12

Dasparzhioù stadegel unvent
Taolennoù stadegel, kevregoù

12.1 DASPARZH REVEZIADOÙ HAG ALIESTEDOÙ

12.1.1 Reveziad hollel

Reveziad hollel ur boblañs Ω a reer eus niver N elfennoù ar boblañs-se. Merzhout ivez ez eo niver k gwerzhadoù an doareenn bihanoc'h pe bar ouzh N.

12.1.2 Dasparzh reveziadoù

12.1.2.1 Reveziad darnel

Reveziad darnel n_i zo niver an unvezioù a zo gwerzhad an doareenn par da x_i. E-lec'h reveziad darnel e lavarer ivez *aliested dizave.* Anat eo ez eus :

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_i \cdots + n_k = N, \text{ eleze : } \boxed{\sum_{i=1}^{k} = N}.$$

12.1.2.2 Dasparzh reveziadoù

An arloadur a gevred ouzh pep gwerzhad x_i eus an doareenn he reveziad darnel n_i a reer *dasparzh reveziadoù* anezhañ :

$$\underset{\text{(gwerzhad)}}{x_i} \xmapsto{\text{(dasparzh)}} \underset{\text{(reveziad darnel)}}{n_i} .$$

An dasparzh reveziadoù a erouezer dindan stumm un daolenn stadegel, anvet ivez taolenn dasparzh.

SKOUERIOÙ :

1. **Stadekadur doareadel :**

Poblañs : levrioù ; doareenn : yezh. Dasparzh al levrioù a erouezer amañ dindan en daolenn stadegel :

yezhoù	Brezhoneg	Galleg	Saozneg	Hollad
Reveziadoù	80	100	60	240

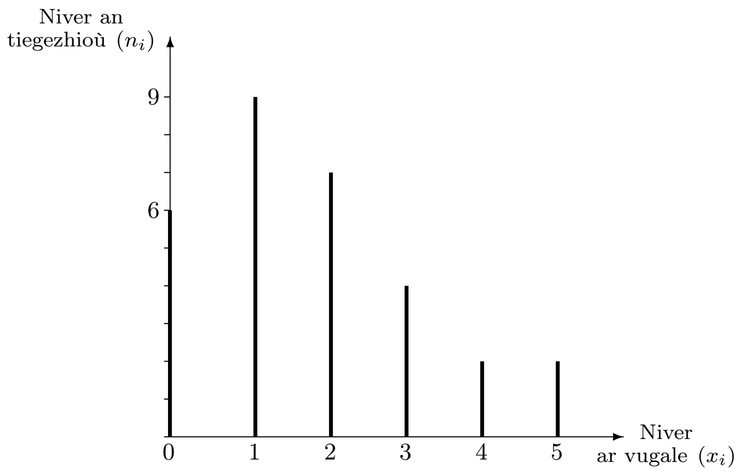
2. **Stadekadur kementadel :**

Poblañs : 30 tiegezh ur c'harter ; doareenn : niver ar vugale dre diegezh (x_i).

x_i	0	1	2	3	4	5 ha >	Hollad
n_i	6	9	7	4	2	2	30

12.1.2.3 Kevregad a-vizhier

Amañ dindan derc'hennadur kevregat ar skouer 2 :



Evit pep gwerzhad eus an doareenn e treser ur vazh a zo he sav kenfeuriek ouzh ar reveziad.

12.1.3 Dasparzh aliestedoù daveel

12.1.3.1 Aliested ur werzhad x_i a'n doareenn

An aliested daveel (alies e lavarer aliested hep spizañ an hogozenn daveel) zo ar c'heñver ar reveziad darnel n_i ouzh ar reveziad hollel N.

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{N}}.$$

PERZHIOÙ :

- Anat eo : $0 \leqslant n_i \leqslant N \Longrightarrow 0 \leqslant f_i \leqslant 1.$
- E teu ivez :

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} = 1 \Longrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{k} f_i = 1}.$$

- Dre liesaat an aliested dre gant e c'hounezer an *dregantad*. Neuze :

dregantad ar werzhad $x_i = f_i \times 100\%$.

12.1.3.2 Dasparzh aliestedoù

An arloadur a gevred ouzh pep gwerzhad x_i eus an doareenn he aliested f_i a reer *dasparzh aliestedoù* anezhañ :

$$\underset{\text{(gwerzhad)}}{x_i} \xmapsto{\text{(dasparzh)}} \underset{\text{(aliested)}}{f_i} \quad .$$

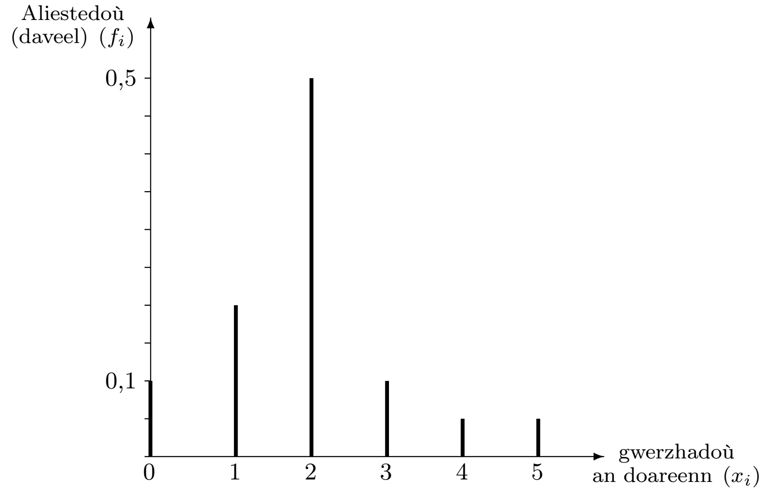
An dasparzh aliestedoù a erouezer dindan stumm un daolenn stadegel, anvet ivez taolenn dasparzh.

SKOUER :

x_i	0	1	2	3	4	5	Hollad
f_i	0,1	0,2	0,5	0,1	0,05	0,05	1

12.1.3.3 Kevregad a-vizhier

Amañ dindan an derc'hennadur kevregat o klotañ ouzh an daolenn stadegel :



Ar c'hevregad a-vizhier a zerc'henn an aliestedoù f_i o klotañ ouzh gwerzhadoù bezus x_i. O vezañ ma'z eo par sammad an aliestedoù d'an unanenn ez eo par sammad hirder ar bizhier da 1.

12.2 INGALADUR REVEZIADOÙ HAG ALIESTEDOÙ

12.2.1 Ingaladur reveziadoù

12.2.1.1 Reveziadoù dassammet war-gresk

Reveziad dassammet war gresk ar werzhad x_i a reer eus sammad reveziadoù ar gwerzhadoù $x_1, x_2, \ldots, x_i$, eleze :

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_i = \sum_{\alpha=1}^{i} n_\alpha.$$

EVEZHIADENN — Gavaelet eo ar reveziad dassammet etre 0 hag N.

12.2.1.2 Kevreizhenn dassammañ ar reveziadoù

Bez' ez eo an arloadur a gevred ouzh pep gwerzhad x_i he reveziad dassammet. Lavaret e vez ivez : kevreizhenn dasparzh dassammadel, pe eeunoc'h kevreizhenn dassammañ, pe c'hoazh kevreizhenn ingalañ ha berroc'h ingaladur.

$$\underset{\text{(gwerzhad)}}{x_i} \quad \xmapsto{\text{(ingaladur)}} \quad \underset{\text{(reveziad dassammet)}}{\sum_{\alpha=1}^{i} n_\alpha}$$

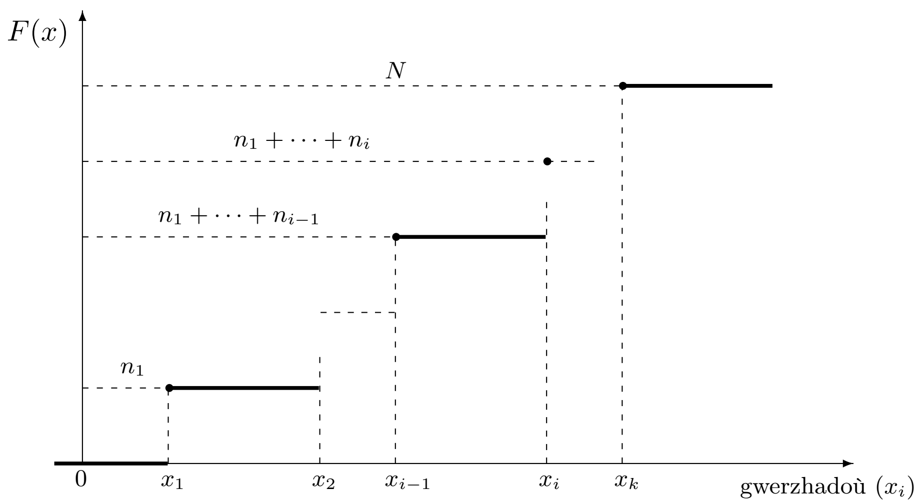
12.2.1.3 Kevregoù

Bezet taolenn ar reveziadoù dassammet amañ dindan :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_{i-1}	x_i	$\ldots$	x_k
Reveziadoù dassammet	n_1	$n_1 + n_2$	$\ldots$	$n_1 + \cdots + n_{i-1}$	$n_1 + \cdots + n_i$	$\ldots$	N

Alese e tenner taolenn ar gevreizhenn dassammañ $F(x)$:

$[x_{\alpha-1}, x_\alpha[$	$]\infty, x_1[$	$[x_1, x_2[$	$[x_2, x_3[$	$\ldots$	$[x_{i-1}, x_i[$	$\ldots$	$[x_k, +\infty[$
$F(x)$	0	n_1	$n_1 + n_2$	$\ldots$	$n_1 + \cdots + n_{i-1}$	$\ldots$	N



Kevreizhenn dassammañ

12.2.2 Ingaladur aliestedoù

12.2.2.1 Aliested dassammet

Aliested dassammet war gresk ar werzhad x_i a reer eus sammad aliestedoù ar gwerzhadoù $x_1, x_2, \ldots, x_i$, eleze :

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_i = \sum_{\alpha=1}^{i} f_\alpha.$$

EVEZHIADENN — Alese e teu :

$$\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{i} f_\alpha}_{\text{aliested dassammet}} = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{i} n_\alpha}_{\text{reveziad dassammet}} .$$

A se an dibarder daou da heul :

$$0 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{i} f_\alpha \leqslant 1.$$

12.2.2.2 Kevreizhenn dassammañ an aliestedoù

Kevreizhenn dassammañ (pe : ingalañ) an aliestedoù zo an arloadur a gevred pep gwerzhad x_i ouzh he aliested dassammet :

$$\underset{\text{(gwerzhad)}}{x_i} \xmapsto{\text{(ingaladur)}} \underset{\text{(aliested dassammet)}}{\sum_{\alpha=1}^{i} f_\alpha}$$

12.2.2.3 Kevregoù

An daveadur :

$$\sum_{\alpha=1}^{i} f_\alpha = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{i} n_\alpha$$

a ziskouez e c'hell kevreizhenn dassammañ an aliestedoù bezañ derc'hennet gant an hevelep kevreg ha hini kevreizhenn dassammañ ar reveziadoù, gant ma ve rannet hedennoù ar reveziadoù dre N.

12.2.3 Reveziadoù hag aliestedoù dassammet war zigresk

- *Reveziad dassammet war zigresk* ar werzhad x_i a reer eus an niver :

$$N - (n_1 + \cdots + n_i).$$

- *Aliested dassammet war zigresk* ar werzhad x_i a reer eus an niver :

$$1 - (f_1 + \cdots + f_i).$$

Savelañ a reer ivez kevreizhennoù dassammañ war zigresk evit ar reveziadoù hag an aliestedoù.

12.3 HEULIADOÙ RUMMET

12.3.1 Rummoù — Reveziad ur rummad

Bezet un heuliad stadegel. Mard eo niverus gwerzhadoù ketep an doareenn (seul gent a se evit ur stadekadur kendalc'hek) e teseller un heuliad war gresk strizh $(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, \ldots, a_k)$, hevelep ma ve gavaelet holl werzhadoù an doareenn en entremez $[a_0, a_k[$. *Rummoù* pe *troc'hadoù* a reer eus an entremezioù :

$$]-\infty, a_0[, [a_0, a_1[, \ldots, [a_{i-1}, a_i[, \ldots, [a_{k-1}, a_k[, [a_k, +\infty[,$$

a ampar ur parzhadur eus $\mathbb{R}$.
Evit ar rumm $[a_{i-1}, a_i[$ da skouer :

- Bonnoù ar rumm-se zo a_{i-1} hag a_i.
- Kreiz an entremez zo an hantersammad :

$$\frac{a_{i-1} + a_i}{2}.$$

- Heled an entremez zo an diforc'h $a_{i-1} - a_i$.
- Reveziad n_i ar rummad zo sammad reveziadoù ar gwerzhadoù a zo er rumm-se.
- Aliested f_i ar rummad zo ar rannad :

$$\frac{n_i}{N}, \qquad (n_i \text{ reveziad ar rummad hag } N \text{ reveziad hollel}).$$

EVEZHIADENN — Evit an daou rumm eizhañ $]-\infty, a_0[$ hag $[a_k, +\infty[$ ez eo mannel reveziad hag aliested.

12.3.2 Heuliad rummet

Savelañ a reer un heuliad stadegel nevez evel-henn :
Desellomp er boblañs un elfenn bennak ω. Gwerzhad x doareenn an elfenn-se a vo en ur rumm, da skouer $[a_{i-1}, a_i[$. Dre gendivizad e kevreder ω ouzh kreizenn $x_i = (a_{i-1} + a_i)/2$ ar rumm-se, e-lec'h ar werzhad x, hag e teverker d'ar werzhad x_i reveziad n_i ar rumm $[a_{i-1}, a_i[$.

Despizadurioù :

- *Heuliad stadegel rummet* pe *strollet* — kendalc'hek enta — a reer eus ar familh :

$$\big([a_{i-1}, a_i[, n_i\big)_{i \in \{0,1,2,..,k\}} \quad \text{pe} \quad \big([a_{i-1}, a_i[, f_i\big)_{i \in \{0,1,2,..,k\}},$$

gwerzhadoù ar stadekadur o vezañ strollet e rummoù

$$]-\infty, a_0[, [a_0, a_1[, [a_1, a_2[, [a_2, a_3[, \ldots, [a_{i-1}, a_i[, \ldots, [a_{k-1}, a_k[, [a_k, +\infty[$$

a vo o reveziadoù ketep :

$$0, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i, \ldots, n_k, 0.$$

- *Dasparzh reveziadoù* an heuliad strollet a reer eus an arloadur :

$$\underset{\text{(kreiz ar rumm)}}{x_i} \xmapsto{\text{(dasparzh)}} \underset{\text{(reveziad ar rumm)}}{n_i}$$

- *Dasparzh aliestedoù* an heuliad strollet a reer eus an arloadur :

$$\underset{\text{(kreiz ar rumm)}}{x_i} \xmapsto{\text{(dasparzh)}} \underset{\text{(aliested ar rumm)}}{f_i}$$

12.3.3 Kevregoù

12.3.3.1 Tellun ar reveziadoù

Ar rummadoù a vez derc'hennet dre reizhkornegoù a zo o gorreadoù kenfeuriek ouzh ar reveziad. Pennoù ar rummoù a zouger war ahel al ledennoù hag ar reveziadoù war ahel an hedennoù.

12.3.3.2 Liestueg ar reveziadoù

Al linenn liestuek oc'h eren ar poentoù (x_i, n_i) — x_i o vezañ kreiz ar rumm ha n_i ar reveziad kevredet outañ — a vez anvet *liestueg ar reveziadoù*. An daou rummad eizhañ o vezañ goullo emañ pennoù al liestueg war ahel al ledennoù (Gwelout **13.3.5.2**).

12.3.3.3 Liestueg ar reveziadoù dassammet

Lavaret e vez ivez *kevreizhenn ingalañ* pe *kevreizhenn dassammañ*. Bez' ez eo al linenn liestuek oc'h eren ar poentoù (α_i, e_i), hevelep ma ve :

- Al ledenn : $\begin{cases} \alpha_i = b_i & \text{mard eo reveziadoù dassammet war gresk } \nearrow \\ \alpha_i = a_i & \text{mard eo reveziadoù dassammet war zigresk } \searrow \end{cases}$
- An hedenn : e_i zo reveziad dassammet ar rumm $[a_i, b_i[$.

EVEZHIADENN — Derc'hennañ a reer ivez an aliestedoù hag an aliestedoù dassammet. Heñvel eo ar c'hevregoù ouzh re ar reveziadoù mar daskemmer an unanenn war ahel an hedennoù, hevelep ma ve

$$\vec{j'} = N\vec{j},$$

N o vezañ ar reveziad hollel.

12.3.4 Aliesteter (regel)

12.3.4.1 Despizadur

Bezet un heuliad stadegel rummet. *Aliesteter* ar rummad $[a_{i-1}, a_i[$ a reer eus keñver an aliested ouzh heled ar rumm :

$$\frac{f_i}{a_i - a_{i-1}}.$$

12.3.4.2 Kevreizhenn aliesteter

Bez' ez eo ar gevreizhenn savelet dre

$$\begin{cases} \forall x \in [a_{i-1}, a_i[, \varphi(x) = \dfrac{f_i}{a_i - a_{i-1}}, \\ \forall x, x \leqslant a_0 \text{ pe } x > a_k \Rightarrow \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

EVEZHIADENN — Ar gevreizhenn $\varphi(x)$ a zerc'henner dre dellun an aliestedoù — derc'hennet dre c'horreadoù ar reizhkornegoù — ha war ahel an hedennoù e touger an aliesteter (Gwelout an eil skouer 2 amañ dindan).

12.3.5 Kevreizhenn dassammañ reveziadoù hag aliestedoù

12.3.5.1 Kevreizhenn dassammañ reveziadoù

Kevreizhenn dassammañ reveziadoù war gresk pe *kevreizhenn ingalañ reveziadoù war gresk* pe c'hoazh *ingaladur war gresk* un heuliad rummet a reer eus ar gevreizhenn savelet dre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad N\Phi(x) = N \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

Ar gevreizhenn $N\Phi$, sammegenn ar gevreizhenn war bazinier $N\varphi$ zo ur gevreizhenn geouenn a-entremezioù.

Savelañ a reer ivez ur gevreizhenn dassammañ war zigresk :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1 - N\Phi(x).$$

12.3.5.2 Kevreizhenn dassammañ aliestedoù

Bez' ez eo ar gevreizhenn Φ : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$

Ur gevreizhenn dassammmañ war zigresk a saveler ivez :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 1 - \Phi(x).$$

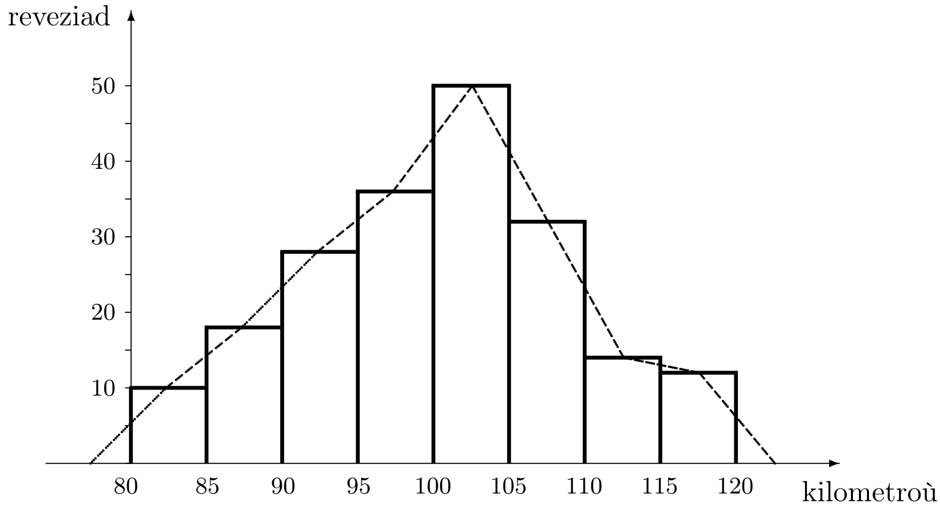
(Sellout ar skouerioù amañ dindan.)

SKOUER 1 — Keitheled eo ar rummoù.

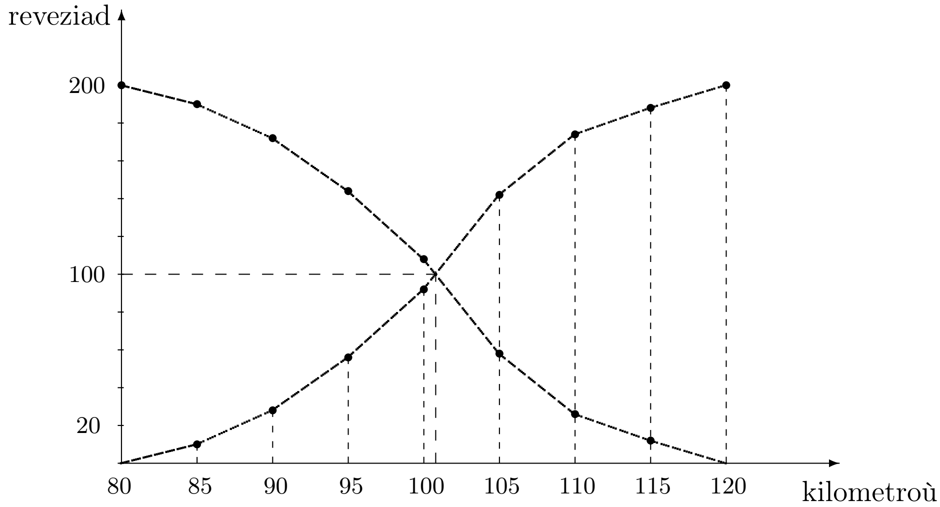
Bezet ur boblañs a 200 taksi a studier warni an doareenn : niver ar c'hilometroù redet gant pep taksi.

miliadoù kilometroù	Reveziadoù	kreiz x_i ar rumm	Reveziadoù dassammet $\nearrow$	Reveziadoù dassammet $\searrow$
$[80, 85[$	10	$82,5$	10	200
$[85, 90[$	18	$87,5$	28	190
$[90, 95[$	28	$92,5$	56	172
$[95, 100[$	36	$97,5$	92	144
$[100, 105[$	50	$102,5$	142	108
$[105, 110[$	32	$107,5$	174	58
$[110, 115[$	14	$112,5$	188	26
$[115, 120[$	12	$117,5$	200	12

Taolenn stadegel



Tellun ha liestueg ar reveziadoù



Liestuegoù ar reveziadoù dassammet war gresk ha war zigresk

EVEZHIADENN — Bennozh da daolenn pe da gevregoù ar reveziadoù dassammet e c'haller respont d'ar goulennoù eus ar seurt :

- Pet taksi o deus ruilhet nebeutoc'h eget 10 000 km ? (92)
- Pet taksi o deus ruilhet 9000 km rik pe vuioc'h ? (172)

Teurel evezh ivez ez eo $(M, N/2)$ daveennoù poent skej kevregoù ar reveziadoù dassammet war gresk ha war zigresk. M zo *kreizad* an heuliad stadegel. Gwelet e vo amañ dindan er chabistr da heul.

SKOUER 2 — Ankeitheled eo ar rummoù.

Pa na vez ket par heled ar rummoù ez eo dav kounañ kement-mañ : kenfeuriek eo gorread pep reizhkorneg ouzh ar reveziad (pe an aliested). A se, dre jediñ lerc'h ouzh lerc'h an aliestedoù, an aliesteterioù hag an aliestedoù dassammet e vezer e-tailh da sevel aesoc'h an tellunioù hag ar c'hevregoù dassammañ.

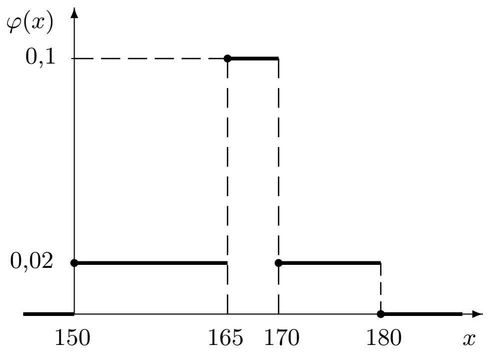
Bezet ur boblañs a 100 den a studier warni an doareenn : ment pep hini.

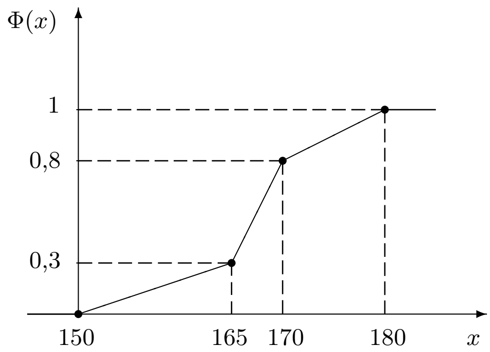
Ment e cm (x)	$[150, 165[$	$[165, 170[$	$[170, 180[$
reveziad (n_i)	30	50	20

Alese an daolenn da heul :

x_i	$]-\infty, 150[$	$[150, 165[$	$[165, 170[$	$[170, 180[$	$[180, +\infty[$
f_i	0	$0,3$	$0,5$	$0,2$	0
$\varphi(x_i)$	0	$0,02$	$0,1$	$0,02$	0
$\Phi(x_i)$	0	$0,3$	$0,8$	1	1

Derc'hennet amañ dindan kevregoù φ (an aliesteter) ha Φ (an aliestedoù dassammet). An hini kentañ a reer anezhañ ivez *tellun an aliestedoù*.





POELLADENNOÙ

12.01 Bezet ur boblañs Ω enni N elfenn hag un teskad F a p niver gwerc'hel :

$$F = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$$

a) Pet stadekadur zo eus Ω da F ?

b) A-douez ar stadekadurioù-se, pet zo dezho un dasparzh $x_i \mapsto n_i$ roet ?

Dedalvezadur niverel : $N = 13$, $n_1 = n_1 = 2$, $n_3 = 4$, $n_5 = 5$, $p = 4$.

12.02 Bezet ur boblañs a N elfenn, dezhi un doareenn p gwerzhad anpar, ar reveziadoù darnel ketep o vezañ $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Pehini eo, pa lakaer $n_1, n_2, \ldots, n_p$ da argemmañ (N ha p arstalek) :

a) Niver an dasparzhioù bezus ?

b) Niver an ingaladurioù bezus ?

a) Dedalvezadur niverel : $N = 10$, $p = 7$.

12.03 Ment skolidi ur c'hlas a c'horreer (e cm) :

165	158	172	171	149	153	157	160	155	162	164	158
166	170	150	165	174	175	180	164	181	171	157	167

Ar muzuliadoù-se a stroller dre rummadoù 5 cm o heled, an hini kentañ o vezañ $[145, 150[$ hag an hini diwezhañ $[180, 185[$.

a) Erouezañ en un daolenn : ar rummoù, ar reveziadoù, ar reveziadoù dassammet war gresk ha war zigresk.

b) Displegañ gwerzhadoù ar pevare rezad.

c) Sevel taolenn an aliestedoù, an aliestedoù dassammet war gresk ha war zigresk.

12.04 Bezet dasparzh 60 den hervez o fouez :

x_i	$[48, 52[$	$[52, 56[$	$[56, 60[$	$[60, 64[$	$[64, 68[$	$[68, 72[$
n_i	3	15	23	12	5	2

a) Tresañ tellun an aliestedoù.

b) Tresañ liestueg an aliestedoù en un dealf.

12.05 Bezet dasparzh 50 stal c'hounezel hervez o gorread (en ha) :

x_i	$[0, 5[$	$[5, 10[$	$[10, 20[$	$[20, 50[$
n_i	9	28	10	3

a) Tresañ tellun an aliestedoù.

b) Tresañ kevreg an aliestedoù dassammet war gresk.

12.05 Bezet dasparzh koubladoù hervez niver o bugale :

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	31	16	27	15	7	4

a) Tresañ tellun an aliestedoù.

b) Tresañ kevreg an aliestedoù dassammet war gresk.