10

Kengerc'h gwehanadurioù dargouezhel

Pouezus kenan eo ar chabistr berr-mañ, rak kengerc'h ar gwehanadurioù dargouezhel zo ar c'hetal ret etre Riñverezh an tebegoù hag ar Stadegouriezh. Hag eñ damkanel evit doare e vo kavet ennañ an araezioù rekis da zezrannañ an degouezhioù louer o tennañ d'ar Stadegouriezh.

10.1 DIBARDERIOÙ

10.1.1 Dibarder Markov

Bezet X ur gwehanadur dargouezhel arskarek gwerc'hel dezhañ gwerzhadoù muiel pe vannel, $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ (hervez an urzh war gresk), dezho an tebegoù kevredet $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$. Goût a ouzer ez eo engortoz jedoniel X par da :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_ix_i + \cdots + p_nx_n.$$

Bezet un niver muiel a hevelep ma'z eo : $0 < x_{i-1} < a \leqslant x_i$.
Alese an dibarderioù :

$$E(X) \geqslant p_ix_i + \cdots + p_nx_n \geqslant a(p_i + \cdots + p_n).$$

Hogen ar sammad $p_i + \cdots + p_n$ zo tebegezh an darvoud $(X \geqslant a)$. A se e teu :

$$\boxed{P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}}.$$

An dibarder-se a reer dibarder Markov anezhañ. Talvoudek eo evit $x_n < a$, rak neuze $P(X \geqslant a) = 0$ hag $E(X) > 0$.

10.1.2 Dibarder Bienaymé-Čebičev

Dibarder Markov a c'hell bezañ rezhiennet en un doare all, o lakaat $a = \varepsilon^2$:

$$P(Y \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{E(Y)}{\varepsilon^2}.$$

Goulakaomp ez eo $Y = [X - E(X)]^2$ ha bezet $\varepsilon > 0$.
An dibarder amañ diaraok a skriver neuze :

$$\boxed{P\big(\,|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}},$$

rak engortoz $[X - E(X)]^2$ zo hebiant X, eleze σ^2.

10.1.3 Rezhiennoù all dibarder Bienaymé-Čebičev

O tesellout darvoud kontrol $|X - E(X)| \geqslant \varepsilon$ e teu :

$$\boxed{P\big(\,|X - E(X)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}.$$

O todiñ $\dfrac{\varepsilon}{\sigma} = \lambda$ e teu an dibarderioù da vezañ :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{evit nep } \lambda \geqslant 1 \text{ ez eus :} & & \\ P\big(\,|X - E(X)| \geqslant \lambda\sigma\big) & \leqslant & \dfrac{1}{\lambda^2} \\ P\big(\,|X - E(X)| < \lambda\sigma\big) & \geqslant & 1 - \dfrac{1}{\lambda^2} \end{array}}.$$

EVEZHIADENN 1 — An dibarderioù-se zo talvoudek c'hoazh evit ur gwehanadur dargouezhel arskarek anvevenn pe evit ur gwehanadur dirgendalc'hek.

EVEZHIADENN 2 — An dibarder kentañ a gevaraez da vuiantiñ an debegezh da zistremen ur forc'had $\lambda\sigma$ diouzh ar c'heitad, hogen ar muiantadur-se zo ledan kenan, gwashaour zoken. Gwir eo ne anavezer nemet an engortoz $E(X) = m$ hag ar strewant σ, tra ma chom dianav an dasparzh. Bennozh da zibarder Bienaymé-Čebičev e c'haller neoazh tennañ un ditour bennak. Evit an eil dibarder a ro an uhelañ leiant da embreger ar reolenn k-sigma evit ur gwehanadur a zo dianav e zasparzh. E gwir e ranker anaout e engortoz $E(X) = m$ hag e strewant σ. Mar anavezer an dasparzh e c'haller dewerzhañ pishoc'h tebegoù an entremezioù-se. An daolenn amañ dindan a geñver ar gwerzhadoù jedet dre zibarder Bienaymé-Čebičev evit ur gwehanadur diforzh gant gwerzhadoù rik un dasparzh reol $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

Forc'had	$P\big(\lvert X - E(X)\rvert \geqslant \lambda\sigma\big)$	$P\big(\lvert X - E(X)\rvert < \lambda\sigma\big)$	
		Čebičev	Gwerzhad rik
σ	< 1	$\geqslant 0$	0,682689
2σ	$< \frac{1}{4}$	$\geqslant \frac{3}{4}$	0,954500
3σ	$< \frac{1}{9}$	$\geqslant \frac{8}{9}$	0,997300
4σ	$< \frac{1}{16}$	$\geqslant \frac{15}{16}$	0,999937

10.2 DELAKADENNOÙ

Bezet un heuliad $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ a n gwehanadur dargouezhel war an un egor tebekaet.

10.2.1 Kengerc'h

10.2.1.1 Kengerc'h a-debegezh

Lavarout a reer e kengerc'h an heuliad (X_n) a-debegezh etrezek ur gwehanadur dargouezhel arstalek a, mmar :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\big(\lvert X_n - a\rvert < \varepsilon\big) = 1.$$

Notañ a reer : $\quad X_n \xrightarrow{teb} a.$

10.2.1.2 Kengerc'h peuzsur

Lavarou a reer e kengerc'h peuzsur an heuliad (X_n) etrezek ur gwehanadur dargouezhel arstalek a — ε hag η o vezañ daou werc'hel muiel kentfestet ken bihan ha ma venner —, mmar galler kavout ur gwehin n_1, hevelep ma ve an dibarder, evit nep $n > n_1$:

$$P\Big[\big(|X_n - a| > \varepsilon\big) \cup \ldots \cup \big(|X_N - a| > \varepsilon\big) \cup \ldots\Big] < \eta,$$

bastet dezhañ, ken bras ha ma ve N ha ken bihan ha ma ve ε hag η, eleze, o c'houlakaat e c'hell N kemer forzh petore gwerzhad, ken bras ha ma venner :

$$n > n_1 \Rightarrow P\Big[\big(|X_n - a| > \varepsilon\big) \cup \ldots \cup \big(|X_{n+i} - a| > \varepsilon\big) \cup \ldots\Big] < \eta.$$

Rezhienn all :

$$n > n_1 \Rightarrow P\Big[\big(|X_n - a| \leqslant \varepsilon\big) \cap \ldots \cap \big(|X_{n+i} - a| \leqslant \varepsilon\big) \cap \ldots\Big] > 1 - \eta.$$

Anat eo, ar c'hengerc'h peuzsur a empleg ar c'hengerc'h a-debegezh.

Notañ a reer : $X_n \xrightarrow{ps} a$.

10.2.1.3 Kengerc'h a-zasparzh

Lavarout a reer e kengerc'h an heuliad (X_n) a-zasparzh etrezek ar gwehanadur dargouezhel T, mmar kengerc'h ent unvan F_n — kevreizhenn dassammañ (X_n) — etrezek G — kevreizhenn dassammañ T—, eleze mmar :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0, \quad \sup |F_n(x) - G(x)| < \varepsilon, \ \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Notañ a reer : $X_n \xrightarrow{d} T$ pe c'hoazh : $X_n \rightsquigarrow T$.

EVEZHIADENN — Diskouez a reer ez eus kevatalder etre kengerc'h a-zasparzh (X_n) etrezek ar gwehanadur kaougant $\mathcal{K}(a)$ ha kengerc'h a-debegezh (X_n) etrezek ar c'hementad arstalek a. Eleze :

$$X_n \xrightarrow{teb} a \iff X_n \rightsquigarrow \mathcal{K}(a).$$

An disoc'h-se n'eo ket talvoudek pa erlec'hier ur gwehanadur diforzh X ouzh a. Diskouez a reer ez eus hepken :

$$X_n \xrightarrow{teb} X \Longrightarrow X_n \rightsquigarrow X.$$

10.2.2 Delakadenn Bernoulli

E 1713 ez ezrevelle Bernoulli (Jacques kentañ) un erganad diazez a c'haller dezgeriañ evel henn :

Delakadenn :

Bezet un darvoud A dezhañ un debegezh arstalek p a zo ar sevenidigezh anezhañ disoc'h un arnod dargouezhel ha bezet f_n aliested sevenidigezh A goude n arreadenn dizalc'h kenheuilh eus an arnod en hevelep amveziadoù. Ne vern ε hag η, daou werc'hel muiel, ez eus N gwerc'hel muiel, hevelep ma :

$$n > N \Longrightarrow P\big(|f_n - p| \geqslant \varepsilon\big) < \eta.$$

O c'houlakaat e c'hell N bezañ ken bras ha ma venner e c'haller skrivañ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \big[P\big(|f_n - p|\big) \geqslant \varepsilon\big] = 0,$$

pe, en un doare kevatal :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \big[P\big(|f_n - p|\big) < \varepsilon\big] = 1.$$

Div elfenn zo da festañ :

1. bonn ε ar forc'hadoù $|f_n - p|$,
2. ar riskl anhepkoradus goulezet η e ve brasoc'h eget ε unan eus ar forc'hadoù $|f_n - p|$.

Da skouer e vo bastus mar bez un debegezh bihanoc'h eget $\eta = 0,05$ e tistremenfe unan eus ar forc'hadoù $|f_n - p|$ ar werzhad $\varepsilon = 0,02$, adal ma'z eo $n > N(\varepsilon, \eta)$.

Dienadur Čebičev a harp war zibarder Bienaymé evit dewerzhañ $N(\varepsilon, \eta)$. E gwir ez eus :

$$P\big(|f_n - E(f_n)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}, \quad \text{gant } \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$

hogen :

$$E(f_n) = p, \quad \sigma^2 = V(f_n) = \frac{pq}{n}.$$

Dibarder Bienaymé a skriver enta :

$$\boxed{P\big(|f_n - p| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}}.$$

Diskouez a ra ez eo $\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$ un usvonn eus ar riskl ma ve $|f_n - p|$ brasoc'h eget ε. Da gevonnañ ar riskl-se d'ar werzhad η e spir :

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2} < \eta \iff n > \frac{pq}{\eta\varepsilon^2}.$$

O vezañ ma'z eo $pq = p(1-p)$ — trinom a'n eil derez da p — e tezreer ez eo $pq \leqslant \frac{1}{4}$. Da neuze e c'haller muiantiñ $\frac{pq}{\eta\varepsilon^2}$ gant $\frac{1}{4\eta\varepsilon^2}$, a zo dizalc'h diouzh p. Ken ma c'haller dibab evit N, ne vern ε hag η :

$$\boxed{N = \frac{1}{4\eta\varepsilon^2}}.$$

Neuze : $\quad n > N \Longrightarrow P\big(|f_n - p| > \varepsilon\big) < \eta.$

E gerioù all :

$$f_n \xrightarrow{teb} p.$$

EVEZHIADENN

1. An delakadenn-mañ a savel ul liamm diazez etre Riñverezh ar stadegoù hag ar Stadegouriezh. Dibarder Bienaymé a ziskouez :

$$\lim_{n\to+\infty} \big[P\big(|f_n - p| \geqslant \varepsilon\big)\big] = 0,$$

E gwir e stader en un arnod *stadegel* ez eo bodet an aliestedoù arsellet en amezegiezh ur werzhad stabil, ha seul strishoc'h ma kresk niver an amprouennoù. An arnod louer-se a zerva gwiriegezh delvan an dasparzh binomel diazezet war ar c'hentreadoù-mañ da heul :

- Dizalc'h eo gwehanadurioù meneger A evit pep amprouenn : $X_1, \ldots, X_n$.
- Pep hini anezho a gemer ar gwerzhadoù 0 pe 1 gant an tebegoù ketep p ha $q = 1 - p$.

Pezh a dalvez en deus an darvoud A an debegezh arstalek p e pep amprouenn, a c'haller arnesaat dre an arnod louer.

2. Ar c'hengerc'h-se a sell an aliestedoù ha n'eo ket niver ar sevenidigezhioù.

Desellomp da skouer n amprouenn a'r rizh pil pe groaz, gant $p = q = 0,5$. Aroueziomp dre k_n niver sevenidigezhioù an darvoud pil ha dre f_n o aliested goude an n amprouenn :

$$E(k_n) = \frac{n}{2}, \quad E(f_n) = \frac{1}{2}, \quad \sigma(k_n) = \frac{\sqrt{n}}{2}, \quad \sigma(f_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

n	Niver ar sevenidigezhioù k_n			Aliested f_n		
	$E(k_n)$	$\sigma(k_n)$	Entremez 2σ	$E(f_n)$	$\sigma(f_n)$	entremez 2σ
100	50	5	$k_n \in [40; 60]$	0,5	0,05	$f_n \in [0,40; 0,60]$
400	200	10	$k_n \in [180; 220]$	0,5	0,025	$f_n \in [0,45; 0,55]$
2500	1250	25	$k_n \in [1200; 1300]$	0,5	0,01	$f_n \in [0,48; 0,52]$

Evit pep hini eus ar gwehanadurioù k_n hag f_n hon eus erouezet entremezioù keittebek ($[E(\ ) - 2\sigma; E(\ ) + 2\sigma]$, hevelep ma ve P(gwerzh ar gwehanadur $\in$ entremez) $\geqslant 0,75$), hervez dibarder Bienaymé.

Pa gresk n ez eo heled an entremezioù-se :

a) war zigresk evit a sell an aliestedoù,
b) war gresk evit a sell niver ar sevenidigezhioù.

E se :

$$P(k_{2500} \in [1200; 1300] \approx P(k_{100} \in [40; 60]),$$

hogen evit k_{2500} ez eo dasparzhet an debegezh-se (e gwir ent dizunvan) war 100 gwerzhad e-lec'h 20. An debegezh da gaout etre 1240 ha 1260 gwech kroaz e 2500 taol zo bihanoc'h eget an hini da gaout etre 40 ha 60 gwech kroaz e 100 taol. Hama ! Ra vo gouezet e-metou ar c'hoarierion. .

SKOUERIOÙ

1. Mar $\varepsilon = 0,02$ hag $\eta = 0,05$, neuze $N = 12500$.

$$n > 12500 \Longrightarrow P\big(|f_n - p| > 0,02\big) < 0,05.$$

2. An debegezh-se a c'hell bezañ digresket bihanoc'h eget 0,01 :
   Mar $\varepsilon = 0,02$ hag $\eta = 0,01$, neuze $N = 62500$.

3. Teurel a reer n gwech lerc'h ouzh lerc'h un diñs. Penaos e c'haller dibab n evit ma ve gavaelet niver ar c'hwec'hoù bet etre 0 ha $n/3$, gant un debegezh par da 0,9 d'an nebeutañ ?

 Mennout a reer enta :

$$f_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \text{pe } f_n \in \left[E(f_n) - \frac{1}{6}, E(f_n) + \frac{1}{6}\right].$$

Rak : $E(f_n) = \frac{1}{6}$.
Ar jedadur amañ diaraok a c'haller dedalvout gant :

$$p = \frac{1}{6}, \quad \varepsilon = \frac{1}{6} \quad \text{hag} \quad \eta = \frac{1}{10} \quad (1 - \eta = 0,9).$$

A se teu :

$$P\left(\left|f_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{6}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{10},$$

alese al leiantadur :

$$n \geqslant 10(6)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 50.$$

10.2.3 Hollekadur : delakadenn wan an niveroù bras

Delakadenn :

Bezet un heuliad gwehanadurioù dargouezhel $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ dizalc'h daou ha daou ha dezho an un dasparzh tebegoù, eleze an un engortoz jedoniel m hag an un strewant σ.

Desellomp keitad an n gwehanadur kentañ :

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Neuze :

$$\lim_{n \to +\infty} P\big(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

E gerioù all :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall \eta > 0, \ \exists N > 0, \quad n > N \Longrightarrow P\big(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon\big) < \eta.$$

Dienadur : — E gwir,

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}E\left(\sum_1^n X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_1^n E(X_i).$$

Hogen an un engortoz m zo da bep X_i, ha neuze :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}\cdot n \cdot m = m.$$

Evit an hebiant e teu :

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}V\left[\sum_1^n X_i\right].$$

Pep X_i o vezañ dizalc'h ha dezhañ an hebiant σ^2 :

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_1^n V(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Evit krennañ : $$\boxed{E(Y_n) = m, \quad V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}}.$$

Dibarder Bienaymé-Čebičev a gas neuze da :

$$P\big(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Evit ε festet e tigresk an debegezh-se pa gresk n, hag evit ε hag η diforzh, gwerc'helion muiel :

$$\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} < \eta \iff n > \frac{\sigma^2}{\eta\varepsilon^2}.$$

Neuze, mard eo : $$N = \frac{\sigma^2}{\eta\varepsilon^2}, \quad n > N \Longrightarrow P\big(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon\big) < \eta.$$

EVEZHIADENN :

• Dezrevell Bernoulli ned eo nemet un degouezh dibarek eus delakadenn wan an niveroù bras, pa vez pep gwehanadur dargouezhel X_i savelet dre ar gwehanadur dazeilad.

Neuze $\sigma^2 = p(1-p)$ zo muiantet gant $\frac{1}{4}$ ha jediñ a reer $N = \frac{1}{4\eta\varepsilon^2}$.

• Dav kaout atav er spered en hon eus amañ *delakadennoù*, eleze delvanoù jedoniel. Evit a sell ar werc'helezh ez eo tra ar Stadegouriezh anren, ha mar stader, da skouer, en degouezhioù louer e tenn an aliested etrezek un debegezh damkanel e tiazezer war ur c'hoaliñ. Rak mar tenn war-du 1 tebegezh un darvoud $(|f_n - m| < \varepsilon)$ da skouer), ned eo ket ur brouenn e ve un harz d'an debegezh-se, na kent se e ve kaougant seurt harz.

Arabat bezañ gwellaour ha dezastum diouzh an delakadennoù e tenn Y_n dre ret war-du m, daoust d'ar meno boutin !

Gallout a reer dezren zoken e tenn an debegezh p da gaout $n/6$ gwech rik ar c'hwec'h en un heuliad a n taol etrezek mann, pa denn n war-du an anvevenn.

E gwir e jeder an debegezh-se dre ar reollun-mañ da heul :

$$\text{Gant } n = 6m, \quad p = \binom{n}{m}\left(\frac{1}{6}\right)^m \left(\frac{5}{6}\right)^{n-m} = \binom{6m}{m}\left(\frac{5^5}{6^6}\right)^m,$$

ha pa denn m war-du an anvevenn e tenn p war-du mann, pa'z eo $\frac{5^5}{6^6} < 1$.ă

Pezh ned eo ket muioc'h ur brouenn e ve anvezus an darvoud-se, nemet e tenn da vezañ prin ouzh prin a-feur ma kresk n. Mar roer koal d'an delvan jedoniel ! Bezet a vezo ez eo faos ar gredenn voutin en ur gempouezidigezh eus an dargouezh dre nerzh hud an niveroù bras. .

EVEZHIADENN — Delakadenn greñv an niveroù bras :

Bezet $(X_n)_{n\geqslant 1}$ un heuliad gwehanadurioù dargouezhel war an un egor tebekaet, dizalc'h daou ha daou, dezho an un dasparzh hag ivez an un engortoz jedoniel m hag an un strewant σ. Bez' ez eus :

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = m\right) = 1.$$

Un degouezh a-bouez : ar gwehanadurioù X_n zo bernoulliat. Roet un darvoud A a debegezh p, arreet ent anvevenn en hevelep amveziadoù : an debegezh ma tennfe aliested f_n sevenidigezhioù A goude n amprouenn etrezek p pa denn n etrezek an anvevenn zo par da 1. Da skouer, er c'hoari pil pe groaz e tenn aliested an tuioù kroaz war-du $1/2$ pa denn niver an taolioù war-du an anvevenn gant un debegezh par da 1. An aliested he deus neuze da harz peuzsur an debegezh p. Sellout amañ diaraok ar c'hengerc'h peuzsur.

10.2.4 Delakadenn an harz kreizet

Delakadenn :

Bezet un heuliad gwehanadurioù dargouezhel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dizalc'h daou ha daou ha dezho an un dasparzh tebegoù, eleze an un engortoz jedoniel m hag an un strewant σ.

Desellomp ar gwehanadur keitad :

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n},$$

hag ar gwehanadur kreizet direet kevredet ouzh Y_n :

$$Y_n^* = \frac{Y_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Kevreizhenn dassammañ Y_n^* zo : $F_n(x) = P(Y_n^* \leqslant x)$. Neuze, evit pep $x \in \mathbb{R}$ ez eus :

$$\lim_{n \to +\infty} [F_n(x)] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

E gerioù all e kengerc'h Y_n^* a-zasparzh etrezek $\mathcal{N}(0,1)$. Dianlenad kentañ :

$$P(x_1 < Y_n^* \leqslant x_2) = F_n(x_2) - F_n(x_1) \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Notañ e c'haller jediñ Y_n^* ken diwar ar sammad pe ar c'heitad :

$$Y_n^* = \frac{Y_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Delakadenn an harz kreizet — kengerc'h a-zasparzh — n'eo ket un delakadenn arnesaat. Nag evit se e talvez alies da arnesaat S_n dre ur gwehanadur reol $\mathcal{N}(nm, \sigma\sqrt{n})$ ha Y_n dre ur gwehanadur reol $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Aozerion 'zo a haer e c'haller arverañ ar gwerzhadoù niverel pourchaset gant an arnesadur dre ar gwehanadur reol mar bez $n \geqslant 30$. Hogen seul gendalc'hekoc'h, reoliekoc'h ha kemparzhekoc'h an dasparzh da studiañ, seul welloc'h an arnesadur reol. Evit an degouezhioù gwellañ e c'haller kemer $n \geqslant 10$ hag evit ar re fallañ ne spir ket $n \geqslant 30$ dre ret.

POELLADENNOÙ

10.01 Bezet X niver ar c'hirri o tremen etre 17 h ha 18 h en ur poent roet eus ur gourhent. Arsellet ez eus bet ez eo niver keitat ar c'hirri $E(X) = 4000$, an hebiant o vezañ $V(X) = 100000$.

Savelañ ul leiant eus tebegezh an darvoud $3500 < X < 4500$.

10.02 Un aerdreizher a c'hell dezougen 100 den gant o ambec'hioù. E dolz zo 120 t hep treizhidi nag ambec'hioù, hogen gant ar skipailh ha leun a drelosk. An erlevioù surentez a verz ouzh ar penn bourzh dibradañ mar distremen tolz an nijerez karget 129,42 t.

Amberzet eo bet ar 100 sez. Tolz un treizhad zo dezhañ un dasparzh dezhañ un engortoz 70 kg hag ur strewant 10 kg. Tolz e ambec'hioù zo dezhañ un dasparzh dezhañ un engortoz 20 kg hag ur strewant 10 kg. Ar gwehanadurioù-se a c'houlakaer dizalc'h.

a) Ha kempleg diouzh an erlevioù eo engortoz jedoniel tolz hollel an nijerez war an dibradañ ?

b) Jediñ strewant tolz hollel an nijerez.

c) Diwar zibarder Bienaymé-Čebičev, jediñ ur muiant eus tebegezh an darvoud : tolz gwerc'hel an nijerez war an dibradañ zo brasoc'h eget 129,42 t.

10.03 Teurel a reer ur pezh moneiz n gwech lerc'h ouzh lerc'h.

Jediñ gwerzhadoù n hevelep ma ve aliested kroaz par da 0,5, war-bouez 10^{-2}, gant un debegezh par da 0,9 da vihanañ.

10.04 Bezet un heuliad $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ n gwehanadur dargouezhel, dizalc'h a-vloc'h, dezho an un dasparzh a engortoz m hag a strewant σ.

Desellomp ar gwehanadur dargouezhel :

$$Y_n = \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{n}.$$

O tedalvout an arnesadur diwar delakadenn an harz kreizet, savelañ teskad ar gwerc'helion $k > 0$, hevelep ma ve :

$$P\left(\frac{|Y_n - m|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > k\right) < \frac{24}{1000}.$$

10.05 Buzad bloaz un embregerezh zo ur gwehanadur dargouezhel a engortoz 75 000 € hag a strewant 15 000 € Ar pennrener a ziskler d'e guzul amaezhiañ : 99 chañs war gant hon eus d'ober ur buzad muiel.

Petra a soñjit a-zivout an haeradenn-se ?

10.06 Ur bank a zegemer digant e arvalion rolledoù pezhioù 2 € hep gwiriañ niver ar pezhioù, a zlefe bezañ 25. Goulakaat a reer ez eus a-douez ar rolledoù : 3 % gant 24 pezh enno, 96 % gant 25 pezh enno hag 1 % gant 26 pezh.

a) Bezet X ar gwehanadur par da niver ar pezhioù en ur rolled. Jediñ $E(X)$ ha $\sigma(X)$.

b) Jediñ an tebegoù evit ma ve e-barzh 400 rolled :

— nebeutoc'h eget 10 000 pezh,

— nebeutoc'h eget 9 990 pezh,

— nebeutoc'h eget 9 980 pezh.

10.07 Teurel a reer un diñs n gwech ha desellout a reer ar gwehanadur dargouezhel N par da niver ar c'hwec'hoù. Adalek pe werzhad eus n e vo 9 chañs diwar 10 da gaout $\left|\frac{N}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0,01$?

10.08 Ur preti a c'hell degemer 75 arval. Diouzh boaz ne zeu ket 30 % anezho.

a) Ar pretiour a zarbenn 90 amberzad. Pe debegezh eo e teufe muioc'h eget 50 arval ?

b) Pet amberzad a rank ar pretiour darbenn evit kaout un debegezh brasoc'h pe bar ouzh 0,9 da vezañ e-tailh da servijout an holl arvalion a zeuy ?

10.09 Goulakaat a reer ez eo hoali ur glogorenn dredan ur gwehanadur dargouezhel dezhañ un dasparzh argemmvac'hel a arventenn $\lambda = 0,2 \times 10^{-3}\ h^{-1}$. Mar erlec'hier ur glogorenn heñvel ouzh ur glogorenn o paouez leskiñ, pe debegezh eo e ve e penn 50 000 eurvezh ar glogorenn oc'h arc'hwelañ an dekvet d'an nebeutañ ?