# 13

# Naouusterioù savlec'h ha strewadur

## 13.1 NAOUUSTERIOÙ TUED KREIZEL

### 13.1.1 Kreizad

#### 13.1.1.1 Despizadur

En un heuliad urzhiet ez eo ar c'hreizad nep niver $M$ a rann ar reveziad hollel e daou reveziad par. E gerioù all ez eus kement a wehanadoù bihanoc'h pe bar ouzh $M$ hag a wehanadoù brasoc'h pe bar ouzh $M$.

Bezet un heuliad stadegel $N$ e reveziad hollel, dezhañ ar gwehanadoù (eleze gwerzhadoù an doareenn) $x_1, x_2, \ldots, x_N$ renket war gresk (ar re bar o vezañ arreet). Daou zegouezh a ziforc'her :

• **Stadekadur arskarek :**

1. $N = 2j + 1$ zo ampar. Heuliad ar gwerzhadoù a skriver enta :

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_j}_{j \text{ gwehanad}}\ ,\ x_{j+1}\ ,\ \underbrace{x_{j+2}, \ldots, x_{2j+1}}_{j \text{ gwehanad}}\,.$$

Niver $j$ ar gwerzhadoù a-raok $x_{j+1}$ zo par da niver ar gwerzhadoù war-lerc'h $x_{j+1}$. Ar werzhad $x_{j+1}$-se a reer *kreizad* an heuliad stadegel anezhi.

2. $N = 2j$ zo hebar. Heuliad ar gwerzhadoù a skriver :

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_{j-1}}_{j-1 \text{ gwehanad}}\ ,\ x_j\ ,\ x_{j+1}\ ,\ \underbrace{x_{j+2}, \ldots, x_{2j}}_{j-1 \text{ gwehanad}}\,.$$

Niver $j-1$ ar gwerzhadoù a-raok $x_j$ zo par da niver ar gwerzhadoù war-lerc'h $x_{j+1}$. *Kreizad* an heuliad a reer eus nep gwerzhad diforzh eus an entremez $[x_j, x_{j+1}]$, anvet entremez kreizat.

**EVEZHIADENN** — Mard eo anpar ar gwerzhadoù $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ dezho ar reveziadoù darnel ketep $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_k$ ez eo ar c'hreizad $M$, nep niver, hevelep ma ve :

$$M \in [x_i, x_{i+1}] \iff \begin{cases} n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1} \leqslant \frac{N}{2} \\ n_{i+1} + n_2 + \cdots + n_k \leqslant \frac{N}{2} \end{cases} .$$

Eleze :

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1} \leqslant \frac{N}{2} \leqslant n_1 + n_2 + \cdots + n_i,$$

pe gant an aliestedoù :

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_{i-1} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant f_1 + f_2 + \cdots + f_i.$$

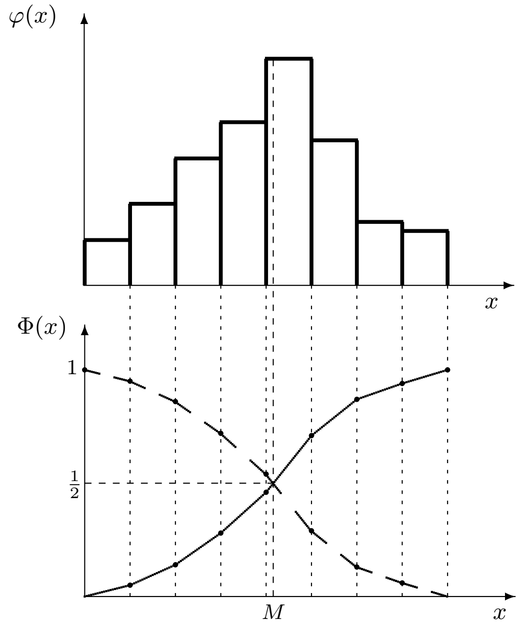
• **Stadekadur kendalc'hek :**

Krommennoù an aliestedoù dassammet war gresk ha war zigresk a genskej en ur poent 0,5 e hedenn. Dre gendivizad, kreizad an heuliad stadegel zo ledenn ar poent-se.

Dre etreletodiñ linennek etre ar werzhadoù $x_i$ ha $x_{i+1}$ e jeder $M$.

Anat eo ez eus an hevelep kevregoù gant ar reveziadoù e-lec'h an aliestedoù.

Mard eo $M$ ar c'hreizad e rann an eeunenn $x = M$ an tellun e div lodenn a un gorread 1/2.



### 13.1.2 Mod

**Despizadur** — *Mod* (pe *lañs*) un heuliad stadegel a reer eus ar werzhad dezhi ar reveziad brasañ (pe an aliested vrasañ). Mard eo arskarek ar stadekadur e vez savelet mat ar mod peurliesañ. Mard eo kendalc'hek ar stadekadur, ne c'haller savelañ nemet ar rumm model o klotañ ouzh an aliesteter uc'hek.

**EVEZHIADENN** — Dasparzhioù 'zo a c'hell kaout lies mod : liesmod int enta.

### 13.1.3 Keitad

#### 13.1.3.1 Despizadur

Trommgreiz ar gwehanadoù $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ daspouezet dre o aliestedoù ketep $f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_k$ a vez anvet keitad niveroniel $m$ un heuliad stadegel :

$$\boxed{m = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i},$$

a noter ivez $\overline{x}$, pe $\overline{x}$ mard eo $X$ ar stadekadur. Alies e tremener hep an hogozenn *niveroniel*.

**EVEZHIADENN** — Anat eo ez eus :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \quad (n_i \text{ reveziad darnel}).$$

#### 13.1.3.2 Stadekadur kendalc'hek, heuliad rummet

Ne c'haller ket dedalvout ar reollun amañ diaraok pa na anavezer nemet ar gwehanadoù $x_i$ e pep rumm. Dre gendivizad e jeder ar c'heitad dre erlec'hiañ outañ hini an heuliad arskarek a zo ar gwehanadoù anezhañ kreizoù ar rummoù daspouezet gant o reveziadoù darnel. Mard eo kemparzhek mui pe vui an dasparzh e tiskouezer ez eo bihan ar fazi graet.

#### 13.1.3.3 Perzhioù

Perzhioù an trommgreiz zo re ar c'heitad ivez. E se ne gemm ket ar c'heitad,

1. *ungenezhded* : mar liesaer an holl reveziadoù $n_i$ dre an un arstalenn anvannel ;
2. *kantamsavadezh* : mar kemmer urzh ar gwehanadoù ;
3. *strollatadezh* : mar erlec'hier lies gwehanad dre o c'heitad deverket dezhañ sammad reveziadoù ar gwehanadoù-se.

#### 13.1.3.4 Diforc'h ha forc'had diouzh ar c'heitad

• **Diforc'h diouzh ar c'heitad** — Sammad an diforc'hioù diouzh ar c'heitad zo par da vann :

$$\sum_1^k n_i(x_i - \overline{x}) = \sum_1^k n_i x_i - \overline{x}\sum_1^k n_i = N\overline{x} - \overline{x}N = 0.$$

• **Forc'had diouzh ar c'heitad** — Diouzh ur savboent bennak ez eo ar c'heitad ar werzhad tostañ ouzh hollad ar gwehanadoù. *Forc'had keitat niveroniel* a reer eus keitad ar forc'hadoù $|x_i - \overline{x}|$ :

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^k n_i|x_i - \overline{x}| = \sum_{i=1}^k f_i|x_i - \overline{x}|.$$

Ne vez ket arveret kalz an arventenn-se.

Jedomp keitad niveroniel daouvac'hadoù ar forc'hadoù etre ar gwerzhadoù $x_\alpha$ hag un niver festet $a$ :

$$Q(a) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - a)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^k n_i(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^k f_i(x_i - a)^2.$$

Ar gevreizhenn-se da $a$ zo un trinom a'n eil derez :

$$Q(a) = \sum_{i=1}^k f_i(x_i^2 - 2ax_i + a^2) = a^2 - 2a\overline{x} + \sum_{i=1}^k f_i x_i^2.$$

Izek eo ar gevreizhenn evit $a = \overline{x}$. Ar werzhad izek-se a reer anezhi *hebiant* :

$$V = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{x}^2.$$

Teurel pled ivez ez eo $Q(a)$ gant $a = 0$ al lankad ankreizet a'n eil urzh :

$$m_2 = Q(0) = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2.$$

E se ez eo $\overline{x}$ ar werzhad tostañ ouzh gwehanadoù an dasparzh e-keñver daou savboent. Diouzh ar c'heitad $\overline{x}$ eo ez eo :

- mannel keitad an diforc'hioù,
- hag izek keitad daouvac'hadoù ar forc'hadoù.

Dezgeriomp $Q(a)$ a-gevreizh d'he izegenn :

$$\begin{aligned} Q(a) &= \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i[(x_i - \overline{x}) + (\overline{x} - a)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2 + (\overline{x} - a)^2. \end{aligned}$$

E gwir :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})(\overline{x} - a)^2 = (\overline{x} - a) \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x}) = 0,$$

o vezañ ma'z eo hervez perzh ar c'heitad meneget amañ diaraok :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x}) = 0.$$

An daveadur

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2 + (\overline{x} - a)^2}$$

a reer *delakadenn König* anezhañ. Keveleb an delakadenn a-zivout al lankadoù anniñv al Loc'honiezh, ar c'heitad o c'hoari roll ar c'hreiz kerc'hell.

Mard eo $a = 0$ e teu :

$$m_2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2 + \overline{x}^2,$$

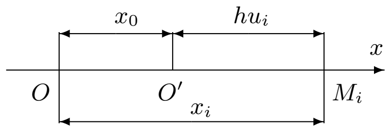
a c'haller skrivañ :

$$\boxed{V = m_2 - \overline{x}^2}.$$

ha dezrevellañ evel henn : an hebiant zo an diforc'h etre keitad ar c'harrezioù ha karrez ar c'heitad.

#### 13.1.3.5 Kemm orin ha skeul

Bezet war un ahel ar poent $M_i$ a ledenn $x_i = \overline{OM_i}$. Dibabomp un orin nevez $O'$ a ledenn $x_0$, anvet keitad da c'hortoz ha bezet $z_i = \overline{O'M_i}$ ledenn nevez $M_i$. Bez' ez eus : $z_i = x_i - x_0$, pezh a zo an diforc'h etre $x_i$ ha $x_0$.




Mar liesaer an unanenn regad dre $h$ ez eo rannet al ledenn nevez dre $h$. Ar muzul nevez-se zo :

$$u_i = \frac{x_i - x_0}{h}, \quad \text{a se :} \quad x_i = x_0 + hu_i.$$

Keitad an $x_i$-où zo :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i = \sum_{i=1}^{k} (x_0 + hu_i) f_i = x_0 \sum_{i=1}^{k} f_i + h \sum_{i=1}^{k} u_i f_i,$$

hag o vezañ ma'z eo :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1, \quad \text{hag} \quad \sum_{i=1}^{k} u_i f_i = \overline{u},$$

e teu :

$$\boxed{\overline{x} = x_0 + h\overline{u}}\,.$$

**EVEZHIADENN** — Ar reollun $x_i = x_0 + hu_i$ a zisoc'h diouzh erlec'hiañ ouzh an dealf $\left(O;\vec{i}\right)$ an dealf $\left(O';h\vec{i}\right)$ gant $\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i}$.

Ar c'hemm dealf-se a dalvez(e) da jediñ aesoc'h ar c'heitad, dre dremen dre geitad an $u_i$-où (eleze $\overline{u}$) ha dezren goude $\overline{x}$ dre ar reollun. Hiziv an deiz gant ar riñverezed hag an urzhiataerioù ez eo aesoc'h. . Gwelet e vo pelloc'h penaos dedalvout ar riñverezed.

### 13.1.4 Hollekadur ar c'heitad

#### 13.1.4.1 Despizadur ar $g$-keitad

Bezet ur stadekadur $X$ a zo e werzhadoù $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ (renket war gresk), dezho an aliestedoù ketep $f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_k$. Bezet $g$ ur gevreizhenn gendalc'hek unton (war gresk pe war zigresk) war an entremez $[x_1, x_k]$.

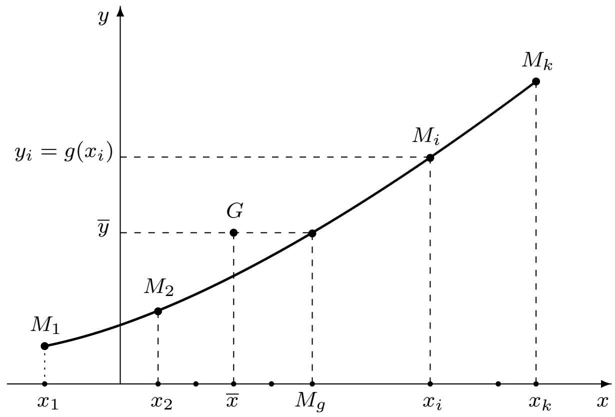
**Despizadur :** $g$-keitad ar stadekadur $X$ a reer eus an niver $M_g$, hevelep ma'z eo :

$$\boxed{g(M_g) = \sum_{i=1}^{k} f_i g(x_i)}\,.$$

Bez' ez eus eus an niver $M_g$, rak unton eo ar gevreizhenn $g$ war an entremez $[x_1, x_k]$. Desellomp ar grommenn o terc'hennañ ar gevreizhenn $g$. Trommgreiz $G$ ar poentoù $M_i$ — o daveennoù $x_i$ hag $y_i = g(x_i)$ — deverket dezho ar gwezhiaderioù $f_i$ zo e zaveennoù :

$$\begin{aligned} x_G &= \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \overline{x} \\ y_G &= \sum_{i=1}^{k} f_i y_i = \sum_{i=1}^{k} f_i g(x_i) = g(M_g) = \overline{y}. \end{aligned}$$

Alese desteriadur kevregat ar $g$-keitad : $M_g$ zo ledenn ar poent eus ar grommenn $y = g(x)$ a zo an hedenn anezhañ par da hini an trommgreiz $G$.




Mar bevenner ar studienn d'ar c'hevreizhennoù unton $g$ — an div ziarroudenn gentañ $g'$ ha $g''$ o vezañ kenarouez — e c'haller savelañ un dibarder hollek etre ar $g$-keitad hag ar c'heitad. E gwir, o vezañ m'emañ an trommgreiz en argev ar grommenn dre ret, ar $g$-keitad zo brasoc'h eget ar c'heitad mard eo kenarouez $g'$ ha $g''$, bihanoc'h eget ar c'heitad mard eo gourzharouez $g'$ ha $g''$, par d'ar c'heitad mard eo linennek ar gevreizhenn $g$ (mannel eo $g''$) pe c'hoazh mard eo par an holl wehanadoù $x_i$.

**SKOUER** — *Keitad mentoniel* a reer eus ar c'hementad savelet dre :

$$G = x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \cdots \times x_k^{f_k} = \sqrt[N]{x_1^{n_1} \times x_2^{n_2} \times \cdots \times x_k^{n_k}},$$

ar gwehanadoù $x_i$ o vezañ muiel evel reizh.

Al log-keitad eo ar c'heitad mentoniel, rak :

$$\ln G = \sum_{i=1}^{k} f_i \ln x_i.$$

Hogen ar gevreizhenn :

$$g(x) = \ln x$$

zo dezhi da ziarroudenn gentañ hag eil :

$$g'(x) = \frac{1}{x} > 0$$
$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Da neuze ez eo ar c'heitad mentoniel bihanoc'h eget ar c'heitad niveroniel. Ned eo par dezhañ nemet mard eo par an holl wehanadoù kenetrezo.

#### 13.1.4.2 Keitad a'n urzh $r$

Ar c'heitad eus an urzh $r$ zo ar $g$-keitad o klotañ gant ar gevreizhenn $r$-vac'hañ :

$$g(x) = x^r.$$

Setu enta ar riñvenn :

$$\mathcal{M} = \left[\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^r\right]^{1/r}.$$

Ned eo savelet ar c'heitad eus an urzh $r$ evit nep gwerzhad eus $r$ nemet mard eo muiel an holl wehanadoù, pezh a vo e gouzispleg amañ da heul. Brasoc'h eo eget ar c'heitad $\overline{x}$ pa vez $r > 1$, par da $\overline{x}$ pa vez $x = 1$, bihanoc'h eget $\overline{x}$ pa vez $r < 1$. Rak :

$$g'(x) = rx^{r-1}$$
$$g''(x) = r(r-1)x^{r-2}.$$

Alese :

$$g'(x)g''(x) = r^2(r-1)x^{2r-3}.$$

Neuze ez eo al liesâd $g' \cdot g''$ kenarouez gant $r - 1$ ha da heul :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{M}_r > \overline{x} & \text{mar} & r > 1 & \\ \mathcal{M}_r = \overline{x} & \text{mar} & r = 1 & \text{pe mard eo par ar gwehanadoù } x_i \\ \mathcal{M}_r < \overline{x} & \text{mar} & r < 1. & \end{array}$$

**SKOUER** — *Keitad pervalel* $Q$ ha *keitad kemblac'hek* $H$ a reer a-getep eus ar c'heitadoù a'n urzh 2 hag a'n urzh -1 :

$$\begin{aligned} Q &= \mathcal{M}_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2} > \overline{x} \\ H &= \mathcal{M}_{-1} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i \frac{1}{x_i}} < \overline{x}. \end{aligned}$$

Ar c'heitad niveroniel $\overline{x}$ zo gavaelet etre ar c'heitad kemblac'hek hag ar c'heitad pervalel.

Diskouezomp e c'hoari ar c'heitad mentoniel $G$ roll ar c'heitad a'n urzh mann. Savelet eo ar c'heitad a'n urzh $\varepsilon$ dre :

$$(\mathcal{M}_\varepsilon)^\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^\varepsilon,$$

pe c'hoazh :

$$\frac{(\mathcal{M}_\varepsilon)^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{k} f_i \left( \frac{x_i^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right).$$

Hogen, pa denn $\varepsilon$ war-du mann :

$$\frac{a^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \to \ln a.$$

Da heul, pa lakaer $\varepsilon$ da dennañ etrezek mann, $\mathcal{M}_\varepsilon$ a denn etrezek $\mathcal{M}_0$ (rak $\mathcal{M}_\varepsilon$ zo ur gevreizhenn gendalc'hek da $\varepsilon$), a vast d'an daveadur :

$$\ln \mathcal{M}_0 = \sum_{i=1}^{k} f_i \ln x_i,$$

pe :

$$\mathcal{M}_0 = x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \cdots \times x_k^{f_k} = G.$$

E se e c'hoari ar c'heitad mentoniel $G$ roll ar c'heitad a'n urzh mann.

• **Dibarder etre keitad mentoniel ha keitad kemblac'hek** — Dienaomp ez eo ar c'heitad mentoniel $G$ brasoc'h eget ar c'heitad kemblac'hek $H$. Desellomp an treuzfurmadur $Z = 1/X$. Ereet eo keitadoù $X$ ha $Z$ dre :

$$G_X = \frac{1}{G_Z}, \quad H_X = \frac{1}{\overline{z}}\,.$$

Hogen ar c'heitad $\overline{z}$ zo brasoc'h eget ar c'heitad mentoniel $G_Z$. Da neuze :

$$\overline{z} = \frac{1}{H_X} > G_Z = \frac{1}{G_X}.$$

A se an dibarder :

$$G_X > H_X.$$

Ar c'heitad mentoniel zo brasoc'h eget ar c'heitad kemblac'hek. N'int par nemet mar bez par ar gwerzhadoù $x_i$ kenetrezo.

• **Dibarder etre keitadoù a'n urzh $\boldsymbol{r}$** — Diskouezomp ez eo ar c'heitad a'n urzh $r$ ur gevreizhenn war gresk da $r$.

Bezet $\mathcal{M}_a$ ha $\mathcal{M}_b$ ar c'heitadoù a'n urzh $a$ ha $b$.

Goulakaomp ez eo $a < b$ ha dodomp : $Y = X^a$. A se e teu :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_a(X) &= \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^a\right)^{1/a} &= \left(\sum_{i=1}^{k} f_i y_i\right)^{1/a} &= (\overline{y})^{1/a}, \\
\mathcal{M}_b(X) &= \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^b\right)^{1/b} &= \left(\sum_{i=1}^{k} f_i y_i^{b/a}\right)^{1/b} &= \left[\mathcal{M}_{b/a}(Y)\right]^{1/a}.
\end{aligned}$$

Hogen evit $a$ diforzh, muiel pe leiel, ez eus eus an dibarder :

$$(\overline{y})^{1/a} < \left[\mathcal{M}_{b/a}(Y)\right]^{1/a}.$$

E gwir, mard eo muiel $a$, $b/a$ zo brasoc'h eget 1 hag ar c'heitad niveroniel $\overline{y}$ zo bihanoc'h eget ar c'heitad a'n urzh $b/a$ ; sevel d'ar mac'h muiel $1/a$ ne ra ket d'an dibarder eilpennañ. Mard eo leiel $a$ ez eo $b/a$ bihanoc'h eget 1 ha brasoc'h eo ar c'heitad niveroniel $\overline{y}$ eget ar c'heitad a'n urzh $b/a$, hogen sevel d'ar mac'h leiel $1/a$ a eilpenn an dibarder.

Da heul ez eo keitad $X$ a'n urzh $a$ bihanoc'h eget keitad $X$ a'n urzh $b$ :

$$\mathcal{M}_a(X) < \mathcal{M}_b(X) \quad \text{mar} \quad a < b.$$

Ned eo bezus ar parder nemet mar bez par ar gwerzhadoù $x_i$ kenetrezo.

A se ar steudad dibarderioù etre ar c'heitadoù kemblac'hek, mentoniel, niveroniel ha pervalel :

$$\boxed{H < G < \overline{x} < Q}.$$

Parder daou eus ar c'heitadoù a empleg ez int holl par, ha par eo ivez an holl werzhadoù $x_i$ kenetrezo.

Pa argemm $r$ eus $-\infty$ da $+\infty$ e c'haller diskouez ez argemm ar c'heitad a'n urzh $r$ ent kendalc'hek eus $x_1$ da $x_k$. Alese, nep gwerzhad gavaelet etre ar gwerzhadoù eizhañ $x_1$ hag $x_k$ zo ur c'heitad a'n urzh $r$ dibarek.

## 13.2 NAOUUSTERIOÙ STREWADUR

Bezet un heuliad stadegel dezhañ ar gwehanadoù $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ gant an aliestedoù ketep $f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_k$ hag ar reveziadoù $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, nk$. ha bezet $N$ ar reveziad hollel.

### 13.2.1 Strewant

#### 13.2.1.1 Jedadur pleustrek

Tremen a reer dre hantererezh an *hebiant* :

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2} \qquad \text{pe} \qquad \boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2}.$$

Ar strewant — a zo keitad pervalel ar forc'hadoù diouzh ar c'heitad, anvet c'hoazh *forc'had rizh*, pa'z eo ur forc'had diouzh ar c'heitad (niveroniel) o tezverkañ rizh an dasparzh — zo daouvonad an hebiant :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2}} \qquad \text{pe} \qquad \boxed{\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i(f_i - \overline{x})^2}}.$$

#### 13.2.1.2 Delakadenn König

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 \qquad \text{pe} \qquad V(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{x}^2.$$

EVEZHIADENN — E degouezh ur stadekadur kendalc'hek ned eo ket arveradus reollun despizadur an hebiant $\sigma^2$, pa na anavezer ket an holl werzhadoù $x_i$, hogen o niver $n_i$ e pep rumm hepken. Kendivizout a reer deverkañ an $n_i$ unvez a'r rumm $i$ d'e greiz $c_i$ ha da jediñ strewant an heuliad amparet gant an daouac'hoù $(c_i, n_i)$. An arnesadur-se a gresk un tammig an hebiant — hag ar strewant da heul —, hogen seul voanoc'h an troc'hadoù seul vihanoc'h ar fazi.

#### 13.2.1.3 Kemm orin ha skeul

Bezet $x_0$ ledenn an orin nevez $O'$ ha $h$ an unanenn nevez (al liesañ heled goulakaet keit ha keit ar rummoù). Ar werzhad nevez a jeder :

$$u_i = \frac{x_i - x_0}{h} \qquad \text{a se} \qquad x_i = x_0 + hu_i.$$

Mar noter a-getep keitad $x_i$ hag $u_i$ dre $\overline{x}$ hag $\overline{u}$ :

$$\overline{x} = x_0 + h\overline{u}.$$

An hebiant a skriver :

$$\sigma^2 = \sum f_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum f_i(x_0 + hu_i - x_0 - h\overline{u})^2 = h^2 \sum f_i(u_i - \overline{u})^2 = h^2 {\sigma'}^2,$$

mar noter $\sigma'$ strewant an $u_i$-où.

E se :

$$\boxed{\sigma^2 = h^2\sigma'^2}, \qquad \text{a se} \qquad \boxed{\sigma = h\sigma'}\,.$$

Er jedadurioù diaes e tremener dre $\sigma'^2$ dre zedalvout reollun König. A se :

$$\sigma^2 = h^2\left[\sum f_i u_i^2 - \overline{u}^2\right] = h^2\left(\frac{1}{N}\sum n_i u_i^2 - \overline{u}^2\right).$$

**EVEZHIADENN** — Er steudadoù rummet ez erlec'hier ouzh an hebiant $\sigma^2$ an niver, anvet difazier Sheppard :

$$\sigma^2 - \frac{h^2}{12}$$

war-benn engwerc'hañ ar fazioù diwar dolpadur ar gwerzhadoù e kreiz pep rumm.

### 13.2.2 Gwezhiader strewadur

Ar c'heitad $\overline{x}$ hag ar strewant $\sigma$ zo dezho an un unanenn hag ar gwehanadoù $x_i$. Savelañ a reer ar *gwezhiader strewadur* — al liesañ evit gwerzhadoù muiel hepken — evel keñver ar strewant ouzh ar c'heitad :

$$GS = \frac{\sigma}{\overline{x}}\,.$$

Dizalc'h eo an niver anventadel-se diouzh an unanennoù dibabet, eleze anargemmat en ur c'hemm skeul. Alies en en dewerzher e dregantad.

## 13.3 NAOUUSTERIOÙ STREWADUR ALL

Ar c'hreizad evel an hebiant a c'hell bezañ hollekaet : ar pementrannerioù hag al lankadoù.

### 13.3.1 Ar pementrannerioù

Ar pementranner a'n urzh $\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ notet $x_\alpha$ zo gwrizienn an atalad :

$$F(x) = \alpha,$$

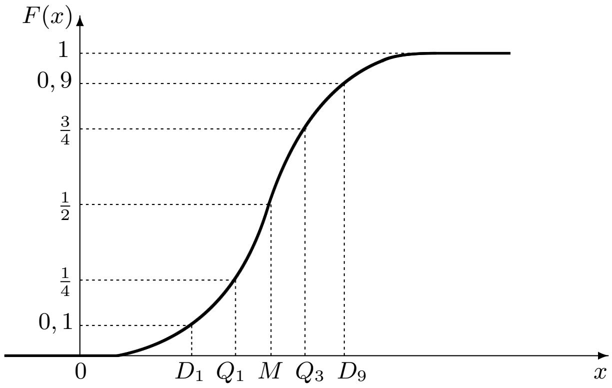
eleze, $F^{-1}$ o vezañ kevreizhenn geveskemm $F$ :

$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha).$$

Ur c'henfeur $\alpha$ eus an unvezioù stadegel zo dezho un doareenn $X$ bihanoc'h eget $x_\alpha$.

Arveret e vez alies ar perrannerioù $Q_1$ ha $Q_3$ : $Q_1$ zo ar pementranner eus an urzh $1/4$ ha $Q_3$ ar pementranner eus an urzh $3/4$. Ar c'hreizad a c'hoari roll an eil perranner $(\alpha = 1/2)$ : kreizad ha perrannerioù a rann ar boblañs e pevar reveziad par.

• **Saveladur ar pementrannerioù :**




Heñvel dra e saveler an *dekrannerioù* $(D_1, \ldots, D_9)$, ar *c'hantrannerioù*, ar *milrannerioù* . .

Evel ar c'hreizad e c'hounezer ar pementrannerioù war an daolenn stadegel diwar ar reveziadoù dassammet pe an aliestedoù dassammet.

Ar pementrannerioù a gevaraez erouezañ dasparzhioù diwar-bouez *gavaelioù*. Da skouer, an entremez etre ar perrannerioù $[Q_1, Q_3]$ zo ur gavael a zo ennañ

50 % eus ar boblañs, 25 % o vezañ a-gleiz hag 25 % a-zehou. Heñvel dra, an dekrannerioù eizhañ hag ar c'hantrannerioù eizhañ a savel gavaeloù enno a-getep 80 % ha 98 %. Lec'hed ar gavaeloù-se a ampar menegerioù strewadur.

An *ampled* zo an diforc'h etre brasañ ha bihanañ gwerzhad ar stadekadur :

$$w = x_k - x_1.$$

Arveret e vez evel meneger strewadur e reolerezh ar c'henderc'h er greanterezh. Kizidik kenan eo an ampled ouzh ar gwerzhadoù gwariat hag ouzh neuennadurioù ar standilhonañ, kalz muioc'h eget ar strewant. Hogen aes eo da jediñ, hep ma ve ret rummañ an holl arselladennoù.

### 13.3.2 Al lankadoù

#### 13.3.2.1 Despizadur

*Lankad a'n urzh* $r$ ($r$ kevan muiel) e-keñver ar werzhad $a$ a reer eus ar c'hementad :

$$_a m_r = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - a)^r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - a)^r.$$

Al lankad a'n urzh $r$ e-keñver $a$ zo keitad $r$-vac'hadoù an diforc'hioù $x_i - a$.

Dav notañ kement-mañ : mard eo hebar $r$, pe mard eo ampar $r$ ha war un dro $a$ bihanoc'h eget ar werzhad vihanañ $x_1$, al lankad a'n urzh $r$ e-keñver $a$ zo $r$-vac'had keitad a'n urzh $r$ ar forc'hadoù dizave $|x_i - a|$ :

$$_a m_r = \left[\mathcal{M}_r |X - a|\right]^r ,$$

eleze :

$$\sqrt[r]{_a m_r} = \mathcal{M}_r |X - a|.$$

Pa vez ampar $r$ e teu ar parder amañ diaraok da vezañ un dibarder mard eo $a$ brasoc'h eget ar werzhad vihanañ $x_1$ :

$$_a m_r = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - a)^r < \sum_{i=1}^{k} f_i |x_i - a|^r = \left[\mathcal{M}_r |X - a|\right]^r .$$

• **Dibarder etre al lankadoù** — A du 'rall, o vezañ ma'z eo ar c'heitad a'n urzh $r$ ur gevreizhenn kengresk da $r$, hon eus an dibarder etre al lankadoù, talvoudek evit nep $a$ :

$$\boxed{\sqrt[2p]{{}_am_{2p}} \geqslant \sqrt[r]{{}_am_r} \qquad \text{mar } 2p > r},$$

an dibarder-se o tont da vezañ ur parder nemet mar bez an holl werzhadoù $|x_i - a|$ par kenetrezo : pe ez eo an holl werzhadoù $x_i$ par kenetrezo (dasparzh skoanet) pe n'eus nemet div werzhad vezus kemparzhek e-keñver $a$.

Hervez gwerzhadoù $a$ e saveler lies seurt lankadoù :

1. Al lankadoù ankreizet, pe lankadoù e-keñver $a = 0$ :

$$m_r = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^r \, ;$$

2. Al lankadoù kreizet, pe lankadoù e-keñver ar c'heitad $a = \overline{x}$ :

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^r .$$

Al lankadoù kreizet hag ankreizet kentañ zo :

$$\begin{array}{lll} m_0 = 1 & & \mu_0 = 1 \\ m_1 = \overline{x} & & \mu_1 = 0 \\ m_2 = \sigma^2 + \overline{x}^2 & & \mu_2 = \sigma^2 . \end{array}$$

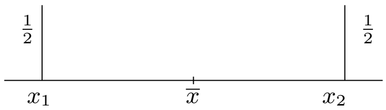
Mar dedalvezer an dibarder amañ diaraok d'al lankadoù kreizet hag ankreizet e teu :

$$\begin{array}{l} \sqrt[2]{m_2} \geqslant m_1, \quad \text{eleze} \quad m_2 - m_1^2 = \sigma^2 \geqslant 0 \\ \sqrt[4]{\mu_4} \geqslant \sqrt[2]{\mu_2} \geqslant \mu_1, \quad \text{eleze} \quad \mu_4 \geqslant \sigma^4 \geqslant 0, \end{array}$$

an dibarderioù-se o tont da vezañ parderioù pa vez par ar gwerzhadoù $x_i$ kenetrezo : neuze ez eo mannel $\mu_4$ ha $\sigma$.

Teurel evezh ez eo mannel al lankadoù kreizet a urzh ampar mard eo kemparzhek dasparzh an gwehanadur stadegel.

**EVEZHIADENN** — Bez' ez eus un degouezh dibarek ma'z eo al lankad $\mu_4$ par da garrez al lankad $\mu_2$ hep ma ve skoanet ar stadekadur : pa vez par ar gwerzhadoù $|x_i - \overline{x}|$, eleze pa n'eus nemet div werzhad vezus dezho aliestedoù par da $1/2$ :




Neuze ez eus :

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 \\ \mu_4 &= \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^4 = \mu_2^2.\end{aligned}$$

E-maez degouezh ar skoanadur (par eo an holl wehanadoù) hag an dasparzh nemedennek-se ez eus atav :

$$\mu_4 > \mu_2^2.$$

#### 13.3.2.2 Daveadurioù etre al lankadoù kreizet hag ankreizet

Dre zispakañ an daveadurioù despizañ dre reollun binom Newton :

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - m_1)^r$$

$$m_r = \sum_{i=1}^{k} f_i \left[(x_i - m_1) + m_1\right]^r ,$$

e c'hounezer an daveadurioù etre al lankadoù kreizet hag ankreizet :

$$\begin{aligned}
\mu_r &= \sum_{i=1}^{k} \left\{ f_i \sum_{\alpha=0}^{r} \left[ (-1)^\alpha \binom{r}{\alpha} m_1^\alpha x_i^{r-\alpha} \right] \right\} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{r} \left[ (-1)^\alpha \binom{r}{\alpha} m_1^\alpha \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^{r-\alpha} \right] \\
&= \sum_{\alpha=0}^{r-2} (-1)^\alpha \binom{r}{\alpha} m_{r-\alpha} m_1^\alpha + (-1)^{r-1}(r-1) m_1^r.
\end{aligned}$$

ha heñvel dra :

$$\begin{aligned}
m_r &= \sum_{i=1}^{k} \left\{ f_i \sum_{\alpha=0}^{r} \left[ \binom{r}{\alpha} m_1^\alpha (x_i - m_1)^{r-\alpha} \right] \right\} \\
&= \sum_{\alpha=0}^{r} \left[ \binom{r}{\alpha} m_1^\alpha \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - m_1)^{r-\alpha} \right] \\
&= \sum_{\alpha=0}^{r-2} \binom{r}{\alpha} \mu_{r-\alpha} m_1^\alpha + m_1^r.
\end{aligned}$$

E se, evit $r = 2, 3, 4$ e teu :

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= m_2 - m_1^2 \qquad \text{delakadenn König} \\
\mu_3 &= m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 \\
\mu_4 &= m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4
\end{aligned}$$

hag a-c'hin :

$$\begin{aligned}
m_2 &= \mu_2 + m_1^2 \qquad \text{delakadenn König} \\
m_3 &= \mu_3 + 3\mu_2 m_1 + m_1^3 \\
m_4 &= \mu_4 + 4\mu_3 m_1 + 6\mu_2 m_1^2 + m_1^4.
\end{aligned}$$

Ar c'hentañ steudad daveadurioù a gevaraez jediñ lankadoù kreizet ur stadekadur $X$ evel henn :

1. da gentañ e jeder lankadoù ankreizet ar stadekadur $X'$ bet diwar $X$ dre gemm orin $x_0$ ha kemm skeul $a$ :
$$m'_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i'^r$$
gant
$$x'_i = (x_i - x_0)/a;$$

2. eus al lankadoù ankreizet $m'_r$ e tenner lankadoù kreizet $\mu'_r$ ar stadekadur $X'$ war-bouez an daveadurioù amañ diaraok ;

3. a-benn ar fin e tenner lankadoù kreizet $\mu_r$ ar stadekadur $X$ diwar lankadoù kreizet $\mu'_r$ ar stadekadur $X'$ dre ar reollun :
$$\mu_r = a^r \mu'_r.$$

#### 13.3.2.3 Lankadoù dasperiadel

*Lankad dasperiadel a'n urzh* $r$ a reer eus ar c'hementad :
$$\mu_{[r]} = \sum_{i=1}^{k} f_i\left[(x_i)(x_i-1)\ldots(x_i-r+1)\right].$$

An naouuster-mañ a arverer dreist holl e degouezh stadekadurioù arskarek dezho gwerzhadoù kevan muiel :
$$x_i = 0, 1, \ldots, k$$
$$\mu_{[r]} = \sum_{i=0}^{k} f_i\left[i(i-1)\ldots(i-r+1)\right] = \sum_{i=r}^{k} f_i\left[i(i-1)\ldots(i-r+1)\right],$$

pa'z eo mannel an $r$ termen kentañ. Skrivañ a c'haller ivez :
$$\mu_{[r]} = \sum_{i=r}^{k} f_i \frac{i!}{(i-r)!}.$$

Splet al lankadoù dasperiadel zo an aes eo o jediñ e degouezh gwehanadurioù damkanel 'zo : gwehanadur binomel, gourmentoniel, Poisson, Pascal. .

Pa anavezer al lankadoù dasperiadel kentañ e c'haller dezren al lankadoù ankreizet ha da heul ar re greizet.

E gwir :

$$\mu_{[1]} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \overline{x}$$

$$\mu_{[2]} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i (x_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = m_2 - m_1$$

ha heñvel dra :

$$\mu_{[3]} = m_3 - 3m_2 + 2m_1$$

$$\mu_{[4]} = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1.$$

Dre duginañ an daveadurioù e c'hounezer al lankadoù ankreizet :

$$\overline{x} = \mu_{[1]}$$

$$m_2 = \mu_{[2]} + \mu_{[1]}$$

$$m_3 = \mu_{[3]} + 3\mu_{[2]} + \mu_{[1]}$$

$$m_4 = \mu_{[4]} + 6\mu_{[3]} + 7\mu_{[2]} + \mu_{[1]}$$

ha bennozh d'an daveadurioù savelet e **13.3.2.2** e c'hounezer al lankadoù kreizet.

## 13.4 NAOUUSTERIOÙ STUMM

Ouzhpenn an tued kreizel hag ar strewadur e c'haller klask naouusteriñ stumm un dasparzh war-bouez ur feuriader. Feuriaderioù $\gamma_1$ ha $\gamma_2$ Fisher zo muzulioù ankemparzhder ha tuzumder un dasparzh.

### 13.4.1 Gwezhiader ankemparzhder

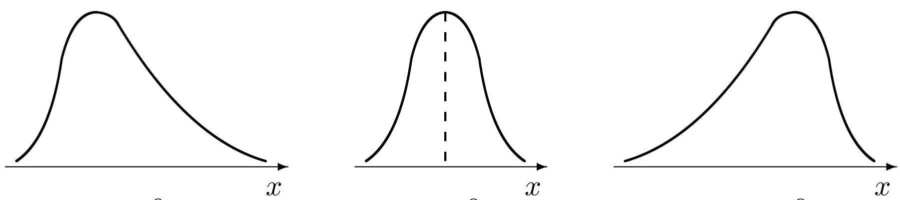
Mard eo kemparzhek un dasparzh ez eo mannel e lankadoù kreizet a'n urzhioù ampar. O tiazezañ war ar c'hentañ lankad a urzh ampar $\mu_3$ (pa'z eo bepred mannel $\mu_1$ dre zespizadur) en deus kinniget Fisher ar gwezhiader ankemparzhder :

$$\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3 = \mu_3/\mu_2^{3/2}.$$

Anventadel eo ar gwezhiader-se, anargemmat en ur c'hemm orin ha skeul, ha mannel evit an dasparzhioù kemparzhek.

Mard eo unvodel an dasparzh ez eo muiel ar gwezhiader $\gamma_1$ pa vez strewetoc'h an dasparzh war an tu dehou (an degouezh paotañ) ha leiel en degouezh kontrol.

Amañ dindan arouez ar gwezhiader ankemparzhder a-geñver gant stumm ar grommenn dasparzh :




$\gamma_1 > 0$ $\quad\quad$ $\gamma_1 = 0$ $\quad\quad$ $\gamma_1 < 0$

Da feuriader ankemparzhder ez arverer ivez ar c'heñver :

$$d = \frac{Q_1 + Q_3 - 2M}{2M},$$

ma'z eo $Q_1$ ha $Q_3$ ar perrannerioù ha $M$ ar c'hreizad. E degouezh dasparzhioù unvodel, $\gamma_1$ ha $d$ zo kenarouez ha mannel, pa vez kemparzhek an dasparzh.

### 13.4.2 Gwezhiader tuzumder

Gwezhiader tuzumder Fisher zo :

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3.$$

Ur gwezhiader anventadel eo, anargemmat en ur c'hemm orin ha skeul. Dibabet eo an arstalenn 3 e seurt doare ma ve mannel ar gwezhiader pa vez reol an dasparzh.

Muiel eo $\gamma_2$ ma n'eo ket an dasparzh ken tuzum hag an dasparzh reol (a un keitad hag a un strewant) ha leiel en degouezh kontrol.

Dre berzh an dibarder :

$$\mu_4 \geqslant \sigma^4,$$

ar gwezhiader tuzumder zo bepred brasoc'h eget -2. Ned eo par da -2 nemet mard eo par kenetrezo an holl wehanadoù pe ma n'eus nemet div werzhad vezus, dezho aliestedoù par.

## 13.5 NAOUUSTERIOÙ AR MESKADOÙ POBLAÑSOÙ

Alies e studier er Stadegouriezh deskrivañ dasparzh un doareenn e meur a boblañs damheñvel (da skouer : dasparzh ar c'horvoderioù evit lies rumm kevredadel, dasparzh ar c'hengreadurioù evit embregerezhioù evit lies skourr oberezh, h.a.). Studiet e vo amañ naouusterioù savlec'h ha dasparzh ur boblañs a zo meskad lies ispoblañs.

Bezet ur boblañs $P$ amparet gant ispoblañsoù $P_1, \ldots, P_m$ o reveziadoù ketep $n_1, \ldots, n_m$. Reveziad hollel ar meskad zo neuze :

$$n = n_1 + \cdots + n_m = \sum_{h=1}^{m} n_h.$$

Bezet $x_1, \ldots, x_k$ gwerzhadoù bezus ur stadekadur $X$ (goulakaet arskarek warbenn aesaat an displeg), arsellet er boblañs $P$. Anat eo e c'hell gwerzhadoù $x_i$ 'zo bezañ ezveziat e ispoblañsoù 'zo. Mannel e vo ar reveziat keñverek enta.

Ent hollek, bezet $n_{ih}$ niver an unvezioù dezho ar werzhad $x_i$ eus $X$ en ispoblañs $P_h$. Er boblañs $P$ ez eo ar reveziad o klotañ ouzh ar werzhad $x_i$ :

$$n_{i\bullet} = n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{im} = \sum_{h=1}^{m} n_{ih}.$$

| $X$ \ $P$ | $P_1$ | $\dots$ | $P_h$ | $\dots$ | $P_m$ | Holladoù |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $n_{11}$ | $\dots$ | $n_{1h}$ | $\dots$ | $n_{1m}$ | $n_{1\bullet}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $x_i$ | $n_{i1}$ | $\dots$ | $n_{ih}$ | $\dots$ | $n_{im}$ | $n_{i\bullet}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $x_k$ | $n_{k1}$ | $\dots$ | $n_{kh}$ | $\dots$ | $n_{km}$ | $n_{k\bullet}$ |
| Holladoù | $n_1$ | $\dots$ | $n_h$ | $\dots$ | $n_m$ | $N$ |

### 13.5.1 Kevregad orgemmel

O vezañ ma'z eo jedet ar reveziad $n_{i\bullet}$ dre sammata ar reveziadoù $n_{ih}$, an aliested $f_i$ zo par da :

$$f_i = \frac{1}{n} \times n_{i\bullet} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{m} n_h f_{ih}.$$

Bezet $p_1, p_2, \dots, p_h, \dots, p_m$ ar c'henfeurioù o tespizañ kenaoz ar meskad :

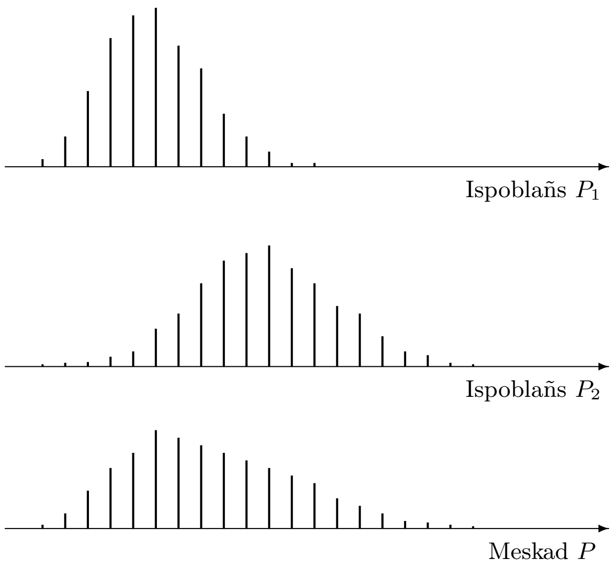
$$p_h = \frac{n_h}{n}.$$

An aliested $f_i$ a c'haller rezhiennañ entra dre :

$$f_i = \sum_{h=1}^{m} p_h f_{ih}.$$

E se ez eo an aliestedoù a-geñver gant ar meskad keitadoù an aliestedoù o klotañ ouzh pep hini eus an ispoblañsoù *daspouezet gant kenfeurioù ar meskad.*

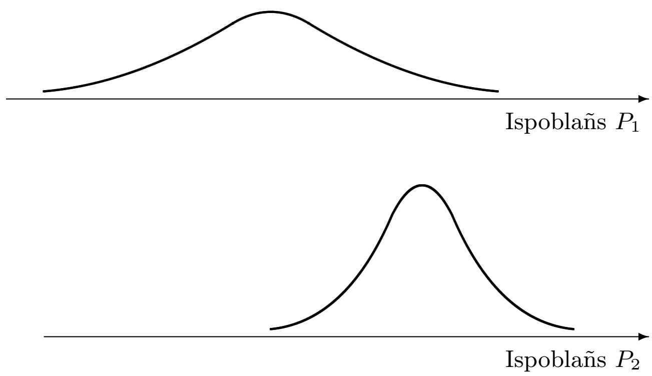
An disoc'h zo hemañ : mard eo arskarek ar stadekadur $X$, ar vazh o klotañ ouzh ar werzhad $x_i$ zo keitad daspouezet bizhier keñverek pep hini eus an ispoblañsoù.

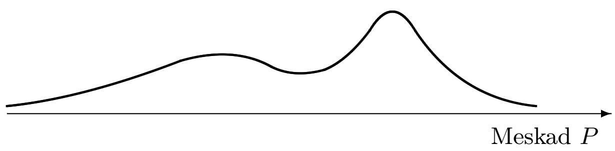



E degouezh stadekadurioù kendalc'hek studiet hervez an hevelep dastroc'h e rummoù e c'hounezer disoc'hoù heñvel :

$$\varphi_i = \frac{f_i}{a_i} = \sum_{h=1}^{m} p_h \frac{f_{ih}}{a_i} = \sum_{h=1}^{m} p_h \varphi_{ih}.$$

Sav ar reizhkorneg o klotañ ouzh ar rumm niverenn $i$ zo keitad daspouezet savioù keñverek an ispoblañsoù.






Tellun ur meskad

### 13.5.2 Kevreizhenn dassammañ

Bezet $F_1(x), \ldots, F_m(x)$ kevreizhennoù dassammañ ar stadekadur $X$ o klotañ ouzh pep hini eus an ispoblañsoù ha $F(x)$ kevreizhenn dassammañ ar meskad $P$. Niver an unvezioù stadegel $nF(x)$ — a zo gwerzhad an doareenn bihanoc'h eget $x$ — zo par da sammad niveroù an unvezioù keñverek e pep hini eus an ispoblañsoù :

$$nF(x) = n_1 F_1(x) + \cdots + n_m F_m(x) = \sum_{h=1}^{m} n_h F_h(x).$$

Alese :

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{m} n_h F_h(x).$$

A-gevreizh d'ar c'henfeurioù o tespizañ kenaoz ar meskad $p_1, \ldots, p_m$ e rezhienner ar gevreizhenn dassammañ evel-henn :

$$\boxed{F(x) = \sum_{h=1}^{m} p_h F_h(x)}.$$

E se ez eo ar gevreizhenn dassammañ o klotañ ouzh ar meskad *keitad dassammet* ar c'hevreizhennoù dassammañ dre genfeurioù ar meskad.

### 13.5.3 Kreizad

Goulakaomp ez eo niverennet an ispoblañsoù dre ar meneg $h$ hervez urzh war gresk o c'hreizad $M_h$ :

$$M_1 \leqslant M_2 \leqslant \cdots \leqslant M_h \leqslant \cdots \leqslant M_m.$$

Kreizad $M$ ar meskad $P$ zo gwriziennn an atalad :

$$F(M) = \frac{1}{2}.$$

Diskouezomp ez eo gavaelet ar c'hreizad $M$ etre ar c'hreizadoù eizhañ $M_1$ ha $M_m$.

Par eo ar gevreizhenn dassammañ da :

$$F(x) = \sum_{h=1}^{m} p_h F_h(x).$$

Hogen ar c'hevreizhennoù $F_h(x)$ zo angingresk. Neuze an dibarder :

$$M_1 \leqslant M_h \qquad h = 2, \ldots, m$$

a empleg an dibarder :

$$F_h(M_1) \leqslant F_h(M_h) = \frac{1}{2} \qquad h = 2, \ldots, m.$$

Da heul :

$$F(M_1) = \sum_{h=1}^{m} p_h F_h(M_1) \leqslant \sum_{h=1}^{m} p_h \times 1/2 = 1/2 = F(M)$$

hag o vezañ ma'z eo angingresk ar gevreizhenn $F(x)$ :

$$M_1 \leqslant M.$$

Heñvel dra e c'haller diskouez ez eo $M$ bihanoc'h pe bar ouzh $M_m$. E gwir, an dibarder :

$$M_m \geqslant M_h \qquad h = 1, 2, \ldots, m-1$$

a empleg an dibarder :

$$F_h(M_m) \geqslant F_h(M_h) = 1/2 \qquad h = 1, 2, \ldots, m-1.$$

A se :

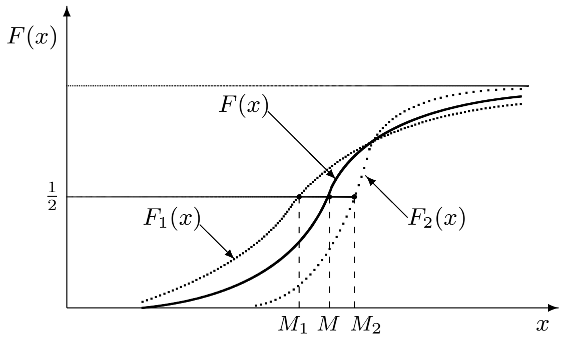
$$F(M_m) = \sum_{h=1}^{m} p_h F_h(M_m) \geqslant \sum_{h=1}^{m} p_h \times 1/2 = 1/2 = F(M)$$

ha da heul :

$$M_m \geqslant M.$$

E se, en un doare hollek, kreizad $M$ ur meskad zo gavaelet etre ar c'hreizadoù eizhañ :

$$\inf_h(M_h) \leqslant M \leqslant \sup_h(M_h).$$




Kreizad ur meskad

Dav notañ ivez n'emañ ket kreizad ur meskad e dalc'h ar c'hreizadoù $M_h$ hepken hag ar c'henfeurioù $p_h$, hogen emañ ivez e dalc'h stumm ar c'hevreizhennoù dassammañ $F_h(x)$.

### 13.5.4 Keitad

Keitadoù $\overline{x}_h$ an ispoblañsoù $P_h$ a rezhienner evel henn :

$$\overline{x}_h = \sum_{i=1}^{h} f_{ih} x_i$$

ha keitad $\overline{x}$ ar meskad $P$ :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{h} f_i x_i.$$

Hogen an aliestedoù $f_i$ zo keitadoù daspouezet an aliestedoù keñverek $f_{ih}$ :

$$f_i = \sum_{h=1}^{m} p_h f_{ih}.$$

Alese an daveadur etre ar c'heitad $\overline{x}$ hag ar c'heitadoù $\overline{x}_h$ :

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \left[ \sum_{h=1}^{m} p_h f_{ih} \right] x_i = \sum_{h=1}^{m} p_h \left[ \sum_{i=1}^{k} f_{ih} x_i \right] = \sum_{h=1}^{m} p_h \overline{x}_h,$$

Bezet :

$$\boxed{\overline{x} = \sum_{h=1}^{m} p_h \overline{x}_h}.$$

E se, keitad ar meskad zo keitad ar c'heitadoù daspouezet dre genfeurioù ar meskad. Ent dibarek e tenner diwar se — evel degouezh ar c'hreizad — ez eo gavaelet keitad ar meskad etre ar c'heitadoù eizhañ. E kemm ouzh ar c'hreizad neoazh, ar c'heitad $\overline{x}$ zo e dalc'h ar c'heitadoù $\overline{x}_h$ (ar c'hedrannoù) ha kenfeurioù ar meskad $p_h$.

### 13.5.5 Hebiant

Hebiantoù $\sigma_h^2$ an ispoblañsoù $P_h$ a rezhienner :

$$\sigma_h^2 = \sum_{i=1}^{k} f_{ih} (x_i - \overline{x}_h)^2,$$

pe c'hoazh, dre arverañ delakadenn König :

$$\sigma_h^2 = \sum_{i=1}^{k} f_{ih} (x_i - \overline{x})^2 - (\overline{x}_h - \overline{x})^2,$$

ma'z eo $\overline{x}$ keitad ar meskad.

An hebiant $\sigma^2$ er meskad $P$ zo :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2.$$

Dre zougen er riñvenn-se gwerzh $f_i$ a-gevreizh d'an $f_{ih}$-où :

$$f_i = \sum_{h=1}^{m} p_h f_{ih},$$

e teu :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[ \sum_{h=1}^{m} p_h f_{ih} \right] (x_i - \overline{x})^2 \\
&= \sum_{h=1}^{m} p_h \left[ \sum_{i=1}^{k} f_{ih}(x_i - \overline{x})^2 \right] = \sum_{h=1}^{m} p_h \left[ \sigma_h^2 + (\overline{x}_h - \overline{x})^2 \right]
\end{aligned}$$

bezet :

$$\boxed{\sigma^2 = \sum_{h=1}^{m} p_h \sigma_h^2 + \sum_{h=1}^{m} (\overline{x}_h - \overline{x})^2}.$$

Eil termen an eil kazel a zerc'henn *hebiant* ar c'heitadoù $\overline{x}_h$, tra ma'z eo an termen kentañ keitad an hebiantoù.

| Hebiant ar meskad zo par da geitad an hebiantoù mui hebiant ar c'heitadoù. |
| --- |

Keitad an hebiantoù, anvet *hebiant enispoblañsel*, zo an hebiant $\sigma^2$ a ve jedet mar befe an un keitad d'an holl ispoblañsoù $P_h$. Hebiant ar c'heitadoù, anvet *hebiant etreispoblañsel*, zo an hebiant $\sigma^2$ a ve gounezet mar befe ungenezh an ispoblañsoù ($\sigma_h = 0$).

E se e tisoc'h dizungenezhded ur meskad diouzh div barenn : an dizungenezhdedoù diabarzh da bep ispoblañs hag an dizungenezhded etre keitadoù an ispoblañsoù.

Rann eus an hebiant hollel displeget dre berzh dizungenezhded ar c'heitadoù etreispoblañsel a reer eus ar c'heñver :

$$R^2 = \frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{m} p_h(\overline{x}_h - \overline{x})^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{m} p_h \sigma_h^2}{\sigma^2}.$$

Ar c'heñver-se zo gavaelet etre 0 hag 1. Par eo da 0 mard eo an ispoblañsoù a un keitad ha par da 1 mard eo ungenezh an ispoblañsoù (ungenezhded diabarzh). $R^2$ en deus ur roll a bouez e studi ar geflended (keñver keflended).

**POELLADENNOÙ**

**13.01** Desellout a reer an dasparzh stadegel roet en daolenn amañ dindan :

| Rummoù | ]40,45] | ]45,50] | ]50,55] | ]55,60] |
|---|---|---|---|---|
| Reveziadoù $n_i$ | 22 | 33 | 24 | 21 |

Savelañ keitad ha strewant ar steudad stadegel rummet.

**13.02** Bezet daou standilhon disparti $E$ hag $E'$ eus an un poblañs warni ur stadekadur $X$, $N$ ha $N'$ o reveziadoù ketep, $m$ ha $m'$ o c'heitadoù ketep. An daou standilhon a voder.

Pehini eo keitad $m''$ ar standilhon nevez ?

**13.03** Bezet ur stadekadur $X$ dezhañ ar gwerzhadoù $x_1, x_2, \ldots, x_k$ muiel, ma'z eo $k > 1$, gant an aliestedoù ketep $f_1, f_2, \ldots, f_k$. $g$ zo ur gevreizhenn gendalc'hek war $[x_1, x_2]$.

*a*) Mard eo $g$ argevek war-du an hedennoù leiel ha kendalc'hek strizh, dienaat an daveadur :

$$\overline{x} < M_g,$$

gant $\overline{x}$ ha $M_g$ o vezañ a-getep keitad niveroniel ha $g$-keitad ar steudad.

*b*) Studiañ an degouezhioù-mañ da heul :

$g$ zo argevek war-du an hedennoù muiel ha kendalc'hek strizh,

$g$ zo argevek war-du an hedennoù leiel ha gingresk strizh.

*c*) Dezren alese :

$$\overline{x} < Q, \quad \overline{x} > G, \quad \overline{x} > H,$$

$Q$, $G$ ha $H$ oc'h aroueziañ a-getep keitadoù pervalel, mentoniel ha kemblac'hek ar steudad.

*d*) Dre gemm stadekadur $\frac{1}{X} = Z$, dienaat $H < G$.

**13.04** Desellout a reer an dasparzh stadegel roet en daolenn amañ dindan :

| Rummoù | ]150,155] | ]155,160] | ]160,165] | ]1655,170] |
|---|---|---|---|---|
| Reveziadoù $n_i$ | 30 | 25 | 23 | 22 |

Jediñ keitad ha strewant an dasparzh-se.

**13.05** Bezet daou standilhon disparti $E$ hag $E'$ eus ur boblañs warni ur stadekadur. Bezet a-getep : $N$ ha $N'$ ar reveziadoù ; $m$, $m'$ ha $m''$ keitadoù $E$, $E'$ hag $E \cup E'$ ; $\sigma^2$, ${\sigma'}^2$ ha ${\sigma''}^2$ an hebiantoù.

Kounañ :

$$m'' = \frac{Nm + N'm'}{N + N'} .$$

Diskouez :

$${\sigma''}^2 = \frac{N\sigma^2 + N'{\sigma'}^2}{N + N'} + \frac{NN'(m - m')^2}{(N + N')^2}.$$

**13.06** Bezet un heuliad stadegel $(x_1, f_1), (x_2, f_2), \ldots, (x_k, f_3), \ldots, (x_k, f_k)$.

Desellout a reer ar gevreizhenn $h$ savelet dre :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad h(a) = \sum_{k=1}^{k} (x_k - a) f_k.$$

Diskouez ez eo izek ar gevreizhenn-se pa vez $a$ kreizad ar steudad.

**13.07** Desellout a reer un heuliad stadegel 60 gwadvec'h hemoglobin (g/l) gant oadourion vonan. Renket eo an heuliad dre werzhadoù angingresk ; ur sterenn a-dreñv ur werzhad a ziskouez eo bet muzuliet ar bec'h e gwad ur vaouez :

105* ; 110* ; 112* ; 112* ; 118* ; 119* ; 120* ; 120* ; 125* ; 126* ; 127* ; 128* ; 130* ; 132* ; 133* ; 134* ; 135* ; 138* ; 138* ; 138* ; 138* ; 141 ; 142* ; 144 ; 145* ; 146 ; 148* ; 148* ; 148 ; 149 ; 150* ; 150 ; 150 ; 151* ; 151 ; 153 ; 153 ; 153 ; 154* ; 154* ; 154 ; 155 ; 156 ; 156 ; 158* ; 160 ; 160 ; 160 ; 163 ; 164 ; 164 ; 165 ; 166 ; 168 ; 168 ; 170 ; 172 ; 172 ; 176 ; 179.

**Disoc'hoù darnel**

$$\text{Paotred} \quad \sum_{i=1}^{30} x_{ip} = 4\,766 \text{ g/l} \qquad \sum_{i=1}^{30} x_{ip}^2 = 759\,954 \ (\text{g/l})^2$$

$$\text{Merc'hed} \quad \sum_{i=1}^{30} x_{im} = 3\,988 \text{ g/l} \qquad \sum_{i=1}^{30} x_{im}^2 = 536\,176 \ (\text{g/l})^2.$$

**Hollekadurioù ha kevregoù :**

*a*) Petore stlenn a c'haller tennañ, hep jedadur ebet, eus ar roadennoù ?

*b*) Desellout a reer ar rummoù :

]104; 114], ]114; 124], ]124; 134], ]134; 144], ]144; 154], ]154; 164], ]164; 174], ]174; 184].

Evit pep hini eus an daou heuliad : paotred ha merc'hed, savelañ reveziadoù pep rummad, an aliestedoù, an aliestedoù dassammet.

*c*) Kevregañ an daou zasparzh strollet e rummadoù.

**Arventennoù savlec'h :**

*d*) Jediñ keitadoù $\overline{x}$, $\overline{x_m}$, $\overline{x_p}$ an tri dasparzh roet en derou : hollad, merc'hed, paotred.

**Arventennoù strewadur :**

*e*) Jediñ ar forc'had etreperranner evit an tri dasparzh derou.

*f*) Jediñ hebiantoù ha strewantoù an tri dasparzh derou.

*g*) Jediñ hebiantoù ha strewantoù an tri dasparzh strollet e rummadoù. Evit pep rumm e vo kemeret ar c'hreiz anezhañ.

**Arventennoù stumm :**

*h*) Evit an tri dasparzh derou, jediñ al lankadoù $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$. Tennañ alese gwerzhadoù al lankadoù kreizet $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ ha goude gwezhiaderioù stumm $\gamma_1$ ha $\gamma_2$ Fisher.