14

Stadekadurioù divvent
Argizañ ha keflended

14.1 DASPARZHIOÙ MARZEL HAG A-ZIANOUEZ, DAVEADURIOÙ ETRE O NAOUUSTERIOÙ

14.1.1 Despizadur

Desellomp ur boblañs Ω a reveziad hollel N ha savelomp warni div zoareenn X ha Y. *Stadekadur divvent* (X,Y) a reer eus an arloadur a gevred pep elfenn ω eus Ω ouzh an daouac'h (x_i, y_j), ma'z eo x_i hag y_j a-getep ar gwerzhadoù $X(\omega)$ ha $Y(\omega)$, gant $i \in \{1,\ldots,r\}$ ha $j \in \ldots \{1,\ldots,s\}$.

Savelañ a reer neuze $r \times s$ rumm a unvezioù stadegel eus Ω, gant pep a reveziad darnel n_{ij}, hevelep ma ve sammad an n_{ij}-où par d'ar reveziad hollel N.

Hollad an triac'hoù (x_i, y_j, n_{ij}), gant $i \in \{1,\ldots,r\}$ ha $j \in \{1,\ldots,s\}$, a reer anezhañ *heuliad stadegel divvent.*

EVEZHIADENN — Ar stadekadurioù X ha Y a c'hell bezañ doareadel o daou, kementadel o daou, pe unan anezho kementadel ha doareadel egile.

14.1.2 Aliested

Keñver ar reveziad darnel ouzh ar reveziad hollel zo aliested (daveel) an daouac'h (x_i, y_j) :

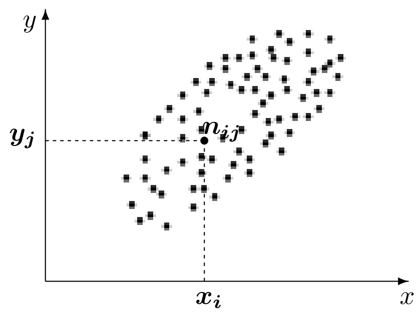
$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}.$$

Dav eo notañ kement-mañ :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = \sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{s} n_{ij}\right] = \sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{i=1}^{r} n_{ij}\right] = N.$$

14.1.3 Derc'hennadur kevregat

En un dealf kartezel e terc'hennomp ar poentoù (x_i, y_j), an disoc'h o vezañ un hollad poentoù anvet *gronn stadegel*.



Ma n'eo ket ar reveziadoù kevredet ouzh an daouac'hoù (x_i, y_j) par da 1 e lakaer ar reveziad n_{ij} e-kichen ar poent M_{ij}.

Diwar stumm ar gronn e c'haller empentiñ un ere etre div gedrann ar stadekadur. Amañ e stader da skouer e kresk y a-geflen da x. Kement-se ne dalvez ket ez eus ul liamm devouder-devouded etre an div zoareenn ! Ur c'heflen kreñv etre X ha Y a c'hell bezañ displeget dre wered ur c'henarbenn, hep ma ve an disterañ keñver a arbennelezh etre an div zoareenn.

14.1.4 Dasparzhioù marzel

Desellomp ur boblañs N hinienn stadekaet hervez div zoareenn gementadel X hag Y, eleze hervez ur stadekadur divvent.

Mard eo arskarek an div gedrann e c'haller sevel un daolenn stadegel oc'h erouezañ reveziad an hiniennoù dezho ar werzhad x_i eus X hag y_j eus Y, gant $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ ha $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

$X \backslash Y$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_s	Holladoù
x_1	n_{11}	$\ldots$	n_{1j}	$\ldots$	n_{1s}	$n_{1\bullet}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	n_{i1}	$\ldots$	n_{ij}	$\ldots$	n_{is}	$n_{i\bullet}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_r	n_{r1}	$\ldots$	n_{rj}	$\ldots$	n_{rs}	$n_{r\bullet}$
Holladoù	$n_{\bullet 1}$	$\ldots$	$n_{\bullet j}$	$\ldots$	$n_{\bullet s}$	N

Mard eo kendalc'hek X (ha/pe Y) e verk x_i (ha/pe y_j) kreiz ar rumm i (pe j), ha diren en doare-se an degouezh kendalc'hek d'an degouezh arskarek.

14.1.4.1 Reveziadoù marzel

Sammad reveziadoù darnel ar rez x_i zo par da reveziad an hiniennoù kevredet ouzh ar werzhad x_i a'r stadekadur X. E arouezian a reer dre $n_{i\bullet}$:

$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}, \quad \text{heñvel dra}: \quad n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}.$$

Anat eo :

$$N = \sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}.$$

14.1.4.2 Aliestedoù marzel

Aliested marzel $f_{i\bullet}$ ar werzhad x_i a reer eus ar c'heñver :

$$f_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{N}.$$

Heñvel dra :

$$f_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{N}.$$

Anat eo :

$$1 = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}.$$

14.1.5 Aliestedoù a-zianouez

An holl reveziadoù marzel a vo goulakaet anvannel.

14.1.5.1 Aliested a-zianouez x_i o c'houzout y_j

- **Despizadur** — Anat eo ez eo ar c'heñver :

$$0 \leqslant \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} \leqslant 1.$$

Aliested a-zianouez ar werzhad x_i o c'houzout y_j a reer eus an niver :

$$\boxed{f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}}}.$$

Evel reizh ez eo :

$$\sum_{i=1}^{r} f_{i/j} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} = \frac{1}{n_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{r} n_{ij} = \frac{1}{n_{\bullet j}} \times n_{\bullet j} = 1.$$

- **Rezhienn all $f_{i/j}$** — Dre rannañ niverer hag anver ar rannad dre N e teu :

$$f_{i/j} = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}}, \quad \text{hag alese :} \quad \boxed{f_{ij} = f_{\bullet j} \times f_{i/j}}.$$

14.1.5.2 Aliested a-zianouez y_j o c'houzout x_i

- **Despizadur** — Aliested a-zianouez ar werzhad y_j o c'houzout x_i eus an niver :

$$\boxed{f_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}}.$$

- **Rezhienn all $f_{j/i}$** — Dre rannañ niverer hag anver ar rannad dre N e teu :

$$f_{j/i} = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}}, \quad \text{hag alese :} \quad \boxed{f_{ij} = f_{i\bullet} \times f_{j/i}}.$$

14.1.5.3 dizalc'h

Mard eo :

$$\frac{n_{1i}}{n_{\bullet 1}} = \frac{n_{i2}}{n_{\bullet 2}} = \ldots = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} = \ldots = \frac{n_{is}}{n_{\bullet s}},$$

e teu :

$$\frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} = \frac{n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{ij} + \cdots + n_{is}}{n_{\bullet 1} + n_{\bullet 2} + \cdots + n_{\bullet j} + \cdots + n_{\bullet s}} = \frac{n_{i\bullet}}{N},$$

eleze :

$$f_{i/j} = f_{i\bullet}.$$

En degouezh-se n'emañ ket $f_{i/j}$ e dalc'h j. O vezañ ma'z eo :

$$f_{i/j} = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}}, \quad \text{ez eus :} \quad f_{i/j} = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} = f_{i\bullet},$$

parder a c'haller skrivañ c'hoazh :

$$\boxed{f_{ij} = f_{i\bullet} \times f_{\bullet j}}.$$

Despizadur — An doareennoù X ha Y a lavarer dizalc'h, mmard eo : $f_{ij} = f_{i\bullet} \times f_{\bullet j}$ evit nep daouac'h (i, j).

14.1.6 Keitadoù, hebiantoù, kehebiant

14.1.6.1 Keitadoù marzel

Desellomp ar bann e marz dehou an daolenn : erouezañ a ra reveziadoù $n_{i\bullet}$ an unvezioù dezho ar werzhad x_i eus X. Eleze e savel ar bann-se ar stadekadur marzel X. Keitad ar stadekadur-se a zewerzher dre :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet} x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet} x_i.$$

Heñvel dra, mar deseller ar rez e marz traoñ an daolenn e saveler keitad ar stadekadur marzel Y :

$$\overline{y} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} f_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j} y_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j} y_i.$$

14.1.6.2 Keitadoù a-zianouez

Desellomp bremañ j-vet bann an daolenn stadegel : erouezañ a ra an $n_{\bullet j}$ hinienn dezho ar werzhad y_i hervez Y. Da heul e savel ar stadekadur a-zianouez $X/_{Y=y_i}$, unvent evel ar stadekadur marzel X. O vezañ m'emeur er bann j e vo merket naouusterioù an dasparzh-se dre ar meneg bann j :

$$\overline{x}_j = \frac{1}{n_{\bullet j}} \sum_{i=1}^{r} n_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{r} f_{i/j} x_i.$$

Heñvel dra evit a sell ar stadekadur a-zianouez $Y/_{X=x_i}$ savelet en i-vet rez :

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n_{i\bullet}} \sum_{j=1}^{s} n_{ij} y_i = \sum_{j=1}^{s} f_{j/i} y_j.$$

14.1.6.3 Hebiantoù marzel

Savelañ a reer hebiantoù marzel X ha Y :

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(x_i - \overline{x})^2,$$
$$V(Y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j}(y_j - \overline{y})^2 = \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j}(y_j - \overline{y})^2.$$

Menegomp ivez reollunioù König :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet} x_i^2 - \overline{x}^2 \quad \text{hag ivez} \quad V(Y) = \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j} y_j^2 - \overline{y}^2.$$

14.1.6.4 kehebiant

Despizadur — Keitad $(X - \overline{x})(Y - \overline{y})$ a reer anezhañ *kehebiant* ar stadekadur divvent (an daouac'h) (X, Y) :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} n_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}).$$

Reollun König — Dienaat a reer :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{ij} x_i y_j - \overline{x}\,\overline{y}.$$

14.1.6.5 Kemm stadekadur

Bezet ar c'hemm stadekadur savelet dre :

$$x_i = x_0 + hx'_i \quad \text{hag} \quad y_j = y_0 + ky'_j \quad h \text{ ha } k \text{ gwerc'helion muiel.}$$

Bez' ez eus :

$$\begin{aligned} \overline{x} = x_0 + h\overline{x'} &\quad \text{hag} \quad \overline{y} = y_0 + h\overline{y'} \\ V(X) = h^2 V(X') &\quad \text{hag} \quad V(Y) = k^2 V(Y'). \end{aligned}$$

Ar c'hehebiant a zeu da vezañ :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{ij} (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{ij} h(x'_i - \overline{x'}) k(y'_j - \overline{y'}) \\ &= hk \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{ij} (x'_i - \overline{x'})(y'_j - \overline{y'}) \end{aligned}$$

E se :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = hk\,\mathrm{Cov}(X', Y')}\,.$$

14.1.6.6 Daveadurioù etre an naouusterioù marzel hag a-zianouez

Ar boblañs a c'hell bezañ desellet evel ur meskad hervez daou zoare :

1. Dasparzh marzel X a zisoc'h diouzh meskad an dasparzhioù a-zianouez $X/_{Y=y_j}$ hervez o c'henfeurioù ketep $f_{\bullet j}$.
2. Dasparzh marzel Y a zisoc'h diouzh meskad an dasparzhioù a-zianouez $Y/_{X=x_i}$ hervez o c'henfeurioù ketep $f_{i\bullet}$.

Da heul e c'haller dedalvout an disoc'hoù savelet a-zivout ar meskadoù dasparzhioù :

Keitad marzel ha keitadoù a-zianouez — Keitad ur meskad zo par da geitad ar c'heitadoù, daspouezet dre genfeurioù ar meskad ha da heul :

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j}\overline{x}_j \quad ; \quad \overline{y} = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}\overline{y}_i$$

E se ez eo keitad marzel ur gedrann par da geitad ar c'heitadoù a-zianouez e-keñver an eil kedrann, daspouezet dre o aliestedoù marzel ketep.

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_s	Hollad
Keitadoù a-zianouez	$\overline{x}_1$	$\dots$	$\overline{x}_j$	$\dots$	$\overline{x}_s$	
Aliestedoù marzel	$f_{\bullet 1}$	$\dots$	$f_{\bullet j}$	$\dots$	$f_{\bullet s}$	1
Liesâd	$f_{\bullet 1}\overline{x}_1$	$\dots$	$f_{\bullet j}\overline{x}_j$	$\dots$	$f_{\bullet s}\overline{x}_s$	$\overline{x}$

Da heul ez eo bepred gavaelet ar c'heitad marzel etre ar c'heitadoù a-zianouez eizhañ :

$$\min_j(\overline{x}_j) \leqslant \overline{x} \leqslant \max_j(\overline{x}_j) \quad ; \quad \min_i(\overline{y}_i) \leqslant \overline{y} \leqslant \max_i(\overline{y}_i).$$

Hebiant marzel ha hebiantoù a-zianouez — Hebiant ur meskad zo par da geitad daspouezet an hebiantoù a-zianouez mui hebiant daspouezet ar c'heitadoù a-zianouez. Da heul :

$$V(X) = \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j}V_j(X) + \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j}(\overline{x}_j - \overline{x})^2,$$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}V_i(Y) + \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(\overline{y}_i - \overline{y})^2$$

Dizungenezhded an dasparzh marzel a zisoc'h war un dro eus :

1. Dizungenezhded piaouel da bep hini eus an dasparzhioù a-zianouez.
2. Dizungenezhded ar c'heitadoù a-zianouez kenetrezo.

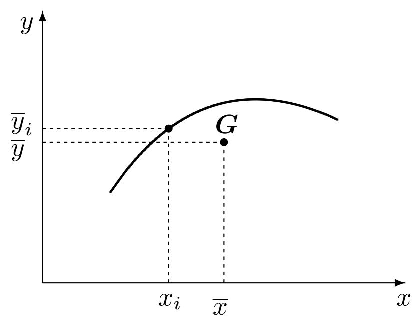
Neuze, par eo bepred — d'an nebeutañ — an hebiant marzel d'ar bihanañ hebiant a-zianouez.

14.2 NAOUUSTERIOÙ BLOC'HEL UR STADEKADUR DIVVENT (X, Y)

14.2.1 Krommennoù argizañ

14.2.1.1 Despizadur

Krommenn argizañ Y e-keñver x a reer eus krommenn derc'hennañ ar c'heitadoù a-zianouez $\overline{y}_i$ a-gevreizh da werzhadoù x_i ar stadekadur X.



Ur grommenn wirion eo mard eo kendalc'hek X (neuze ez ampar an x_i-où un teskad kendalc'hek a werzhadoù bezus) pe neuze ul lerc'hiad poentoù mard eo arskarek X (goubar eo ar gwerzhadoù x_i). Neoazh anv a vo a *grommenn* argizañ en daou zegouezh.

Diskouezomp ez eo trommgreiz ar poentoù lec'hiet war grommenn argizañ Y e-keñver x — daspouezet dre o aliestedoù marzel ketep $f_{i.}$ — trommgreiz G ar poentoù (x_i, y_j) daspouezet gant o aliestedoù hollel f_{ij}.

Daveennoù trommgreiz G ar poentoù (x_i, y_j) zo keitadoù an daveennoù a zo keitadoù :

$$x_G = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}x_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{i.}f_{j/i}x_i, = \sum_{i=1}^{r}\left[f_{i.}x_i\sum_{j=1}^{s} f_{j/i}\right] = \sum_{i=1}^{r} f_{i.}x_i = \overline{x}.$$

Heñvel dra, dre gevamsaviñ x ha y diouzh un tu hag i ha j diouzh un tu all e teu :

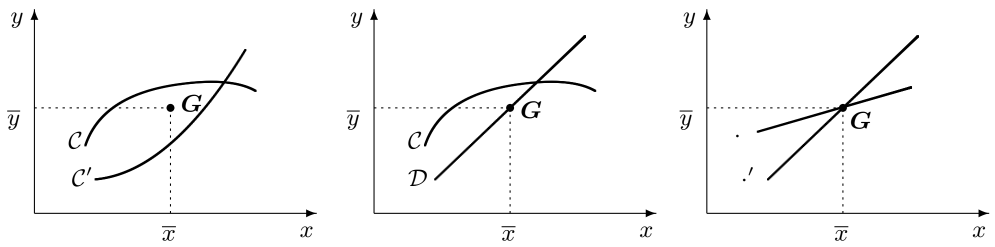
$$y_G = \overline{y}.$$

Hogen dienaet hon eus amañ diaraok ez eo $\overline{y}$ keitad ar c'heitadoù a-zianouez $\overline{y}_i$ daspouezet dre o aliestedoù marzel $f_{i\bullet}$:

$$y_G = \overline{y} = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}\overline{y}_i \quad ; \quad x_G = \overline{x} = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}x_i.$$

E se, trommgreiz ar poentoù $(x_i, \overline{y}_i)$ daspouezet dre an aliestedoù marzel $f_{i\bullet}$ zo ivez trommgreiz G ar poentoù (x_i, y_j) daspouezet dre f_{ij}, eleze ar poent $(\overline{x}, \overline{y})$. Da heul, mard eo arstalek arouez argev krommenn argizañ Y e-keñver x, emañ ar poent G en argev-se. Mard eo ar grommenn argizañ un eeunenn emañ G war an eeunenn-se dre ret.

Dre gevamsaviñ an daou stadekadur e tienaer ez eo G trommgreiz ar poentoù $(\overline{x}_j, y_j)$ o savelañ krommenn argizañ X e-keñver y, ar poentoù-se o vezañ daspouezet dre aliestedoù marzel Y : $f_{\bullet j}$. An evezhiadennoù kent evit a sell savlec'h G e-keñver ar grommenn argizañ zo talvoudek c'hoazh. Ent dibarek, mard eo eeunennoù an div grommenn argizañ e kenskejont en trommgreiz G dezhañ da zaveennoù $(\overline{x}, \overline{y})$.



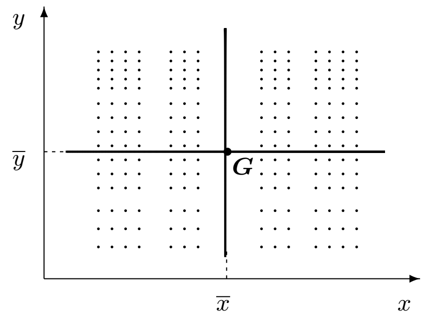
Savlec'h an trommgreiz e-keñver ar c'hrommennoù argizañ

14.2.1.2 Degouezh an dizalc'h

Mard eo dizalc'h ar stadekadurioù X ha Y ez eus an un dasparzh gant ar stadekadurioù a-zianouez ha gant ar stadekadur marzel keñverek. Da heul ez eo par ar c'heitadoù a-zianouez kentrezo ha par int ivez d'ar c'heitad marzel keñverek :

$$\overline{x}_j = \overline{x} \quad ; \quad \overline{y}_i = \overline{y}.$$

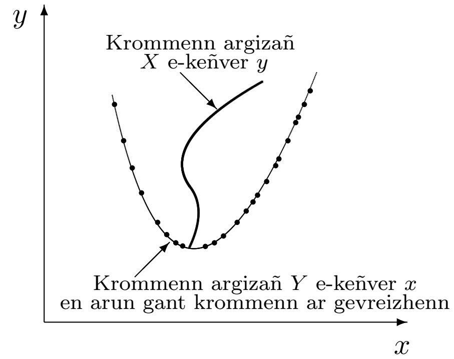
Amañ dindan ar c'hrommennoù argizañ e degouezh an dizalc'h : eeunennoù int o div, kenstur da ahelioù an daveennoù :



Teurel pled ouzh kement-mañ : dianlenad an dizalc'h etre an div gedrann X ha Y zo kensturder an div eeunenn argizañ da ahelioù an daveennoù. Hogen ar c'hensturder ne empleg ket dizalc'h ar stadekadurioù : ne spir ket e ve par ar c'heitadoù a-zianouez kenetrezo, dav eo ouzhpenn ma ve par an *dasparzhioù* kenetrezo. Ha lies dasparzh a c'hell kaout an un keitad hep bezañ par evit kelo.

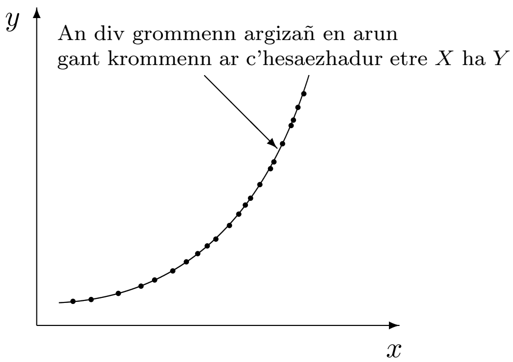
14.2.1.3 Degouezh an ere kevreizhel

• **Ere kevreizhel ankeveskemm** — Goulakaomp ez eus un ere kevreizhel eus teskad gwerzhadoù ar stadekadur X da deskad gwerzhadoù ar stadekadur Y : ouzh pep gwerzhad bezus x_i e klot ur werzhad y_i eus Y hepken. Keitad ar stadekadur a-zianouez $Y/_{X=x_i}$ skoanet en doare-se zo par da y_i. Da heul ez eo krommenn argizañ Y e-keñver x en arun gant ar grommenn eren (eleze krommenn ar gevreizhenn $X \to Y$).



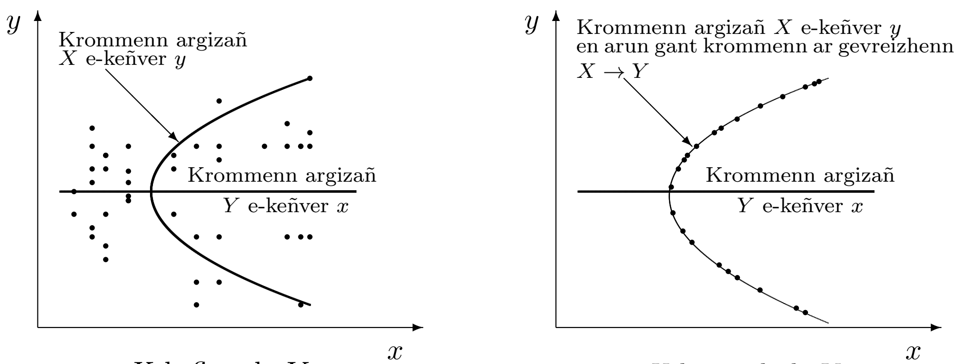
EVEZHIADENN — Ma n'eo ket keveskemm an ere kevreizhel, eleze ma n'eo ket kesaezhat an daveadur etre gwerzhadoù X ha gwerzhadoù Y, n'eo ket krommenn argizañ X e-keñver y en arun gant krommenn ar gevreizhenn $X \to Y$.

• **Ere kevreizhel keveskemm** — Pa vez keveskemm an ere kevreizhel etre gwehanadoù an daou stadekadur ez eo an div grommenn argizañ en arun gant krommenn ar c'hesaezhadur etre X ha Y.



• **Keflen(ded)** — Pa n'emañ ket krommenn argizañ Y e-keñver x kenstur da ahel al ledennoù e lavarer ez eo Y keflen da X, pe emañ Y a-geflen da X.

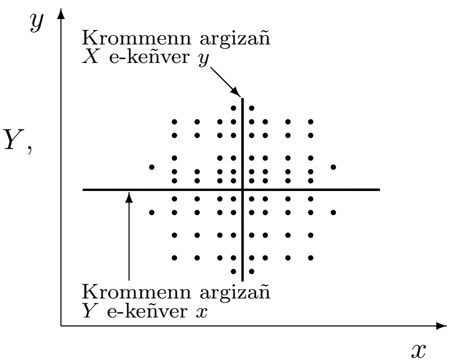
Notomp ne vez ket keveskemm an ezvezañs a geflen ar peurliesañ : Y a c'hell bezañ ankeflen da X, tra ma'z eo keflen X da Y. Ouzh ar vevenn e c'hell Y bezañ ankeflen da X, tra m'emañ X a-gevreizh da Y ($Y \to X$).



X keflen da Y — X kevreizh da Y

Y ankeflen da X.

An dizalc'h zo un degouezh dibarek a ezvezañs keveskemm a geflen. Evel meneget amañ diaraok, an ezvezañs keveskemm a geflen ne empleg ket an dizalc'h etre an daou stadekadur. War al lun amañ dindan — a glot gant an ezvezañs keveskemm a geflen — ne oufe bezañ a zizalc'h etre an daou stadekadur Y ha X : ampled $Y/_{X=x_i}$ a gemm gant x_i. Ar c'heal a geflended a ra dave d'ar c'heitadoù a-zianouez *hepken*.



Ankeflen(ded) keveskemm etre X ha Y, diforc'h diouzh an dizalc'h.

Desellomp da skouer ur boblañs stadekaet diouzh ar gopr hag an oad. Ar gopr zo ankeflen d'an oad mard eo *gopr keitad* an dud 25 bloaz, an dud 30 vloaz, h.a., par da c'hopr keitad hollad ar boblañs. Dizalc'h ar goproù diouzh an oad a ve sevenet mar befe pikernenn ar goproù an dud 25 bloaz hevelep gant hini an dud 30 vloaz, h.a. ha gant hini ar boblañs a-bezh. E c'hell bezañ ankeflended hep ma ve dizalc'h. Da skouer, ar goproù keitat o vezañ arstalek a-gevreizh d'an oad, e c'hellfe bezañ evelkent lies skalfad a c'hoproù e dalc'h an oad.

E se studi keflended ur stadekadur Y d'ur stadekadur X zo hini dizalc'h kevreizhel ar c'heitadoù a-zianouez $\overline{y}_i$ a-gevreizh da werzhadoù x_i ar stadekadur eren. Seul vrasoc'h ar c'heflen ma'z eo krommenn argizañ Y e-keñver x o terc'hennañ gwelloc'h ar gwerzhadoù y_j eus Y, eleze ma'z eo tolpet ar poentoù (x_i, y_j) kalz muioc'h en amezegiezh ar grommenn argizañ.

Studi keflended Y da x a lak war wel daou geal enta :

1. Krommenn argizañ Y e-keñver x ;
2. Kreñvder keflended Y gant X.

14.2.2 Keñver keflended

14.2.2.1 Despizadur

Diskouezet hon eus uheloc'h e c'haller digenaozañ hebiant marzel ar stadekadur Y e sammad daou dermen muiel : hebiant ar c'heitadoù a-zianouez ha keitad an hebiantoù a-zianouez :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(\overline{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet} V_i(Y).$$

Keñver keflended Y da X a reer eus kenfeur hebiant ar c'heitadoù a-zianouez e hollad an hebiant marzel :

$$\eta^2_{y;x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(\overline{y}_i - \overline{y})^2}{V(Y)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet} V_i(Y)}{V(Y)}.$$

Anat eo ez eo gavaelet ar c'heñver keflended etre 0 hag 1. Despizañ a reer ivez keñver keflended X da Y :

$$\eta^2_{x;y} = \frac{\sum_{i=1}^{s} f_{\bullet j}(\overline{x}_j - \overline{x})^2}{V(X)} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j} V_j(X)}{V(X)}.$$

Liesañ ne vez ket par an daou geñver. Bez' ez eus :

$$0 \leqslant (\eta^2_{y;x}\,, \eta^2_{x;y}) \leqslant 1.$$

14.2.2.2 Desteriadur ur c'heñver keflended

• Mannel eo ar c'heñver keflended $\eta^2_{y;x}$ mard eo mannel hebiant ar c'heitadoù a-zianouez. Hogen mannel eo un hebiant, nemet mard eo par an holl werzhadoù. Da heul ez eo par ar c'heitadoù a-zianouez ha kenstur eo krommenn argizañ Y e-keñver x da ahel al ledennoù : e se Y zo ankeflen da X. A-geveskemm, an ankeflended etre Y hag X a empleg ez eo mannel ar c'heñver keflended $\eta^2_{y;x}$.

• Ar c'heñver keflended $\eta^2_{y;x}$ zo par da 1 mard eo mannel keitad an hebiantoù a-zianouez $V_i(Y)$. Hogen mannel eo ur sammad termenoù muiel, nemet mard eo mannel an holl dermenoù. E se ez eo mannel an holl hebiantoù $V_i(Y)$: ouzh ar werzhad x_i eus X e klot ur werzhad hepken eus Y ha da heul ez eo gwerzhadoù X ereet ent kevreizhel ouzh ouzh gwerzhadoù Y ($X \to Y$). A-geveskemm ez empleg kevreizhded Y da X ez eo par da 1 ar c'heñver keflended $\eta^2_{y;x}$.

$\eta^2_{x;y}$ / $\eta^2_{y;x}$	$\eta^2_{x;y} = 0$	$0 < \eta^2_{x;y} < 1$	$\eta^2_{x;y} = 1$
$\eta^2_{y;x} = 0$	Ankeflended keveskemm	Degouezh hollek ankeflended Y da X	Kevreizhded X da Y Ankeflended Y da X
$0 < \eta^2_{y;x} < 1$	Degouezh hollek ankeflended X da Y	Degouezh hollek	Degouezh hollek a gevreizhded ankeveskemm $Y \to X$
$\eta^2_{y;x} = 1$	Kevreizhded Y da X Ankeflended X da Y	Degouezh hollek a gevreizhded ankeveskemm $(X \to Y)$	Kevreizhded keveskemm (kesaezhadur)

An daolenn amañ diaraok zo un daolenn gevemplegañ a c'haller lenn war an daou du. Da skouer, $\eta^2_{y;x} = \eta^2_{x;y} = 0$ a dalvez an ankeflen keveskemm hag a-c'hin, an ankeflen keveskemm a empleg parder an daou geñver da vann.

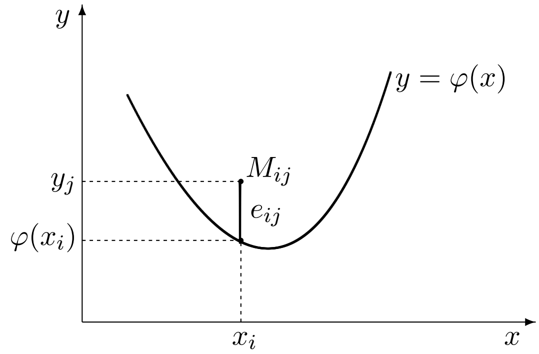
E se, keñver keflended Y da X — $\eta^2_{y;x}$ — zo ur muzul eus kreñvder an ere a geflended etre Y ha X. Diskouez a reer ez eo anargemmat (evel ar c'heñver all $\eta^2_{x;y}$) mar sevener war X pe Y ur c'hemm orin pe skeul.

14.2.2.3 Perzhioù ar c'hrommennoù argizañ : krommennoù an daouvac'hadoù bihanañ

Savelomp a-douez an holl grommennoù eus ar blaenenn, dezho un atalad rezhiennet evel henn :

$$y = \varphi(x),$$

an hini o seveniñ an dro wellek-mañ : keitad — daspouezet gant an aliestedoù hollel f_{ij} — daouvac'hadoù ar forc'hadoù kenstur da ahel an hedennoù etre ar poentoù M_{ij} a zaveennoù (x_i, y_j) hag ar grommenn zo izek :



$$\Delta = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}e_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}\left[y_j - \varphi(x_i)\right]^2 = \text{izek.}$$

Ar sammad daou o savelañ Δ a c'hell bezañ digenaozet evel henn :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{i\bullet}f_{j/i}\left[y_j - \varphi(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{r}\left[f_{i\bullet}\sum_{j=1}^{s} f_{j/i}\big(y_j - \varphi(x_i)\big)^2\right].$$

Hogen ar c'hementad,

$$\sum_{j=1}^{s} f_{j/i}\big(y_j - \varphi(x_i)\big)^2,$$

ma'z eo festet i, zo keitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù etre gwerzhadoù bezus ar stadekadur $Y/_{X=x_i}$ hag un niver arstalek $\varphi(x_i)$. Dre zedalvout reollun König e teu :

$$\sum_{j=1}^{s} f_{j/i}\big(y_j - \varphi(x_i)\big)^2 = V_i(Y) + \left[\overline{y}_i - \varphi(x_i)\right]^2.$$

Alese :

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}\left[V_i(Y) + \big(\overline{y}_i - \varphi(x_i)\big)^2\right]\\ &= \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}V_i(Y) + \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}\left[\overline{y}_i - \varphi(x_i)\right]^2.\end{aligned}$$

Rezhiennet evel-se, ar werzhad wellek $\varphi(x_i)$ o klotañ ouzh pep gwerzhad x_i a anad splann : an eil sammad — a zo muiel — a dizh e izegenn (par da vann) mard eo, evit nep x_i :

$$\varphi(x_i) = \overline{y}_i.$$

E se, ar grommenn wellek he atalad $y = \varphi(x)$ — a zo en un doare an hini dostañ d'an dasparzh — zo krommenn argizañ Y e-keñver x, eleze krommenn ar c'heitadoù a-zianouez $\overline{y}_i$ a-gevreizh da x_i. Ar grommenn argizañ zo ivez krommenn an daouvac'hadoù bihanañ. An izegenn Iz diraezet gant Δ zo :

$$Iz = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet} V_i(Y) = \left[1 - \eta^2_{y;x}\right] V(Y).$$

EVEZHIADENNOÙ :

1. Digenaozadur hebiant marzel Y en e zaou dermen :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet} V_i(Y) + \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(\overline{y}_i - \overline{y})^2$$

a c'hell bezañ desteriet evel henn :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - \overline{y})^2$$

zo keitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù (jedet a-hed ahel an hedennoù) etre ar poentoù M_{ij} hag an eeunenn $y = \overline{y}$, eleze an *hebiant hollel.*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - \overline{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet} V_i(Y)$$

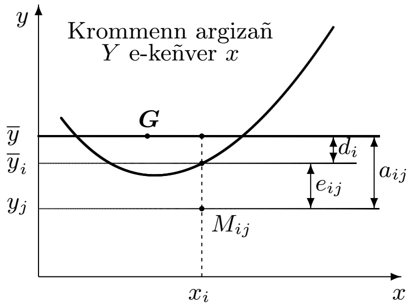
zo keitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù (a-hed ahel an hedennoù) etre ar poentoù M_{ij} ha krommenn argizañ Y e-keñver x : eleze an hebiant en-dro d'ar grommenn argizañ pe c'hoazh an *hebiant dilerc'h.*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(\overline{y}_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(\overline{y}_i - \overline{y})^2$$

zo keitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù (kenstur da ahel an hedennoù) etre poentoù krommenn argizañ Y e-keñver x hag an eeunenn he atalad $y = \overline{y}$: eleze an *hebiant dre berzh an argizañ.*

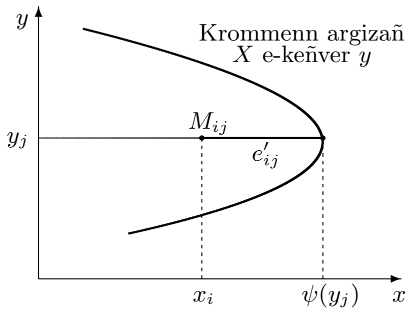
$$V(Y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}e_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}d_i^2.$$

hebiant hollel = hebiant dilerc'h + hebiant dre berzh argizañ



Keñver keflended Y da X — $\eta^2_{y;x}$ — zo neuze ar rann eus an hebiant hollel dre berzh argizañ Y e-keñver x. Ur muzul eo eus kreñvder keflended Y da X.

2. Dre gevamsaviñ roll ar stadekadurioù X ha Y e c'hounezer un disoc'h heñvel : e-keñver krommenn argizañ X e-keñver y eo ez eo izek keitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù, jedet a-genstur da ahel al ledennoù.

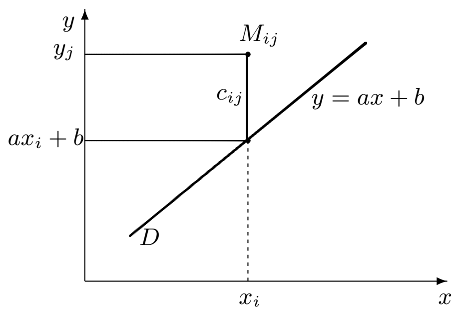


Diraezet eo an izegenn evit :

$$Iz' = \left[1 - \eta^2_{x;y}\right] V(X).$$

14.2.2.4 Eeunenn an daouvac'hadoù bihanañ

Savelomp a-douez an holl eeunennoù a'r blaenenn an hini a zo an nesañ da boentoù M_{ij} an dasparzh, ar pellder o vezañ dewerzhet c'hoazh dre geitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù, a-genstur da ahel an hedennoù.



An eeunenn wellek D — $y = ax + b$ he atalad — a glot gant gwerzhadoù ar gwezhiaderioù a ha b a izeka ar c'hementad :

$$A = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij} c_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - ax_i - b)^2.$$

Klaskomp evit a festet ar werzhad b a izeka A[1]. Goude e vo savelet a dre izekaat an izegenn darnel jedet.

Diarroudenn A e-keñver b zo :

$$\frac{\partial A}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - ax_i - b) = -2(\overline{y} - a\overline{x} - b).$$

Diraezet eo an izegenn darnel dre lakaat b da argemmañ evit a festet, eleze :

$$b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

An daveadur etre a ha b a dreuztaol ent mentoniel an devoud e tremen an eeunenn D klasket dre ar poent G e zaveennoù $(\overline{x}, \overline{y})$, eleze dre drommgreiz ar poentoù M_{ij} :

$$\overline{y} = a\overline{x} + b.$$

[1]Evit a festet ez eo A un trinom eus an eil derez da b a zo muiel ar c'hentañ gwezhiader anezhañ (hini b^2). A a dremen neuze dre un izegenn evit ar werzhad eus b a vannela diarroudenn gentañ A e-keñver b.

O tougen e riñvenn A ar werzhad-se eus b e tewerzher an izegenn darnel :

$$\begin{aligned}\min_b A &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - ax_i - \overline{y} + a\overline{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}\left[y_j - \overline{y} - ay(x_i - \overline{x})\right]^2 .\end{aligned}$$

Savelomp gwerzhad a a izeka izegenn darnel $\min_b A$:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left\{f_{ij}(x_i - \overline{x})\left[y_j - \overline{y} - a(x_i - \overline{x})\right]\right\}.$$

Gwerzhad a a vannela an diarroudenn-se zo :

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Ar riñvenn-se a c'hell bezañ rezhiennet c'hoazh evel henn :

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{V(X)}.$$

Dodomp dre zespizadur :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) = \mathrm{Cov}(X,Y) \quad \text{ha} \quad r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

ma'z eo $\sigma(X)$ ha $\sigma(Y)$ strewantoù marzel X ha Y. Ar gwezhiader r — a zo kemparzhek e-keñver X ha Y, e kemm ouzh keñver keflended η^2 — a reer anezhañ *gwezhiader keflended* etre X ha Y. Studiet e vo a-ziforc'h amañ dindan.

Naou an eeunenn wellek D a c'hell bezañ rezhiennet evel henn :

$$a = r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\big[\sigma(X)\big]^2}.$$

A se atalad D :

$$y - \overline{y} = r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(x - \overline{x}).$$

An izegenn m diraezet gant A a c'hounezer dre erlec'hiañ e riñvenn A ouzh ar gwezhiaderioù a ha b o gwerzhadoù gwellek :

$$m = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}\left[y_j - \overline{y} - r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(x_i - \overline{x})\right]^2,$$

bezet o tispakañ an daouvac'had :

$$\begin{aligned} m = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - \overline{y})^2 + r^2\frac{\sigma(Y)^2}{\sigma(X)^2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})^2 \\ - 2r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - \overline{y})(x_i - \overline{x}). \end{aligned}$$

Hogen :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - \overline{y})^2 &= \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j}(y_j - \overline{y})^2 = V(Y) = \sigma(Y)^2 \\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})^2 &= \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(x_i - \overline{x})^2 = V(X) = \sigma(X)^2, \end{aligned}$$

hag ivez :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - \overline{y})(x_i - \overline{x}) = r\sigma(X)\sigma(Y).$$

Da heul :

$$\begin{aligned} m &= \sigma(Y)^2 + r^2\frac{\sigma(Y)^2}{\sigma(X)^2}\sigma(X)^2 - 2r\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}r\sigma(Y)\sigma(X) \\ &= \big(1 - r^2\big)V(Y). \end{aligned}$$

E se, an eeunenn wellek D, eleze an hini dostañ da boentoù M_{ij} an dasparzh, a ro da geitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù ar werzhad :

$$m = \big(1 - r^2\big)V(Y)$$

tra ma kas ar grommenn wellek (krommenn argizañ Y e-keñver x) da :

$$Iz = \big(1 - \eta^2_{y;x}\big)V(Y),$$

hag an eeunenn $y = \overline{y}$ da :

$$V(Y).$$

An tri c'hementad muiel-se zo renket hervez an urzh-mañ :

$$0 \leqslant \big(1 - \eta^2_{y;x}\big)V(Y) \leqslant \big(1 - r^2\big)V(Y) \leqslant V(Y),$$

o vezañ ma'z eo ar grommenn argizañ ar grommenn wellek a-douez ar c'hrommennoù hag an eeunenn D an eeunenn wellek a-douez an eeunennoù, ha dre eeunaat dre $V(Y)$:

$$0 \leqslant r^2 \leqslant \eta^2_{y;x} \leqslant 1.$$

Dre gantamsaviñ roll X ha Y e saveler eeunenn an daouvac'hadoù bihanañ D' eus ar forc'hadoù jedet a-genstur da ahel al ledennoù :

$$\begin{aligned}
&\text{eeunenn } D\ : y - \overline{y} = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \overline{x}) \qquad \text{izegenn } : \ m = (1 - r^2)V(Y)\\
&\text{eeunenn } D': x - \overline{x} = r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \overline{y}) \qquad \text{izegenn } : \ m' = (1 - r^2)V(X),
\end{aligned}$$

eleze c'hoazh :

$$\text{eeunenn } D' : y - \overline{y} = \frac{1}{r}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \overline{x}).$$

Teurel ped ned eo ket ar gwezhiaderioù roud ketep :

$$\text{eeunenn } D : r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \qquad \text{hag} \qquad \text{eeunenn } D' : \frac{1}{r}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

kemparzhek pa gantamsaver roll X ha Y.

Ar c'heñverioù keflended hag ar gwezhiader keflended linennek a vast neuze d'an dibarderioù :

$$0 \leqslant r^2 \leqslant \left(\eta^2_{y;x}, \eta^2_{x;y}\right) \leqslant 1.$$

• Keverata etre ar c'heñverioù keflended hag ar gwezhiader keflended linennek — Ar gwezhiader keflended linennek zo un niver gavaelet etre -1 ha +1, pa'z eo e zaouvac'had gavaelet etre 0 hag 1.

Daouvac'had ar gwezhiader keflended linennek zo par d'ar c'heñver keflended $\eta^2_{y;x}$ mard eo par an izegennoù Iz ha m :

$$m = \big(1 - r^2\big)V(Y), \qquad Iz = \big(1 - \eta^2_{y;x}\big)V(Y),$$

mard eo ar grommenn wellek en arun gant an eeunenn wellek, anat eo. O vezañ ma'z eo ar grommenn wellek krommenn argizañ Y e-keñver x ez eo hounnezh un eeunenn.

E se, parder r^2 gant keñver keflended Y e-keñver x zo kevatal da linennegezh krommenn argizañ Y e-keñver x. Lavaret a reer neuze ez eo keflen ent linennek Y da X. Anv a reer a *keflen(ded) linennek* Y da X. Liesañ ne vez ket keveskemm ar geflended linennek : krommenn argizañ Y e-keñver x a c'hell bezañ un eeunenn hep ma ve ivez krommenn argizañ X e-keñver y.

Mard eo an daou geñver keflended par da zaouvac'had ar gwezhiader keflended linennek e lavarer ez eus keflended linennek etre X ha Y, pe ez int kengeflen.

An ankeflended zo un degouezh dibarek a geflended linennek pa'z eo par unan eus ar c'heñverioù keflended da vann, pezh a empleg ez eo par ivez da vann daouvac'had ar gwezhiader keflended linennek :

$$0 \leqslant r^2 \leqslant \Big(\eta^2_{y;x}, \eta^2_{x;y}\Big).$$

Par eo ar gwezhiader keflended da ∓ 1 mard eo mannel an izegenn m. Hogen m zo keitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù etre poentoù M_{ij} an dasparzh hag an eeunenn D ; m ned eo mannel nemet mard eo mannel an holl forc'hadoù, eleze ez eo an holl boentoù M_{ij} a-eeun war D : e gerioù all, parder ar gwezhiader keflended gant ∓ 1 a dalvez ez eo ereet X ouzh Y dre ur gevreizhenn linennek.

Ar gevreizhded-se zo keveskemm, pa'z eo unton ar gevreizhenn linennek : mard eo r^2 par da 1 ez eo par an daou geñver keflended da 1 ivez, da heul an dibardermañ da heul :

$$r^2 \leqslant \Big(\eta^2_{y;x}, \eta^2_{x;y}\Big) \leqslant 1.$$

EVEZHIADENN — Tra ma empleg parder ur c'heñver keflended da vann ez eo ivez par ar gwezhiader keflended linennek da vann ha, heñvel dra, parder r^2 da 1 a empleg ez eo an daou geñver keflended par da 1, en enep, parder ar gwezhiader keflended linennek da vann ne empleg netra evit a sell ar c'heñverioù keflended. Heñvel dra, parder da 1 unan eus ar c'heñverioù keflended ne empleg netra evit a sell ar gwezhiader keflended linennek. Heñvel dra, parder unan eus ar c'heñverioù keflended da 1 ne empleg netra evit a sell ar gwezhiader keflended linennek :

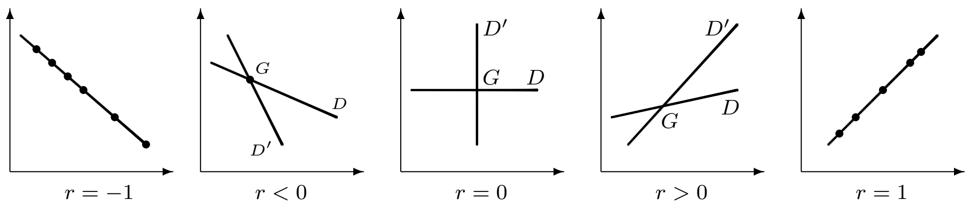
$$0 \leqslant r^2 \leqslant \left(\eta^2_{y;x}, \eta^2_{x;y}\right) \leqslant 1.$$

• **Keverata eeunennoù ar bihanañ daouvac'hadoù** — An eeunennoù D ha D' zo o ataladoù :

$$D : y - \overline{y} = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \overline{x}) \quad \text{hag} \quad D' : y - \overline{y} = \frac{1}{r}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \overline{x}).$$

An div eeunenn-se a genskej e trommgreiz G ar poentoù M_{ij} hag o gwezhiader roud zo kenarouez. Gwerzh dizave naou D' zo brasoc'h da hini D, pa'z eo r bihanoc'h eget 1 e werzh dizave. E se ez eo kengresk pe gingresk an div eeunenn en ur ser, gwerzh dizave naou an eeunenn D' o vezañ brasoc'h.

En arun emañ an div eeunenn D ha D' nemet mard eo r^2 par da 1, eleze mard eus kevreizh linennek etre X ha Y. Pa vez par ar gwezhiader keflended linennek da vann ez int kenstur da aheliou an daveennoù. Amañ dindan savlec'hioù keñverel an eeunennoù D ha D', hervez gwerzhioù ar gwezhiader keflended linennek r :



Digenaozadur an hebiant marzel — Diskouezet hon eus amañ diaraok e c'haller digenaozañ an hebiant marzel e daou dermen pa engwerc'her krommenn argizañ Y e-keñver x : an hebiant en-dro d'ar grommenn argizañ hag an hebiant dre berzh ar grommenn argizañ.

Diskouezomp e c'haller ivez digenaozañ hebiant marzel Y oc'h engwerc'hañ eeunenn D an daouvac'hadoù bihanañ : hebiant marzel Y zo sammad an hebiant en-dro d'an eeunenn D ha d'an hebiant dre berzh an eeunenn D.

E gwir :

$$
\begin{aligned}
V(Y) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - \overline{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}\Big[\Big(y_j - \overline{y} - a(x_i - \overline{x})\Big) + \Big(a(x_i - \overline{x})\Big)\Big]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}\Big(y_j - \overline{y} - a(x_i - \overline{x})\Big)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}\Big(a(x_i - \overline{x})\Big)^2 \\
&\qquad + 2a\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})\big[y_j - \overline{y} - a(x_i - \overline{x})\big].
\end{aligned}
$$

Eleze :

$$
V(Y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - ax_i - b)^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}\big(ax_i + b - \overline{y}\big)^2,
$$

Pa'z eo mannel an termen

$$
2a\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})\big[y_j - \overline{y} - a(x_i - \overline{x})\big]
$$

da heul termenadur a :

$$
a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})^2}.
$$

Hogen :

$$
\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(y_j - ax_i - b)^2
$$

zo an izegenn m par da :

$$
m = (1 - r^2)V(Y).
$$

Da heul :

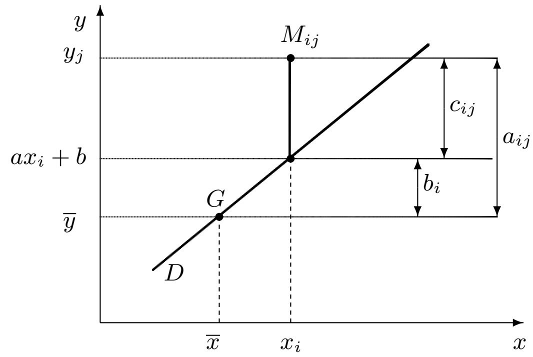
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(ax_i + b - \overline{y})^2 = r^2 V(Y).$$

E se e tisoc'her war an digenaozadur :

$$\begin{array}{lcll} V(Y) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}\left[(y_j - \overline{y} - a(x_i - \overline{x})\right]^2 & + \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(ax_i + b - \overline{y})^2 \\ V(Y) & = & (1-r^2)V(Y) & + \quad r^2 V(Y) \\ \text{Hebiant} & & \text{Hebiant en-dro} & \quad\ \text{Hebiant dre berzh} \\ \text{marzel } Y & & \text{d'an eeunenn } D & \quad\ \text{an eeunenn } D \end{array}$$

Pe c'hoazh :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}c_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}b_i^2$$



Dre an digenaozadur-se e tiskouezer ez eo r^2 rann hebiant Y dre berzh an eeunenn D [kel zo eus hebiant Y desellet pa grenner hollad an arselladennoù (x_i, y_j) dre an eeunenn D : $(x_i, ax_i + b)$], $\eta^2_{y;x}$ o vezañ rann hebiant Y dre berzh krommenn argizañ Y e-keñver x. Ar rann r^2 zo bihanoc'h eget ar rann $\eta^2_{y;x}$.

14.2.2.5 Gwezhiader keflended linennek

• **Despizadur** — *Gwezhiader keflended linennek* etre Y hag X a reer eus ar c'heñver :

$$\boxed{r = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j}(y_j - \overline{y})^2}}}\,.$$

Rezhiennoù all :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\,\sqrt{V(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

• **Kemm stadekadurioù** — Mar sevener ar c'hemm stadekadurioù-mañ :

$$x_i = x_0 + hx_i' \quad \text{hag} \quad y_j = y_0 + ky_i', \quad (h \text{ ha } k \text{ gwerc'helion muiel})$$

e teu :

$$r = \frac{hk\,\mathrm{Cov}(X',Y')}{h\sigma(X')k\sigma(Y')} = \frac{\mathrm{Cov}(X',Y')}{\sigma(X')\sigma(Y')}.$$

Gwezhiader keflended linennek (X,Y) zo par da hini (X',Y'). E se ez eo anargemmată ar gwezhiader keflended linennek dre ar c'hemm stadekadurioù-se.

• **Perzhioù :**

1. Kounañ dibarder Schwarz :

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}x_iy_j\right)^2 - \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}x_i^2 \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j}y_j^2 \leqslant 0.$$

A se e tezreer an dibarder daou :

$$\boxed{-1 \leqslant r \leqslant 1}\,.$$

2. Mard eo dizalc'h an doareennoù X ha Y, eleze mard eo $f_{ij} = f_{i\bullet} \times f_{\bullet j}$ ez eus :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_{ij}f_{i\bullet}f_{\bullet j}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} f_{i\bullet}(x_i - \overline{x}) \times \sum_{j=1}^{s} f_{\bullet j}(y_j - \overline{y}) = 0,\end{aligned}$$

rak pep termen zo mannel.

$$\boxed{X \text{ ha } Y \text{ dizalc'h} \Longrightarrow r = 0}.$$

faos eo ar geveskemmenn.

• **Eeunennoù an daouvac'hadoù bihanañ** — Rezhiennañ a c'haller evel henn ataladoù an div eeunenn :

$$Y \text{ e-keñver } x : \quad y - \overline{y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(X)}(x - \overline{x}),$$

hag :

$$X \text{ e-keñver } y : \quad x - \overline{x} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(Y)}(y - \overline{y}),$$

Bezet enta :

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(X)} \quad \text{hag} \quad a' = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(Y)}.$$

Mar sevener ar c'hemmoù stadekadurioù :

$$x'_i = \frac{x_i - x_0}{h}, \quad \text{hag} \quad y'_j = \frac{y_j - y_0}{k},$$

e tienaer :

$$a = \frac{hk\,\mathrm{Cov}(X', Y')}{h^2 V(X')} = \frac{k}{h} \times \frac{\mathrm{Cov}(X', Y')}{V(X')},$$

ha heñvel dra :

$$a' = \frac{k}{h} \times \frac{\mathrm{Cov}(X', Y')}{V(Y')}.$$

• ***r*** **a-geñver an div eeunenn *D* ha *D'*** — Bez' ez eus enta :

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(X)} \quad \text{hag} \quad a' = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{V(Y)}.$$

Alese e tezreer :

$$aa' = \frac{\big[\mathrm{Cov}(X, Y)\big]^2}{V(X)V(Y)} = r^2.$$

E se :

$$\boxed{aa' = r^2}.$$

• **Mard emañ en arun D ha D'** — Neuze ez eo par a hag $1/a'$, ha da heul ez eo $r^2 = 1$. E se :

$$\boxed{\text{A-eeun emañ an holl boentoù } M_{ij} \iff r^2 = 1}.$$

• **Keflended kreñv** — Dre gendivizad e lavarer ez eo kreñv ar c'heflen etre Y hag X pa vez :

$$\sqrt{1 - r^2} \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{eleze} \quad r^2 \geqslant \frac{3}{4},$$

E se :

$$\boxed{\text{Keflended kreñv} \iff 0,87 \leqslant |r| \leqslant 1}.$$

• **Keflended mannel** — Pa vez $r = 0$ e lavarer ez eo mannel ar geflended linennek etre Y hag X. E c'hell ar poentoù M_{ij} bezañ nes d'ur grommenn, hogen eeunennoù an daouvac'hadoù bihanañ zo kenstur da ahelioù an daveennoù.

EVEZHIADENN — a hag a' a c'hell bezañ rezhiennet evel henn c'hoazh :

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} x_i y_j - N\overline{x}\,\overline{y}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet} x_i^2 - N\overline{x}^2} \quad \text{hag} \quad a' = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} x_i y_j - N\overline{x}\,\overline{y}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j} y_j^2 - N\overline{y}^2}.$$

POELLADENNOÙ

14.01 Bezet an daolenn amañ dindan o tennañ d'ar stadekadur divvent da heul : hiniennoù rummet e dregantad evit an div zoareenn pouez ha ment.

X eo ar pouez ha Y eo ar vent e cm.

Y \ X	]40,45]	]45,50]	]50,55]	]55,60]
]150,155]	20	9	1	0
]155,160]	2	18	4	1
]160,165]	0	5	12	6
]165,170]	0	1	7	14

Goulenn a reer :

a) Kevregañ an heuliad stadegel divvent-se dre ur gronn poentoù.

b) Jediñ ar gwezhiader keflended.

c) Savelañ ha kevregañ an div eeunenn argizañ.

14.02 Bezet ar stadekadur divvent a-zivout an ijinerezhioù oberiañ en 10 bro amañ da heul (evit ar prantad 54—64).

Bro	feur kreskiñ ar c'henderc'h X	feur kreskiñ ar genderc'husted Y
Italia	8,1	4,2
Alamagn	7,4	4,5
Aostria	6,4	4,2
Frañs	5,7	3,8
Danmark	5,7	3,2
Izelvroioù	5,5	4,1
Belgia	5,1	3,9
Norge	4,6	4,4
Kanada	3,4	1,3
Breizh Veur	3,2	2,8

a) Savelañ ataladoù an div eeunenn argizañ ha dezren ar gwezhiader keflended r.

b) Derc'hennañ ar gronn stadegel gant an div eeunenn.

14.03 War-benn studiañ ar c'heflen etre disoc'hoù 25 skoliad e div ziskiblezh en o rummer e tri stroll : divarrek -1 ; etre 0 ; barrek 1.

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	6	2	0
0	2	5	5
1	0	3	2

a) Savelañ gwezhiader keflen linennek etre X ha Y.

b) Savelañ ataladoù an div eeunenn argizañ.

14.04 Bezet an daolenn-mañ da heul :

x_i	2	4	5	7	10	11	14	14	17	18
y_i	0	1	1	2	6	5	9	11	14	17

ma'z eo x_i gwerzhadoù an doareenn X ha y_i gwerzhadoù an doareenn Y.

a) Sevel ar gronn stadegel ha stadañ e c'haller soñjal en ur grommenn argizañ a ve ur barabolenn he atalad $y = Ax^2$.

b) Dodiñ a reer enta $x_i^2 = z_i$. Savelañ neuze atalad eeunenn argizañ Y e-keñver Z. Dezren alese atalad krommenn argizañ Y e-keñver X.

14.05 Bezet an daolenn-mañ da heul :

Oad marv an tad	77	50	54	62	83	62	34	66
Oad marv ar mab henañ	74	42	68	66	81	79	44	62

a) Jediñ ar gwezhiader keflended ha gwezhiaderioù an eeunenn argizañ.

b) Derc'hennañ en un dealf ar gronn stadegel hag an eeunenn argizañ.