegadoù desellet, eleze ez eo bras ment ar boblañs e-keñver ment ar standilhon.

Niver an unvezioù ret — En hevelep amplegadoù hag amañ diaraok, mar menner kaout er sontadur ur resister rakfestet, eleze un entremez fiziañs savelet dre $\pm i$, e ranker kaout evit ur riskl α :

$$i = u_\alpha\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n = \frac{u_\alpha^2 pq}{i^2},$$

u_α o vezañ ar strewant o klotañ ouzh ar riskl α e taolenn ar strewant.

E se e c'haller savelañ niver izek ar gorreadennoù (an arselladennoù) rekis evit ur sontadur mar :

1. fester ar resister i hag ar riskl gouzañvet α,

2. anavezer p. Dianav eo p avat. Hogen e spir kaout ur werzhad arnesadek anezhañ, mar bez ret dre ur sontadur rakwezat war ur standilhon bihan.

SKOUER — Lazout a ra prizañ aliested ur c'hleñved en ur boblañs. Goût a ouzer ez eo dambar da 10 %. Ar resister a venner zo $i = \pm 2$ % evit ar riskl 5 %. Jediñ a reer :

$$n = \frac{4 \times 0,1 \times 0,9}{(0,02)^2} = 900.$$

Hentenn savelañ :

1. Bezet ar riskl α, pe ar gwezhiader fiziañs $1 - \alpha$.

2. Eus an daolenn 3 e tenner u_α war-eeun, pe c'hoazh eus an daolenn 2 pementrannerioù an dasparzh $\mathcal{N}(0;1)$ e saveler u_α dre :

$\Pi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

3. Jediñ a reer an aliested f diwar un n-standilhon.

4. Jediñ a reer :

$d = u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}$.

5. An entremez fiziañs zo neuze :

$[f - d; f + d]$.

15.2.3.3 Entremez fiziañs evit un engortoz dianav

Ar gwehanadur X zo dezhañ un engortoz dianav $\mu = E(X)$. Da neuze ez eo keitad $\overline{x}$ un n-standilhon ur prizad angwelch eus μ. Ouzhpenn se ez eo $\overline{x}$ sevenidigezh ar gwehanadur dargouezhel $\overline{X}$ gant $E(\overline{X}) = \mu$. Evit savelañ an entremez fiziañs eo dav ober an disparti etre daou zegouezh : a) anav eo an hebiant ha b) dianav eo an hebiant. Ouzhpenn se ez eus ezhomm evit mentoù standilhon bihan eus an amplegad e ve reol dasparzh X.

a) Anav eo strewant σ^2 ur gwehanadur reol

Kemeromp ur skouer : ar gwehanadur X a zeskriv pouez pakadoù kafe. Dasparzhet reol eo ar gwehanadur. An engortoz jedoniel $\mu = E(X)$ zo e dalc'h an aveadur pakata, tra ma'z eo an hebiant σ^2 arstalek ha dizalc'h. Bezet da skouer $\sigma^2 = 36\,\mathrm{g}$. Neuze ez eo anav an hebiant ha dianav an engortoz μ. Evit prizañ an engortoz e tibaber 50 pakad dre zargouezh. Ar pouez keitat zo $\overline{x} = 501,37\,\mathrm{g}$. Diwar-bouez ar prizad-se e c'haller savelañ un entremez fiziañs a'r rezh : $[\overline{x}-d, \overline{x}+d]$ gant ar gwezhiader fiziañs $1-\alpha$. Eleze an hentenn arveret da brizañ μ a ro $\overline{x} - d \leqslant \mu \leqslant \overline{x} + d$ evit $(1-\alpha) \times 100\,\%$ eus an degouezhioù. Evit dewerzhañ d e reer evel diskouezet amañ dindan.

Bezet X ur gwehanadur reol gant an engortoz μ dianav hag an hebiant σ^2 anav. Keitad un n-standilhon zo sevenidigezh ur gwehanadur dargouezhel

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

ma'z eo an X_i-où arreadoù dizalc'h ar gwehanadur reol X, dezho enta an engortoz μ hag an hebiant σ^2. Alese ez eus evit $\overline{X}$:

$$E\big(\overline{X}\big) = \mu \qquad ; \qquad V\big(\overline{X}\big) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ar gwehanadur kreizet direet (reolataet) :

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$$

zo dasparzhet reol enta. Evit ur gwezhiader fiziañs $1-\alpha$ roet e saveler an arstalenn u_α gant :

$$P\left(-u_\alpha \leqslant \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \leqslant u_\alpha\right) = \Pi(u_\alpha) - \Pi(-u_\alpha) = 2 \cdot \Pi(u_\alpha) - 1 = 1 - \alpha.$$

A se e teu :

$$\Pi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

a gevaraez tennañ u_α eus taolenn 2 pementrannerioù an dasparzh $\mathcal{N}(0;1)$. E c'haller kaout ivez u_α war-eeun eus an daolenn 3.

O treuzfurmiñ e teu :

$$P\left(-u_\alpha \leqslant \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \leqslant u_\alpha\right) =$$
$$P\left(\overline{X} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Alese an entremez fiziañs evit an engortoz μ :

$$\left[\overline{x} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{x} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Hentenn savelañ :

1. Bezet ar riskl α, pe ar gwezhiader fiziañs $1 - \alpha$.

2. Eus an daolenn 3 e tenner u_α war-eeun, pe c'hoazh eus taolenn 2 pementrannerioù an dasparzh $\mathcal{N}(0;1)$ e saveler u_α dre :

$\Pi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

3. Jediñ a reer an engortoz jedoniel $\overline{x}$ diwar un n-standilhon.

4. Jediñ a reer :

$d = u_\alpha\sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

5. An entremez fiziañs zo neuze :

$[\overline{x} - d; \overline{x} + d]$.

SKOUER

• Er skouer amañ diaraok ez eus $n = 50$, $\overline{x} = 501,37$, $\sigma = 6$. Evit ar gwezhiader fiziañs $1 - \alpha = 0,95$ e jeder ar pementranner u_α eus $\Pi(u_\alpha) = 0,975$ (taolenn 3), eleze $u_\alpha = 1,96$. Pe eus $\alpha = 0,05$ e tenner war-eeun u_α eus an daolenn 3. A se e teu :

$$d = 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{50}} \simeq 1,6631.$$

Alese an entremez fiziañs evit an engortoz μ gant ar gwezhiader fiziañ 0,95, pe ar gwezhiader riskl 0,05 : $[\overline{x} - d; \overline{x} + d] = [499,71; 503,03]$.

• Bezet bremañ $\alpha = 0,01$. Pe vent izek n zo da gaout evit ur standilhon mar menner un entremez fiziañs a dreuzkiz 1 ?

Treuzkiz an entremez fiziañs zo :

$$a = 2u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Eus $\Pi(u_\alpha) = 0,995$ e tenner $u_\alpha = 2,576$ ha gant : $a = 2 \times 2,576 \times \frac{6}{\sqrt{n}} \leqslant 1$
e teu $n \geqslant (2 \times 2,576 \times 6)^2 \Longrightarrow n \geqslant 956$ (rontaet).

a) Dianav eo strewant σ^2 ur gwehanadur reol
Dianav eo hebiant σ^2 ar gwehanadur dargouezhel reol X. Neuze e vo kemeret en e lec'h hebiant diwelchet ar standilhon s^2 a zo ur prizad anezhañ. Hogen s^2 zo ur sevenidigezh a'r gwehanadur dargouezhel

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{n-1}{n} S^2_{ars}.$$

Mar erlec'hier er gwehanadur $\mathcal{N}(0;1)$ eus ar rannbennad kent S ouzh σ e saveler ar gwehanadur dargouezhel :

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - \mu}{S}.$$

Daoust ma'z eo X dasparzhet reol n'eo ket mui T ur gwehanadur reol kreizet direet. Evit pep n ez eus evit T ur gevreizhenn dassammañ all. Dasparzh ar gwehanadur T zo un t-dasparzh (anvet ivez gwehanadur Student) gant $n-1$ derez dizankted. Un dasparzh Student zo hini ur gwehanadur kendalc'hek a zo e debekter ur gevreizhenn e dalc'h un arventenn anvet *niver an dereziou̇ dizankted.* Ar gwezhiader riskl α pe ar gwezhiader fiziañs $1-\alpha$ o vezañ dibabet ha niver an dereziou̇ dizankted o vezañ anavezet e kevaraez an daolenn 4 da gaout t_α, hevelep ma'z eo :

$$P(-t_\alpha < T < t_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Alese e tezreer entremez fiziañs keitad μ ar boblañs :

$$\left[\overline{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right[\, .$$

EVEZHIADENN — Ar c'hrommennoù o terc'hennañ tebekterioù ar gwehanadurioù dargouezhel T e dalc'h n o deus ur stumm heñvel ouzh hini an dasparzh $\mathcal{N}(0;1)$ (e stumm ur c'hloc'h), hogen diforc'hioù heverk zo evit n bihan. N'eo nemet evit $n \geqslant 30$ (ent kendivizat : standilhonoù bras) e tosta an t-dasparzh d'an dasparzh reol $\mathcal{N}(0;1)$. Pa denn niver an dereziou̇ dizankted war-du an anvevenn e tenn kevreizhenn dassammañ gwehanadur Student war-du hini an dasparzh reol kreizet direet. Da neuze, evit α roet e tenn t_α war-du u_α. Pezh a zispleg al linenn e traoñ an daolenn 4 (Dasparzh Student) a ro u_α.

Hentenn savelañ :

1. Bezet ar riskl α, pe ar gwezhiader fiziañs $1-\alpha$.

2. Eus taolenn 4 dasparzh Student gant $n-1$ derez dizankted e saveler t_α war-eeun.

3. Jediñ a reer an engortoz jedoniel $\overline{x}$ hag an hebiant prizet s^2 diwar un n-standilhon.

4. Jediñ a reer :

$d = t_\alpha \sqrt{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.

5. Entremez fiziañs μ zo neuze :

$[\overline{x}-d; \overline{x}+d]$.

Treuzkiz an entremez

$$a = 2t_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

zo e dalc'h an hebiant prizet s ha gant se e dalc'h an dargouezh. Setu perak ne c'haller ket reiñ an treuzkiz uc'hek hep ditouroù a-zivout s da gentañ.

SKOUER — Ur standilhon a vent $n = 25$ tennet eus ur boblañs savelet warni ur gwehanadur reol zo dezhañ ar c'heitad $\overline{x} = 104,9$ hag un hebiant $s^2 = 40,85$. Evit ur gwezhiader fiziañs $1-\alpha = 0,95$ e ranker savelañ un entremez fiziañs evit ar c'heitad dianav μ.

En daolenn 4 e lenner evit 24 derez dizankted hag ar riskl $\alpha = 0,05$ ur werzhad $t_\alpha = 2,064$. A se e teu enta :

$$d = 2,064 \times \frac{\sqrt{40,85}}{5} = 2,63.$$

Alese an entremez fiziañs : $[102,27; 107,53]$.

Lakaomp e ve $\sigma^2 = 40,85$ hebiant anavezet ar gwehanadur X, e ve neuze $u_\alpha = 1,96$ ha da heul e ve jedet :

$$d = 1,96 \times \frac{\sqrt{40,85}}{5} \approx 2,51.$$

Neuze e teufe an entremez fiziañs da vezañ : $[102,39; 107,41]$. Berroc'h eo eget an hini a-raok, pezh a c'haller meizañ, rak e prizadur an engortoz dianav ez eus ur barenn andiended ouzhpenn.

c) Entremez fiziañs evit engortoz jedoniel ur gwehanadur dargouezhel diforzh gant mentoù standilhon n bras

En degouezh ma n'eo ket anavezet kevreizhenn dassammañ ur gwehanadur dargouezhel X ne c'haller ket kaout kevreizhenn dassammañ X ivez. Neoazh, dre berzh delakadenn an harz kreizet ez eo $\overline{X}$ dasparzhet ent reol mui pe vui mard eo bras ment n ar standilhon.

Reolenn arnesaat :

Peurliesañ e c'haller arnesaat mat kenan dasparzh $\overline{X}$ dre un dasparzh reol evit mentoù standilhon $n \geqslant 30$.

Neuze, an hentennoù hon eus gwelet amañ diaraok a gevaraez kaout entremezioù fiziañs arnesadek evit engortoz jedoniel μ ur gwehanadur dargouezhel diforzh. Dav eo teurel pled avat ez eo dasparzh Student gant niveroù derezioù dizankted bras arnesaet gant an dasparzh $\mathcal{N}(0;1)$.

SKOUER — War-benn savelañ un entremez fiziañs evit ur c'heitad dianav μ e c'horreer ent dizalc'h ur standilhon a vent $n = 400$, dezhañ ar c'heitad arsellet $\overline{x} = 170,50$ hag an hebiant arsellet $s^2_{ars} = 95,4$. Gant ur gwezhiader fiziañs 0,99 (eleze ur gwezhiader riskl $\alpha = 0,01$) ez arnesaer un entremez fiziañs evit μ :

$$\left[170,50 - 2,576 \times \frac{\sqrt{95,4}}{\sqrt{400}}; 170,50 + 2,576 \times \frac{\sqrt{95,4}}{\sqrt{400}}\right] \approx [169,24; 171,76].$$

15.2.3.4 Entremez fiziañs evit un hebiant, e degouezh ur boblañs savelet warni un dasparzh gaosat

• **Delakadenn :**
Mar bez da X un dasparzh reol ez eus d'ar gwehanadur

$$Y^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2$$

dasparzh ar χ^2 (distagañ *ki daou*) gant $n-1=\nu$ derez dizankted.

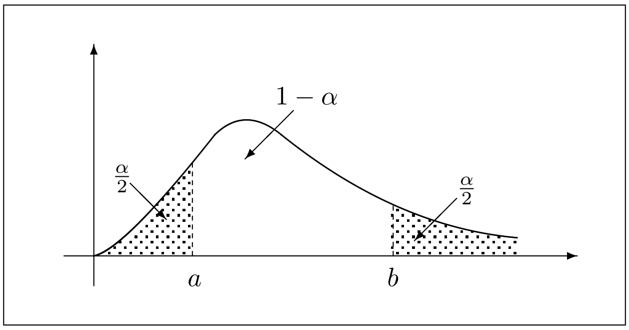
Un dasparzh χ^2 zo un dasparzh kendalc'hek a zo mannel e debekter evit $x<0$ hag e dalc'h un arventenn anvet niver an derezioù dizankted (pe *dizankant*).

• **Dedalvezadur mard eo $n \leqslant 31$:**
Ar gwezhiader riskl α o vezañ dibabet ha niver an derezioù dizankted o vezañ anavezet e c'haller a ha b kaout bennozh d'an daolenn 5, hevelep ma'z eo :

$$P(a < Y^2 < b) = 1-\alpha \quad \text{gant} \quad P(Y^2 \geqslant b) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{hag} \quad P(Y^2 \geqslant a) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Ar werzhad anavezet nemeti eus S^2 o vezañ s^2 e c'hounezer evel entremez fiziañs σ^2 gant ar gwezhiader riskl α :

$$\left]\frac{(n-1)s^2}{b}\ ;\ \frac{(n-1)s^2}{a}\right[.$$



• **Dedalvezadur mard eo $n > 31$:**
Gwir eo an delakadenn evit n diforzh. Hogen taolennoù ar χ^2 ned eont ar peurliesañ nemet betek an dizankant $\nu = 30$. Ne c'haller ket o dedalvout evit $n > 31$.

Delakadenn :
Mard eo Y^2 ur gwehanadur dargouezhel dezhañ un dasparzh χ^2 gant ν derez dizankted ha mard eo $\nu > 30$, neuze ar gwehanadur dargouezhel

$$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

zo dezhañ mui pe vui dasparzh direet Gauss.

Dedalvezadur :
Amañ en hon eus :

$$U = \sqrt{\frac{2(n-1)}{\sigma^2} S^2} - \sqrt{2n-3}.$$

Goude bezañ dibabet α e saveler u_α, hevelep ma ve $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1 - \alpha$ ha dezren a reer alese entremez fiziañs σ^2 :

$$\left] \frac{2(n-1)s^2}{\left(\sqrt{2n-3} + u_\alpha\right)^2} \; ; \; \frac{2(n-1)s^2}{\left(\sqrt{2n-3} - u_\alpha\right)^2} \right[.$$

POELLADENNOÙ

15.01 Un uniad bevezerion en deus kaset da benn un enklask war brizioù ur c'henderc'had er gourstalioù. Amañ da heul ar prizioù gorreet e 7 gourstal :

$$52 \,€ \,;\, 52 \,€ \,;\, 41 \,€ \,;\, 51 \,€ \,;\, 69 \,€ \,;\, 55 \,€ \,;\, 49 \,€ \ .$$

a) O c'houlakaat en deus priz ar c'henderc'had-se un dasparzh reol X, jediñ ur prizad $\overline{x}$ eus an engortoz jedoniel $E(X)$ hag ur prizad eus ar strewant $\sigma(X)$.

b) Reiñ entremezioù fiziañs (kemparzhek) an engortoz jedoniel $E(X)$ gant ar gwezhiaderioù fiziañs 0,90 ha 0,99.

15.02 Un c'hevredad kenderc'hañ hadoù a venn gwiriañ barr kellidañ ur spesad, eleze an debegezh p evit ma kellidfe un hadenn kemeret dre zargouezh er c'henderc'h.

Diwar ur standilhon 400 hadenn e stader e kellid 330 greunenn. Savelañ entremez fiziañs p gant ar riskl 5 % ? Gant ar riskl 1 % ?

15.03 Gorreet eo bet ar gwerzhadoù da heul eus bec'h ar glukoz e gwad 9 hinienn goulakaet war yun (muzuliet e gramm dre litr gwadveiz) :

Glukozvec'h	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05
Niver an hiniennoù arsellet	1	2	3	2	1

Evit un hinienn vonan e heñvelekaer ar glukozvec'h ouzh ur gwehanadur dargouezhel reol X.

a) Reiñ prizad $\overline{x}$ engortoz jedoniel X ha hini s^2 hebiant X. Resizañ ar prizerioù dibabet.

b) Reiñ entremez fiziañs engortoz jedoniel X, kreizet e $\overline{x}$, gant ar gwezhiader riskl $\alpha = 0,02$.

15.04 Gwiriañ a reer pezhioù kenderc'het a zo siek ar c'henfeur p anezho.

a) Gwiriañ a reer ul lod 200 pezh ha kavout a reer $n = 24$ fezh siek. Savelañ an entremezioù fiziañs evit prizad p gant ar riskl $\alpha = 0,05$ hag $\alpha = 0,01$.

b) Pet pezh a ve ret gwiriañ evit kaout, gant ar riskl $\alpha = 0,05$, un entremez fiziañ a dreuzkiz 4 % ?

15.05 Dielfennadur 6 tamm maen a ro an disoc'hoù-mañ da heul a-zivout bec'h div zanvezenn A ha B :

Maen \ Bec'h (e %)	**A**	**B**
1	14,0	15,0
2	11,2	17,5
3	13,1	13,5
4	9,6	19,5
5	6,5	21,5
6	11,6	18,0

Bezet X bec'h A ha Y bec'h B.

Jediñ prizadoù $\overline{x}$ engortoz jedoniel X ha hini s_X strewant X, heñvel dra evit Y.

15.06 O tarbenn ur gwezhiader riskl $\alpha = 0,05$ e karfed anaout war-bouez $\pm 1\,\%$ dregantad an hiniennoù anhangaeet war-lerc'h ur vaksinadur bennak.

Pet hinienn d'an nebeutañ a ranker arselliñ ? Goût a ouzer a-gent ez eo gavaelet dregantad ar c'hwitadennoù etre 10 ha 15 dre gant.

15.07 Ar roadennoù da heul zo bet gorreet diwar standilhonoù hiniennoù ur ranndir europat. An doareenn studiet zo tolz an empenn dewerzhet e grammoù evit hiniennoù etre 20 ha 49 vloaz.

Paotred

Kreiz ar rummadoù	1170	1220	1270	1320	1370	1420	1470	Hollad
Reveziadoù	5	36	45	50	61	49	19	265

Merc'hed

Kreiz ar rummadoù	1070	1120	1170	1220	1270	1320	1370	Hollad
Reveziadoù	12	22	45	54	52	20	10	215

Savelañ un entremez fiziañs gant ar riskl 1 % :

a) evit keitad poblañs ar baotred ;

b) evit keitad poblañs ar merc'hed.

15.08 Ur studienn a-zivout bevezadur ar butun kaset da benn war ur standilhon 100 butuner a zisoc'h gant ar roadennoù-mañ :

Bevezadur pemdeziek (niver ar pakadoù)	0,5	1	1,5	2	3
Reveziadoù	26	47	10	12	5

a) Bezet X ar gwehanadur dargouezhel niver pemdeziek ar pakadoù dre butuner. Jediñ ur prizad eus bevezadur keitad $\overline{x}$ ar standilhon ha savelañ un entremez gant ar gwezhiader fiziañs 0,95 evit engortoz jedoniel X.

b) Goulakaat a reer ez argemm nebeut hebiant prizet X hervez ar standilhonoù. Savelañ ment ar standilhon evit ma ve skin an entremez fiziañs par da 0,1 gant an un gwezhiader fiziañs (0,95).

15.09 Ur sontadur a sevener war ur standilhon 400 dilenner ha dastum a reer 212 mennad mouezhiañ a-du gant un emstriver E.

a) Savelañ un entremez fiziañs gant ar gwezhiader riskl $\alpha = 0,05$ evit ar mennadoù mouezhiañ a-du gant E er boblañs a-bezh.

b) Pe vent izek evit ar standilhon a ve ret kemer evit ma ve ar werzhad 0,50 er-maez eus an entremez fiziañs gant an un gwezhiader riskl α ?

15.10 Da-geñver eil tro un dilennadeg arlevierezhel e chom daou emstriver tal ouzh tal. Pet dilenner a vo ret atersiñ da gaout ur prizad war-bouez 1 % eus ar mennadoù mouezhiañ.

15.11 Pouez ar rezin war 10 kef dibabet dre zargouezh en ur winienn zo e kg :

$$2,4 \ ; \ 3,2 \ ; \ 3,6 \ ; \ 4,1 \ ; \ 4,3 \ ; \ 4,7 \ ; \ 5,4 \ ; \ 5,9 \ ; \ 6,5 \ ; \ 6,9.$$

a) Savelañ prizadoù poentel angwelch keitad ha hebiant ar winienn, eleze ar boblañs a-bezh.

b) Savelañ un entremez fiziañs evit keitad ar boblañs gant ar riskl 0,05, o c'houlakaat en deus pouez ar rezin dre gef un dasparzh reol war ar winienn.

15.12 Adkemer roadennoù ar boelladenn 15.11. Savelañ un entremez fiziañs evit an hebiant ha goude evit ar strewant gant ar riskl 0,05, bepred gant goulakadenn ur boblañs c'haosat.

15.13 Derc'hent deiz un dilennadeg gant daou emstriver ez aterser 100 dilenner oc'h amparañ ur standilhon derc'houezus. 58 anezho a ziskler bezañ mennet da vouezhiañ evit an emstriver Y.

a) Savelañ, gant un debegezh 0,95, e petore gavael emañ kenfeur an dilennerion a-du gant Y da-geñver ar sontadur. Ha gallout a reer dezren, gant an un tebegezh 0,95, e ve dilennet Y ma ne gemm ket ar mennadoù ?

b) Gant an un aliested arsellet a zilennerion a-du gant Y, pe vent izek e rankfe ar standilhon bezañ evit gallout diogeliñ, gant ur riskl 0,05, e ve dilennet Y ?

15.14 Bezet ur standilhon 300 bugel 10 vloaz a zo dasparzh ar pouez anezho roet en daolenn amañ da heul e kg :

Pouez	]18,75; 21,25]	]21,25: 23,75]	]23,75: 26,25]
Reveziadoù	4	12	47
Pouez	]26,25; 28,75]	]28,75: 31,25]	]31,25; 33,75]
Reveziadoù	72	77	47
Pouez	]33,75; 36,25]	]36,25; 38,75]	]38,75; 41,25]
Reveziadoù	24	12	5

a) Savelañ ur prizad poentel angwelch evit keitad ha hebiant ar boblañs.

b) Savelañ, gant ar gwezhiader fiziañs 0,95, un entremez fiziañs evit keitad ar boblañs.

c) O c'houlakaat ez eo ar pouez dasparzhet reol evit a sell ar boblañs, savelañ un entremez fiziañs evit an hebiant er riskl 0,01. Heñvel dra evit strewant ar boblañs.