Taolenn

KENTSKRID

Hep ket a var ez eo diorreidigezh ar Stadegouriezh ha Riñverezh an tebegoù unan eus dezverkoù hon amzervezh. O c'havout a reer e pep lec'h, en amaezhiañ Stad, en ardeiñ kevredadoù, en imbourc'h skiantel, en armerzh koulz hag er politikerezh, evel er sontadurioù da vare an dilennadegoù da skouer. Deuet eo ar Stadegouriezh da vezañ un elfenn a bouez eus gouiziadur hollek hon amzer. Gant lammgresk ar c'halvezerezhioù e domanioù evel ar Vevoniezh volekulel, ar Vezekniezh, an Derc'hanouriezh, h.a., ez eo splann o devez ar Stadegouriezh hag an Debegouriezh ur roll bras ouzh bras. Kel a vez mui ouzh mui ag andiended ha ned eo ket mui ar Skiant bali veur an araokaat o c'hrataat dimp antronozioù baradozek. Dav engwerc'hañ an dargouezh en ur gounañ atav emañ ar glaoustre e diazez pep embregadenn. Mard eo bet lusket an Debegouriezh en derou diwar gudennoù o tennañ d'ar c'hoari ez eo deuet ar Stadegouriezh da vezañ un araez galloud etre daouarn ar Stadoù hag an damanioù all, evel ar Jedoniezh dre vras a du 'rall.

Ar stadegouriezh deskrivañ zo he amkan keweriañ ar stlenn dastumet diwar ur boblañs en ur stumm kementadel, korvoadus a eil lankad dre ar Stadegouriezh jedoniel. En amboaz-se ez eo bet diorreet an Debegouriezh, war-benn studiañ ar gwikefreoù dargouezhel. Diazezet war geal an debegezh ez eo bet aksiomatekaet diwar div vonaksiomenn : aksiomennoù an tebegoù hollel ha kenaozat. Jedoniel rik eo an diskiblezh-mañ, hogen he hanc'herieg a chom merket don gant an dave d'al louer, pezh a c'hell bezañ trellus meur a wech, evit ar jedoniour zoken, re voaziet gant ar savelegezh. Splann eo al liammoù etre ar bed gwerc'hel hag e zelvanañ jedoniel evit a sell domanioù a'r Jedoniezh evel ar Stadegouriezh hag an Debegouriezh.

Ar Stadegouriezh jedoniel a denn d'an anren stadegel, eleze da elfennadur ar stlenn gounezet a hent all da heul ur wikefre dargouezhel. Dre harpañ war zelvanoù tebegouriel e klasker *jediñ* naouusterioù hollek ar boblañs orin.

Ar brezhoneg zo un araez evit neveziñ hon sell hag hon denesadur ouzh an diskiblezhioù-se. Er yezhoù diazezet ez eus anv a Gl. *variable*, Al. *Variable* pe Sz. *variate* a ra dave d'an argemm. Dindan emañ keal ar Gl. *loi* Sz. *law* Al. *Gesetz*, termenoù a gaver c'hoazh er Stadegouriezh hag en Debegouriezh er yezhoù-se. Hogen gant keal an *argemm* e c'houlakaer ur savelenn e par al louer hag e koll an dargouezh e staelad. Splann eo an amkan mestroniañ an dargouezh aze.ă

Kavout a ra dimp ez eo keal an *dasken* an hini azasañ d'ober meiz war ar pezh a c'hoarvez e par al louer. N'eus ket gwerzhadoù un argemmenn eus ar muzulioù gorreet diwar ur boblañs, hogen gwerzhadoù unveziat andesavelet a-gentouez, disoc'h ur wikefre dargouezhel. E se disoc'h seurt gwikefre zo ur gwehanadur dargouezhel pe stadegel. E domani ar Jedoniezh ez eo tra ar jedoniour gwehaniñ an unvezioù dre ardaoliñ dezho gwerzhadoù, eleze ez eo ar gwehanadur dargouezhel un arloadur eus teskad an unvezioù (an hiniennoù) da deskad ar gwerc'helion $\mathbb{R}$ pe $\mathbb{R}^n$. E domani al louer, eleze e par ar Stadegouriezh deskrivañ, ez eo ar gwehanadur disoc'h an dargouezh ent eeun, a ro meur a stumm evit ur furm hervez un dasparzh stadegel.

E dibenn al levr e vo kavet un nebeut taolennoù gwerzhadoù, a dalvezo ivez d'ober ar poelladennoù kinniget evit pep chabistr. Ment an oberenn-mañ ne ro ket an tu da lakaat diskoulmoù ar poelladennoù, ha kement-se a ray danvez ul levr all. Evel e Jedoniezh I e soñj dimp e vo talvoudus ar menegvaoù divyezhek a vo kavet e dibenn al levr.

TEBEGOURIEZH

1

Eriñvañ. Kevosodouriezh
Binom Newton

1.1 TESKAD BEVENNEK A BRIÑVEL n ($n \in \mathbb{N}$)

1.1.1 Priñvel un teskad bevennek E (niver e elfennoù)

1.1.1.1 Teskadoù kengoulud

Kengoulud eo E ha F mard eus ur c'hesaezhadur eus an eil war egile.

1.1.1.2 Teskad bevennek

Un teskad bevennek eo E mard eo kengoulud da $[1, n]$, eleze teskad $1, 2, \cdots, n$ an n niver kevan kenheuilh bihanoc'h pe bar ouzh n hag anvannel.

Lavarout f zo ur c'hesaezhadur eus $[1, n]$ war E a dalvez ez eo f un arloadur, hevelep m'en deus pep elfenn ag E ur c'hentorad unel en $[1, n]$. E gerioù all : pep elfenn ag E zo delvad ur c'hevan unel dre f, ha notañ a reer $p \mapsto x_p$. Eleze pep elfenn ag E zo ibiliet gant un elfenn ag $[1, n]$ ha priñvel E zo niver n bevennek an elfennoù ag E. Teskad ar menegoù pe teskad ibiliañ a anver an teskad $[1, n]$.

EVEZHIADENN — Mard eo E un teskad bevennek ha mard eo F kengoulud da E, neuze ez eo bevennek F ha dezhañ an un priñvel hag E. E gwir, mar bez ur c'hesaezhadur f eus $[1, n]$ war E ha mar bez ur c'hesaezhadur g eus E war F, neuze ez eo $g \circ f$ ur c'hesaezhadur adal $[1, n]$ war F, eleze $\mathrm{Card}(F) = n$.

DESPIZADUR — Liesâd $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ an n kevan kentañ a noter $n!$ ha lenn a reer dasperiad n. Dre gendivizad : $0! = 1$. Ar gevreizhenn eus $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ a c'hell bezañ savelet ivez dre un araezad askizat : $0! = 1$ ha $n! = n \times (n-1)!$, evit $n \geqslant 1$.

1.1.2 Perzhioù priñvelion an teskadoù bevennek

1.1.2.1 Delakadenn

Mard eo E ha F daou deskad bevennek, neuze ez eo bevennek $E \cap F$ hag $E \cup F$. Mard eo $E \subseteq F$, neuze ez eo $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.

1.1.2.2 Delakadenn

Mard eo E ha F daou deskad diforzh,

$$\boxed{\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F - \mathrm{Card}(E \cap F)}\ .$$

1.1.2.3 Delakadenn

Mard eo E ha F daou deskad bevennek diforzh:

$$\boxed{\mathrm{Card}(E \times F) = (\mathrm{Card}\, E) \times (\mathrm{Card}\, F)}\ .$$

An delakadenn-mañ a ro priñvel liesâd kartezel daou deskad, eleze teskad an daouac'hoù (x, y), hevelep ma'z eo $x \in E$ ha $y \in F$. Arveret e vez alies er c'hudennoù amprouennoù arreet.

Ent dibarek, $\mathrm{Card}(A \times A) = (\mathrm{Card}\, A)^2$, $\mathrm{Card}(A \times A \times A) = (\mathrm{Card}\, A)^3$, h.a.

A se :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Card}(A^n) = (\mathrm{Card}\, A)^n}\ .$$

Pouezus kenan eo ivez an delakadenn darbennet amañ dindan (sl. 1.1.4.3) a zifer amplegadoù un ensaezhadur eus A e B, un arsaezhadur eus A war B hag a verk kement-mañ: mard eo $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, neuze nep ensaezhadur eus A e B (pe nep arsaezhadur eus A war B) zo ur c'hesaezhadur. Evit kounañ an amplegadoù: bezet daou deskad bevennek A ha B hag un ensaezhadur eus A e B, neuze div elfenn anpar ag A zo dezho delvadoù anpar e B, pezh nad eo bezus nemet mar bez e B kement a elfennoù hag en A d'an nebeutañ, eleze

$\text{Card}(B) \geqslant \text{Card}(A)$. Heñvel dra, evit ma ve un arsaezhadur eus A war B ez eo ret ma ve nep elfenn a B delvad un elfenn ag A d'an nebeutañ (hag un elfenn enbeziat en A ne c'hell ket kaout lies delvad, anez ne ve ket kevreizhel an daveadur). Neuze ez eo ret ma ve en A, d'an nebeutañ, kement a elfennoù hag e B, eleze $\text{Card}(A) \geqslant \text{Card}(B)$.

1.1.3 Skorlakadenn — pe pennaenn — ar vesaerion

Bezet E un teskad bevennek a briñvel $n \geqslant 1$. Desellomp ar gevreizhenn arstalek $\chi_E : E \to \mathbb{N}, x \mapsto 1$. Gwiriañ a reer dre zarren war n an daveadur diazez-mañ:

$$\text{Card}(E) = \sum_{x \in E} \chi_E(x), \tag{1.1}$$

a rezhienner a-wechoù: $\text{Card}(E) = \sum\limits_{x \in E} 1$. A se e tezreer:

• **Pennaenn ar vesaerion**[1]:

Bezet E un teskad bevennek ha $(F_i)_{i \in I}$ ul lodennadur eus E (ma'z eo I un teskad bevennek). Neuze:

$$\text{Card}(E) = \sum_{i \in E} \text{Card}(F_i)\ . \tag{1.2}$$

Ent dibarek, mard eo $\mathcal{F}$ ur parzh eus $\mathfrak{P}(E)$ — teskad ar parzhioù eus E — amparet gant teskadoù disparti, hevelep ma'z eo $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A = E$ e teu:

$$\boxed{\text{Card}(E) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \text{Card}(A)}\ .$$

An teir delakadenn eus ar c'hevarad 1.1.2, an daveadurioù (1.1) hag (1.2) eus ar c'hevarad [1.1.3] ha pennaenn ar vesaerion a ampar diazez an dezrannouriezh kevosodel, anvet c'hoazh *kevosodouriezh.*

[1] Evit jediñ niver an deñved eus un tropellad e spir kontañ niver ar pavioù ha rannañ dre bevar da heul!

1.1.4 Eriñvañ an arloadurioù, ensaezhadurioù hag kesaezhadurioù eus E da F, daou deskad bevennek hevelep ma'z eo $\mathrm{Card}(E) = p$ ha $\mathrm{Card}(F) = n \quad (n \neq 0$ ha $p \neq 0)$

1.1.4.1 Niver an arloadurioù eus $E \to F$

Un arloadur f eus E war F zo savelet gant ar p delvad en F ag ar p elfenn enbeziat en E (dre un arloadur f en deus pep elfenn ag E un delvad en F, hogen div elfenn anpar ag E a c'hell kaout an un delvad, ma n'eo ket ensaezhat f). Kement a arloadurioù bezus zo enta eus E da F ha ma'z eus a zibaboù bezus en F da zelviñ pep elfenn ag E. Hogen n elfenn zo en F, da heul evit pep hini ag ar p elfenn enbeziat en E ez eus n dibab bezus. Neuze ez eriñver:

$$\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ periad}} = n^p \quad \text{arloadur eus } E \to F.$$

n dibab evit delvad
ar gentañ elfenn ag E

n dibab evit delvad
an eil elfenn ag E

n dibab evit delvad
an p-vet elfenn ag E

E-touez an arloadurioù-se, reoù zo ensaezhat mar $p \leqslant n$, reoù all n'int ket ha mar $p > n$, hini ebet eus an arloadurioù-se ned eo ensaezhat.

Bennozh d'ur poellata dre zarren war p e c'haller dezren rik an disoc'h-se, hon eus roet un alberz nadel anezhañ.

SKOUER — Evit eriñvañ an niveroù peder sifrenn a c'haller sevel diwar an nav sifrenn: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e tegaser an teskad $\{a, b, c, d\} = E$ hag an teskad $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Sevel un niver peder sifrenn gant an nav sifrenn a c'hoarvez a savelañ un arloadur eus E da F. Kement a niveroù peder sifrenn zo enta hag a arloadurioù eus E da F, eleze 9^4 [$\mathrm{Card}(F) = 9$ ha $\mathrm{Card}(E) = 4$].

Despizadur — Arenkad gant arreadoù

Un arenkad p elfenn eus un teskad angoullo F gant arreadoù zo un arloadur eus $\{1, 2, \ldots, p\}$ war F.

Un arenkad p elfenn dibabet a-douez n elfenn un teskad F gant arreadoù zo despizet enta dre ur staladur urzhiet — gant arreadoù diouzh an dro — amparet gant p a-douez an n elfenn eus F: p elfenn zo en holl en un arenkad gant arreadoù, en un urzh savelek, reoù 'zo o revout meur a wech (betek p gwech).

Un arenkad gant arreadoù a c'hell bezañ desellet evel ul liesac'h amparet gant p elfenn eus F, ur p-ac'h a zo-hi un elfenn eus F^p. Alese niver an arenkadoù p elfenn a-douez n gant arreadoù : $\mathcal{A}_n^p = n^p$. Notañ a reer a-wechoù $a^*(n,p)$. Lavarout a reer ivez ez eo ar p-ac'h-se ur p-lerc'hiad. Merzhout e c'hell p bezañ brasoc'h eget n e degouezh an arenkadoù gant arreadoù.

1.1.4.2 Niver an arloadurioù ensaezhat eus E [Card(E) $= p$] en F [Card(F) $= n$], gant $p \leqslant n$

Un ensaezhadur f eus E en F zo savelet dre ar p delvad a'r p elfenn enbeziat en E. P'o deus div elfenn anpar ag E delvadoù anpar ez eus n delvad bezus evit ar gentañ elfenn ag E, $(n-1)$ evit an eil, $(n-2)$ evit an trede, ..., $n-(p-1)$ evit ar p-vet. Neuze:

DISOC'H DA C'HOUZOUT — Niver an ensaezhadurioù zo

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)}\ .$$

Rezhienn all:

$$\boxed{A_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)[(n-p)(n-p-1)\cdots 1]}{[(n-p)(n-p-1)\cdots 1]}}\ .$$

A se:

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}\ .$$

SKOUER — Evit eriñvañ an niveroù kevan peder sifrenn unreveziat a c'haller sevel diwar an nav sifrenn $F = \{1, \ldots, 9\}$ e vo graet evel amañ diaraok, hogen en degouezh-mañ ne vo dalc'het stad nemet eus an arloadurioù ensaezhat adal $E = \{a, b, c, d\}$ d'an teskad $F = \{1, \ldots, 9\}$ (arloadurioù o reiñ da a, b, c ha d delvadoù anpar). A se e jeder $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$. Diwar vont, niver ar c'hevanion peder sifrenn savet gant sifrennoù F hag enno ur sifrenn daoureveziat d'an nebeutañ zo par d'an diforc'h etre 9^4 hag A_9^4.

Despizadur — Arenkad hep arread

Bezet F un teskad bevennek angoullo a briñvel n ha p ur c'hevan naturel anvannel ($p \leqslant n$). Anvet e vez arenkad p elfenn ag F hep arread nep ensaezhadur eus $\{1, 2, \ldots, p\}$ en F.

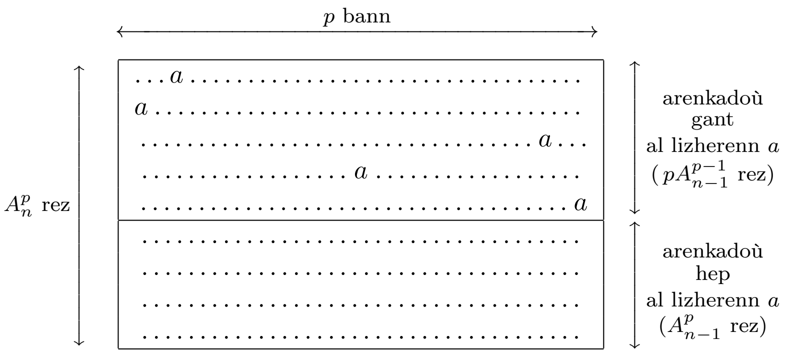
Despizañ a reer ivez an arenkad hep arread evel ur p-lerc'hiad a elfennoù unreveziat. A se ez eo anpar daou arenkad dre natur an ergorennoù a zo ennañ pe dre an urzh anezho, eleze o ibiliadur.

O vezañ ma'z eo niver an ensaezhadurioù eus $E = \{1, 2, \ldots, p\}$ en F par da A_n^p ($\mathrm{Card}(F) = n$), niver an arenkadoù p elfenn ag F zo par ivez da A_n^p. Dav kounañ atav e vez engwerc'het an urzh gant un arenkad, pep elfenn o kaout ur *renk* er staladur. Notet e vez niver an arenkadoù hep arread A_n^p, $n^{[p]}$, $(n)p$, pe $a(n, p)$.

Dienadur dre zarren

Ned eo ket aner diskouez un doare all da jediñ niver an arenkadoù hep arread. Sed enta un dienadur dre zarren :

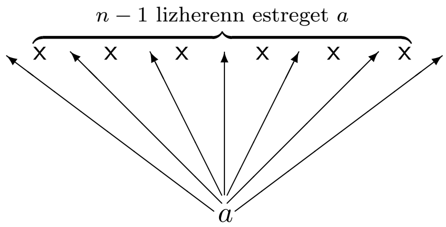
Desellomp teskad an A_n^p arenkad p lizherenn dibabet a-douez un teskad n lizherenn, renket an eil dindan egile evit amparañ ur rezi ennañ A_n^p rez.



Daou zoare zo da eriñvañ niver an arenkadoù enno al lizherenn a:

1. Niver an arenkadoù gant al lizherenn a zo par da niver al lizherennoù a er rezi, pa na c'haller ket kaout div wech ul lizherenn en un arenkad. Par eo niver pep lizherenn, p'o deus an un staelad. O vezañ ma'z eus pA_n^p lizherenn er rezi e jeder niver pep lizherenn : $\frac{pA_n^p}{n}$. A se ez eus $\frac{p}{n}A_n^p$ arenkad enno al lizherenn a.

2. Desellomp bremañ an A_{n-1}^{p-1} arenkad $p-1$ lizherenn dibabet a-douez an $n-1$ lizherenn estreget a. Diwar pep hini eus an arenkad-se e c'haller amparañ p arenkad p lizherenn a-douez n, enno al lizherenn a evel a weler amañ dindan :



Da neuze, niver an arenkadoù a-douez A_n^p enno al lizherenn a zo par da : pA_{n-1}^{p-1}. Da heul :

$$pA_{n-1}^{p-1} = \frac{p}{n} A_n^p \ .$$

A se :

$$\begin{array}{rcl} A_n^p & = & nA_{n-1}^{p-1} \\ A_{n-1}^{p-1} & = & (n-1)A_{n-2}^{p-2} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-p+2}^2 & = & (n-p+2)A_{n-p+1}^1 \ . \end{array}$$

Dre liesaat e teu :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+2)A_{n-p+1}^1 \ .$$

Hogen $A_{n-p+1}^1 = n-p+1$, niver an dibaboù eus un elfenn a-douez $n-p+1$. Da heul :

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)} \ .$$

Merzhout ivez e tisoc'her gant un daveadur darren sammadel :

$$A_n^p = A_{n-1}^p + pA_{n-1}^{p-1} \ .$$

1.1.4.3 Niver an arloadurioù kesaezhat eus $\boldsymbol{E}$ [Card($\boldsymbol{E}$) = $\boldsymbol{n}$] war $\boldsymbol{F}$ [Card($\boldsymbol{F}$) = $\boldsymbol{n}$]. Kevamsavadurioù

Delakadenn (darbennet) — Evit ma ve ensaezhat un arloadur f eus E war F ez eo ret ma ve Card(E) $\leqslant$ Card(F) hag evit ma ve arsaezhat an arloadur f ez eo ret ma ve Card(F) $\leqslant$ Card(E). A se, evit ma ve f ur c'hesaezhadur ez eo ret ma ve Card(E) = Card(F), pezh a dalvez ne c'hell bezañ ur c'hesaezhadur f eus E war F — E ha F o vezañ daou deskad bevennek — nemet mar bez dezho an un priñvel.

Ouzhpenn se ez eo spirus ma ve ensaezhat (pe arsaezhat) an arloadur evit ma ve kesaezhat mar bez Card(E) = Card(F). Niver an arloadurioù ensaezhat zo neuze A_n^p $(n = p)$. Alese an disoc'h-mañ, pa vez $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$: niver an arloadurioù kesaezhat eus E war F zo par da :

$$\boxed{A_n^n = n(n-1)\cdots(n-n+1) = n!}\ .$$

Ent dibarek, mard eo $E = F$ [an amveziad $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ zo kefleuniet], niver an arloadurioù kesaezhat eus E en E (anvet kevamsavadurioù E pe war E) zo par da :

$$\boxed{P_n = n!}\ .$$

Notañ ne empleg ket $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ ez eo kesaezhat nep arloadur f eus E da F.

EVEZHIADENN — Ur c'hevamsavadur war E zo ur c'hesaezhadur eus E war E. Alies e vez notet ur c'hevamsavadur σ war $E = \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}\ .$$

E se ez eo arveridik derc'hennañ ur c'hevamsavadur dre an n-ac'h delvad an n-ac'h $(1, 2, \ldots, n)$. Notet e vez niver ar c'hevamsavadurioù war E : A_n^n pe P_n pe $p(n)$.

EVEZHIADENN — Ar c'hevamsaviñ a gaver er poelladennoù pa vez kel a renkañ e mod pe vod an n elfenn eus an teskad (amparañ gerioù n lizherenn diwar an n lizherenn eus an teskad, amparañ niveroù gant sifrennoù, h.a.).

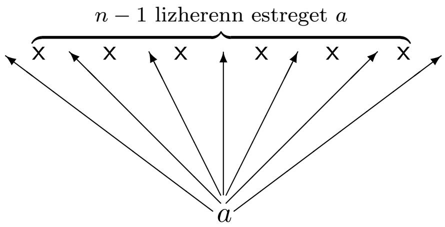
Dienadur dre zarren

Bezet un teskad n elfenn digemmadus :

$$\{a, b, \ldots, s\}.$$

Anvet e vez kevamsavadur hep arread eus an n elfenn-se — alies ne spisaer ket *hep arread* — ur staladur urzhiet eus teskad an n elfenn-se. E-se, e pep kevamsavadur hep arread e revez pep elfenn ur wech hepken en un urzh savelek.

Desellomp ar P_{n-1} kevamsavadur amparet war-bouez an $n-1$ lizherenn estreget a. Diwar pep hini anezho e c'haller sevel n a-douez ar P_n kevamsavadur hep arread ; a-walc'h eo ouzhpennañ a en unan eus an n savlec'h gallus : dirak al lizherenn gentañ, etre an hini gentañ hag an eil, …, war-lerc'h an $(n-1)$-vet lizherenn:



N'eus e seurt doare da c'henel ar P_n kevamsavadur eus n lizherenn diank ebet, na gourleizh naket. Da neuze : $P_n = nP_{n-1}$.
A se:

$$\begin{array}{rcl} P_{n-1} & = & (n-1)P_{n-2} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ P_2 & = & 2P_1 \ . \end{array}$$

Dre liesaat e teu :

$$P_n = n(n-1)\cdots 2P_1 = n!P_1 \ .$$

Hogen par eo P_1 da 1 : niver an doareoù da stalañ un elfenn unel. Neuze :

$$\boxed{P_n = n!} \ .$$

Dav eo diwall avat en degouezhioù ma'z eus en teskad lies elfenn andigemmadus. Ar gudenn-se a welomp amañ dindan.

Despizadur — Kevamsavadur gant arreadoù

En dro-mañ e teseller un teskad n elfenn amparet gant k isteskad disparti ha digemmadus ($k \leqslant n$), enno elfennoù andigemmadus o revout $n_1, n_2, \ldots, n_k$ gwech gant $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Anvet e vez kevamsavadur gant arreadoù eus an n elfenn ur staladur urzhiet eus an n elfenn o revout $n_1, n_2, \ldots, n_k$ gwech.

Delakadenn — Niver $p(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ar c'hevamsavadurioù eus n elfenn gant $n_1, n_2, \ldots, n_k$ arread zo :

$$\boxed{p(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}} \ .$$

E gwir, mar befe erlec'hiet elfennoù digemmadus ouzh pep hini eus an n_v elfenn ($v \in \{1, 2, \ldots, k\}$) elfenn andigemmadus e ve ret liesaat niver ar c'hevamsavadurioù dre $n_v!$.

Alese : $p(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) \cdot n_1!n_2! \cdots n_k! = n!$.

SKOUER — Pet tregejad a c'haller sevel diwar lizherennoù ar ger ANATAAT?

$p(7; 4, 2, 1) = \frac{7!}{4!2!1!} = 105$ tregejad eus ar ger ANATAAT.

1.2 TESKAD $\mathfrak{P}(E)$ AN ISTESKADOÙ EUS UN TESKAD BEVENNEK E

1.2.1 DESPIZADURIOÙ

1.2.1.1 Aksiomenn teskad an isteskadoù

Evit nep teskad E ez eus un teskad notet $\mathfrak{P}(E)$ a zo teskad an holl isteskadoù — pe parzhioù — eus E. Evit nep teskad E, bezoud un teskad $\mathfrak{P}(E)$ a zo e elfennoù parzhioù E zo un aksiomenn eus damkaniezh an teskadoù.

Ar c'henskejadur, ar c'hembodadur, an diforc'h hag an diforc'h kemparzhek zo dezvoù kediañ diabarzh e $\mathfrak{P}(E)$. Notañ ez eo $\mathrm{Card}\,\mathfrak{P}(E) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

EVEZHIADENN — O vezañ ma'z eo $E \subseteq E$ hag ivez $\emptyset \subset E$ evit nep teskad E e vo neuze $E \in \mathfrak{P}(E)$ hag $\emptyset \in \mathfrak{P}(E)$. Er c'heñver-se, notañ mat arver arouez ar gannadur $\subset$ evit dezgeriañ ez eo A o c'henniñ E ($A \subset E$) ha hini an enbeziadezh $\in$ evit skrivañ ez eo A enbeziat e teskad ar parzhioù eus E $[A \in \mathfrak{P}(E)]$.

SKOUER — Skrivet e vo — mard eo $E\emptyset$ — ez eo un elfenn x en E : $x \in E$. Hogen an teskad $A = \{x\}$ zo o c'henniñ E : $\{x\} \subset E$. heñvel dra : $\{x\} \in \mathfrak{P}(E)$.

1.2.1.2 Aksiomenn entalañ

Deurus e vez alies savelañ un isteskad A eus un teskad E — un elfenn diforzh anezhañ o vezañ notet x — dre ur perzh bennak p a zigemm elfennoù A diouzh an elfennoù all eus E. Da skouer bezañ ampar evit un niver kevan zo ur perzh digemmus.

Rezhiennet e vo neuze $A \in \mathfrak{P}(E)$ evel-henn : $A = \{x \in E \mid p(x)\}$. E se ez eo A teskad an elfennoù x eus E dezho ar perzh p.

1.2.1.3 Despizaduriou niñvaduriou diabarzh e $\mathfrak{P}(E)$

1. Klokadur — Savelañ a reer un niñvadur unadek e $\mathfrak{P}(E)$ anvet *klokadur* : arloet ouzh ur parzh A eus ur bondeskad E en deus da zisoc'h klokaenn A en E, notet $\overline{A}$ pe $\complement_E A$. Neuze:

$$\overline{A} = \complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\} \quad \text{pe gant} \quad A = \{x \in E \mid p(x)\},$$

e vo

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \neg p(x)\} \ .$$

2. Kenskejadur — Savelañ a reer un niñvadur daouadek e $\mathfrak{P}(E)$ anvet *kenskejadur* : arloet ouzh an div niñvuzenn A ha B, isteskadoù eus E, e ro da zisoc'h teskad an elfennoù enbeziat en A ha B war un dro. Notañ a reer :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ hag } x \in B\},$$

pe, mard eo

$$A = \{x \in E \mid p(x)\} \quad \text{ha} \quad B = \{x \in E \mid q(x)\},$$

ez eus

$$A \cap B = \{x \in E \mid p(x) \text{ ha } q(x)\} \ .$$

$A \cap B$ a reer kenskejadur an daou isteskad A ha B eus E. Mar bez $A \cap B = \emptyset$ e lavarer ez eo disparti A ha B.

3. Kembodadur — Savelañ a reer un niñvadur daouadek e $\mathfrak{P}(E)$ anvet *kembodadur* : arloet ouzh an div niñvuzenn A ha B, isteskadoù eus E, e ro da zisoc'h teskad an elfennoù enbeziat en A pe B pe en daou war un dro. Skrivañ a reer :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ pe } x \in B\},$$

hag ivez

$$A \cap B = \{x \in E \mid p(x) \text{ pe } q(x)\}.$$

$A \cup B$ a reer kembodadur an daou isteskad A ha B eus E.

EVEZHIADENN — Ar c'henskejadur hag ar c'hembodadur zo ivez daou zaveadur eus $[\mathfrak{P}(E)]^2$ etrezek $\mathfrak{P}(E)$. Lavarout a reer ivez ez int dezvoù kediañ diabarzh pe niñvadurioù diabarzh e $\mathfrak{P}(E)$. Dienaat a reer ez eo $\cap$ dasparzhat e-keñver $\cup$ hag a-geveskemm. Dienaat a reer ivez dezvoù De Morgan:

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{hag} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}\ .$$

An dienadur a ra dave d'ar perzhioù mezoniel da heul :

$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q \quad \text{hag} \quad \neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q.$$

4. Parzhadur un teskad — Ur parzhadur eus E zo un isteskad eus $\mathfrak{P}(E)$ amparet gant parzhioù angoullo disparti an eil diouzh egile a zo o c'hembodadur par da E. Da skouer, mard eo $A\emptyset$, $\{A, \overline{A}\}$ a ampar ur parzhadur eus E, rak $A \cap \overline{A} = \emptyset$ hag $A \cup \overline{A} = E$. Heñvel dra mard eo $\mathrm{Card}(E) = n$ gant $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, an n isteskad $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, ..., $\{x_n\}$ a ampar ur parzhadur eus E.

1.2.2 NIVER AN ISTESKADOÙ A BRIÑVEL p ($p \leqslant n$) EUS UN TESKAD BEVENNEK E A BRIÑVEL n. KEVOSODADOÙ

1.2.2.1 Delakadenn

Niver an isteskadoù (anvet ivez parzhioù) enno p elfenn eus un teskad E n elfenn ennañ zo :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}}\ .$$

A-wechoù e noter ivez C_n^p niver $\binom{n}{p}$ ar p-parzhioù.

Ur c'hevosodad p elfenn eus E zo nep parzh eus E ennañ p elfenn. A se, niver ar c'hevosodadoù zo hini an isteskadoù, eleze $\binom{n}{p}$.

1.2.2.2 Dienadur

1. Dre niver an arenkadoù A_n^p

Dav kounañ e c'hell un isteskad A ennañ p elfenn bezañ urzhiet e $p!$ doare, rak $p!$ kevamsavadur zo war A. Hogen pep isteskad urzhiet ennañ p elfenn eus E zo un arenkad p elfenn eus E ($\mathrm{Card}(E) = n$). Neuze, evit pep isteskad A ennañ p

elfenn ez eus $p!$ arenkad diwar elfennoù an isteskad A-se. E se e tewerzher niver an arenkadoù p elfenn eus E o liesaat dre $p!$ niver an isteskadoù enno p elfenn eus E, pezh a zisoc'h gant an niver $\binom{n}{p}$ amañ diaraok.

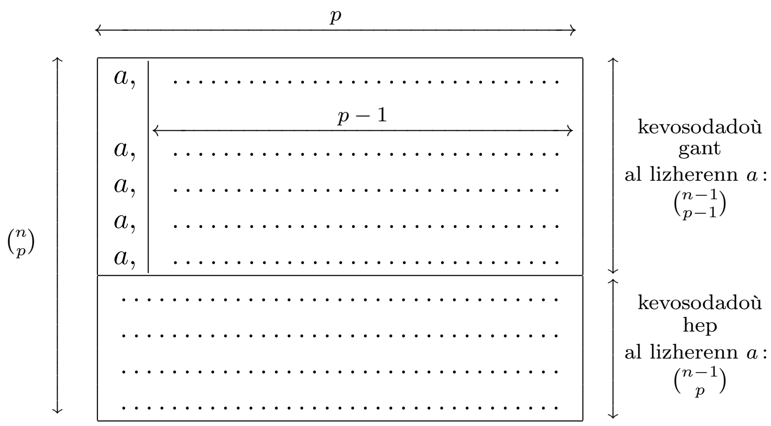
EVEZHIADENN — Evit jediñ an niveroù $\binom{n}{p}$ e vez aesoc'h alies ober gant ar rezh :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ periad}}}{\underbrace{p(p-1)\cdots 1}_{p \text{ periad}}}\,.$$

Da skouer : $\binom{13}{3} = \frac{13.12.11}{3.2.1}$. Goude ez eeunaer kent jediñ ar rannad.

2. Dre zarren

Desellomp hollad an $\binom{n}{p}$ kevosodad hep arread ennañ p elfenn dibabet a-douez n, ha stalomp ar c'hevosodadoù-se en ur rezi. Da gentañ e skrivomp ar c'hevosodadoù enno al lizherenn a ha war-lerc'h ar re hep al lizherenn a.



Daou zoare zo da zewerzhañ niver ar c'hevosodadoù enno al lizherenn a :

- **Kentañ doare**

  Niver ar c'hevosodadoù enno al lizherenn a zo par da niver reveziadennoù al lizherenn a er rezi, pa na c'hell bezañ nemet ul lizherenn a d'ar muiañ e pep kevosodad. Hogen reveziadennoù an holl lizheroù er rezi zo par, dre berzh ar c'hemparzh e-keñver pep hini eus an n lizherenn. O vezañ ma'z eus er rezi $\binom{n}{p}$ kevosodad bep a p lizherenn, eleze un hollad a $p\binom{n}{p}$ lizherenn, pep hini eus an n lizherenn a revez :

$$\frac{p\binom{n}{p}}{n} \quad \text{gwech.}$$

- **Eil doare**

Desellomp ar $\binom{n-1}{p-1}$ kevosodad $p-1$ lizherenn a c'haller amparañ diwarbouez an $n-1$ lizherenn estreget a. Ouzh pep hini eus ar c'hevosodadoù-se e c'haller kevrediñ un hag un hekpen eus ar c'hevosodadoù p lizherenn adouez an n, a en o zouez. A-geveskemm, ouzh pep kevosodad ennañ a e c'haller kevrediñ un hag un hepken eus ar $\binom{n-1}{p-1}$ kevosodad. A se ez eo par niver ar c'hevosodadoù enno a da :

$$\binom{n-1}{p-1}.$$

Dre geñveriañ an daou eriñvadur e tisoc'her gant an daveadur darrenmañ :

$$\frac{p}{n}\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1}.$$

Eleze :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

hag

$$\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-1}{p-1}\binom{n-2}{p-2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\binom{2}{n-p+2} = \frac{n-p+2}{2}\binom{1}{n-p+1}.$$

Dre liesaat e teu :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+2)}{p(p-1)\dots 2}\binom{1}{n-p+1}.$$

Hogen $\binom{1}{n-p+1}$ zo par da $n-p+1$: niver an doareoù da zibab un ergorenn a-douez $n-p+1$. Da heul :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p(p-1)\ldots 2} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \ .$$

1.2.2.3 Perzhioù an $\binom{n}{p}$-où

$\forall n \in \mathbb{N}$ hag $\forall p \in \mathbb{N},\ p \leqslant n$ ez eus :

• **Perzh 1**

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{hag} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n} \ .$$

• **Perzh 2**

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}} \ .$$

Bewech ma tibaber p elfenn a-douez n e tibaber ivez dilezel $n-p$.

• **Perzh 3** — Mard eo $1 \leqslant p \leqslant n-1$ ez eo :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}} \ .$$

Sklaer eo ez eo par niver an isteskadoù p elfenn eus E da sammad ar re a zo enno an elfenn h mui ar re all hep an elfenn h. Hogen un isteskad zo ennañ p elfenn gant h bewech ma tibaber $p-1$ elfenn a-douez an $n-1$ estreget h hag un isteskad zo ennañ p elfenn hep h bewech ma kemerer p elfenn a-douez an $n-1$ estreget h. A se e tewerzher an isteskadoù p elfenn — ar p-parzhioù — : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Dedalvezadur an trede perzh — Tric'horn Pascal

Dre zedalvout an daveadurioù $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ e c'haller sevel un daolenn dric'hornek amparet gant rezoù niverennet $0, 1, 2, \ldots, n$ ha gant bannoù niverennet $0, 1, \ldots, p$, hevelep ma ve $\binom{n}{p}$ en direnn rez n ha bann p. Hervez ar goulun amañ dindan e c'haller jediñ $\binom{n+1}{p+1}$ diwar sammad ar gwerzhadoù $\binom{n}{p+1}$ ha

$\binom{n}{p}$ ar rez a-us. Gallout a reer enta o jediñ a nes da nes diwar ar rezoù kentañ. Kentañ ha diwezhañ gwezhiader ur rez bennak zo par da 1. Nep gwezhiader all zo sammad ar gwezhiader a-us dezhañ hag an hini en direnn a-gleiz da hemañ.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$					
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	1				
$n=5$	1	5	10	$\boxed{10}$	5	1			
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\ldots$	$\boxed{\binom{n}{p}}$	$\boxed{\binom{n}{p+1}}$	$\ldots$	$\binom{n}{n}$	
$\ldots$	$\binom{n+1}{0}$	$\binom{n+1}{1}$	$\binom{n+1}{2}$	$\ldots$	$\binom{n+1}{p}$	$\boxed{\binom{n+1}{p+1}}$	$\ldots$	$\binom{n+1}{n}$	$\binom{n+1}{n+1}$

1.2.3 REOLLUN BINOM NEWTON

1.2.3.1 Reollun ar binom

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p \cdot b^{n-p}} .$$

1.2.3.2 Dienadur

Lies doare zo da zienaat reollun ar binom. Amañ dindan e vo diskouezet daou anezho.

• Poellata dre zarren

Daou lankad zo :

1. Gwiriomp ez eo gwir evit $n = 1$. Bez' ez eus : $(a+b)^1 = a+b$. Dre ar reollun e teu : $(a+b)^1 = \sum_{p=0}^{1} \binom{p}{1} a^p \cdot b^{1-p} = \binom{1}{0} a^0 \cdot b^1 + \binom{1}{1} a^1 \cdot b^0 = b + a = a + b$.

Gwir eo ar perzh evit $n = 1$.

2. Darbennomp ez eo gwir ar perzh evit $n \in \mathbb{N}^*$ ha dienaomp ez eo gwir c'hoazh evit $n+1$:

Bez' ez eus :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = (a+b)^n \cdot a + (a+b)^n \cdot b \tag{1.3}$$

Dre zarbennad darren e ouzomp : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$. Dre erlec'hiañ ar riñvenn-se ouzh $(a+b)^n$ en daveadur (1.3) e teu :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = [\tbinom{n}{0}a^0b^n + \tbinom{n}{1}a^1b^{n-1} + \cdots \\ + \tbinom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \tbinom{n}{n}a^nb^0]a + [\tbinom{n}{0}a^0b^n + \tbinom{n}{1}a^1b^{n-1} + \cdots \\ + \tbinom{n}{n-1}a^{n-1}b^1 + \tbinom{n}{n}a^nb^0]b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow\ (a+b)^{n+1} = \tbinom{n}{0}a^1b^n + \tbinom{n}{1}a^2b^{n-1} + \cdots \\ + \tbinom{n}{n-1}a^nb^1 + \tbinom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \tbinom{n}{0}a^0b^{n+1} + \tbinom{n}{1}a^1b^n + \cdots \\ + \tbinom{n}{n-1}a^{n-1}b^2 + \tbinom{n}{n}a^nb^1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow\ (a+b)^{n+1} = \tbinom{n}{0}a^0b^{n+1} + [\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1}]a^1b^n + [\tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2}]a^2b^{n-1} + \cdots \\ + [\tbinom{n}{n-1} + \tbinom{n}{n}]a^nb^1 + \tbinom{n}{n}a^{n+1}b^0\,.\end{aligned}$$

Hogen :

$$\tbinom{n}{0} = \tbinom{n+1}{0} = 1 \quad \text{hag} \quad \tbinom{n}{n} = \tbinom{n+1}{n+1} = 1,$$

hag :

$$\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} = \tbinom{n+1}{1} \quad ; \quad \tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2} = \tbinom{n+1}{2} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \tbinom{n}{n-1} + \tbinom{n}{n} = \tbinom{n+1}{n}.$$

Da heul :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = \tbinom{n+1}{0}a^0b^{n+1} + \tbinom{n+1}{1}a^1b^n + \tbinom{n+1}{2}a^2b^{n-1} + \cdots \\ + \tbinom{n+1}{n}a^nb^1 + \tbinom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0\end{aligned}$$

$$\iff (a+b)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}. \qquad \textit{Quod erat demonstrandum.}$$

Ar perzh o vezañ gwir evit ar renk $n = 1$ e c'haller dezren dre zarren ez eo gwir evit nep renk $n \in \mathbb{N}^*$.

Ar gwezhiaderioù $\binom{n}{p}$ a vez graet anezho *gwezhiaderioù binomel* ivez ha merzhout a c'haller ez eo par ar gwezhiaderioù kemparzhek, da skouer:

$$\tbinom{n}{0} = \tbinom{n}{n} = 1, \tbinom{n}{1} = \tbinom{n}{n-1}, \ldots, \tbinom{n}{p} = \tbinom{n}{n-p}.$$

• Gwezhiaderioù multinomel, hollekadur

$(a + b + \cdots + s)^m$ zo ur riñvenn bolinomel a zerez m e-keñver teskad an n argemmenn $a, b, \ldots, s$. A se ez eo he dispakadur sammad bommoù e rezh :

$$K(\alpha, \beta, \ldots, \sigma) a^\alpha b^\beta \cdots s^\sigma,$$

gant

$$\alpha + \beta + \cdots + \sigma = m; \qquad \alpha, \beta, \ldots, \sigma \geqslant 0,$$

$K(\alpha, \beta, \ldots, \sigma)$ o vezañ un arstalenn e-keñver $a, b, \ldots, s$, hogen ur gevreizhenn da $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$.

Skrivañ a c'haller :

$$(a + b + \cdots + s)^m = \underbrace{(a + b + \cdots + s) \ldots (a + b + \cdots + s)}_{\text{Liesâd } m \text{ periad par}}.$$

E dispakadur al liesâd-se ez eus un termen en $a^\alpha b^\beta \ldots s^\sigma$, mar kemerer an termen a e-barzh α eus an m periad, an termen b e β eus an m periad, . . ., an termen s e σ eus an m periad. An arstalenn K zo par da niver an doareoù da gaout un termen e $a^\alpha b^\beta \ldots s^\sigma$. Graet e vez *gwezhiader multinomel* anezhi.

Niverennomp ar periadoù eus 1 da m :

$$(a + b + \cdots + s)^m = \underbrace{(a + b + \cdots + s)}_{\text{periad } 1} \underbrace{(a + b + \cdots + s)}_{\text{periad } 2} \cdots \underbrace{(a + b + \cdots + s)}_{\text{periad } m}.$$

Skrivomp $a^\alpha b^\beta \ldots s^\sigma$ er rezh :

$$(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{\alpha \text{ gwech}}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{\beta \text{ gwech}}, \ldots, \underbrace{s, s, \ldots, s}_{\sigma \text{ gwech}}).$$

Ent hollek ez eus kement a zoareoù da gaout un termen en $a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma$ ha ma'z eus a gevamsavadurioù gant arreadoù eus an m arouezenn :

$$(a, a, a, \dots, a, b, b, \dots, b, \dots, s, s, \dots, s),$$

eleze, gant ar c'hendivizad $0! = 1$:

$$K(\alpha, \beta, \dots, \sigma) = \frac{m!}{\alpha!\beta! \dots \sigma!}.$$

E gwir, nep kevamsavadur gant arreadoù a ziskouez splann ar periadoù ma'z eo engwerc'het an α lizherenn a, ar β lizherenn b, ..., ar σ lizherenn s. Ouzhpenn se, nep doare da gaout un termen en $a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma$ a glot ouzh ur c'hevamsavadur gant arreadoù.

A se:

$$(a + b + \cdots + s)^m = \sum_{\alpha+\beta+\cdots+\sigma=m} \frac{m!}{\alpha!\beta! \dots \sigma!} a^\alpha b^\beta \dots s^\sigma.$$

A-wechoù e rezhienner :

$$\frac{m!}{\alpha!\beta! \dots \sigma!} = \binom{m}{\alpha, \beta, \dots, \sigma}.$$

Da skouer, evit $n = 2$ e tisoc'her gant reollun ar binom :

$$(a + b)^m = \sum_{\alpha=0}^{m} \frac{m!}{\alpha!(m - \alpha)!} a^\alpha b^{m-\alpha} \ .$$

1.2.3.3 Dedalvezadur reollun ar binom

• Kemeromp $a = x$ ($x \in \mathbb{R}$) ha $b = 1$, a se e teu :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (x + 1)^n = \sum_{p=0}^{n} \tbinom{n}{p} \cdot x^p$$

$$\text{rak} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N} \quad p \leqslant n, \text{ez eus} \quad b^{n-p} = 1^{n-p} = 1.$$

neuze :

$$(x + 1)^n = \tbinom{n}{0} x^0 + \tbinom{n}{1} x + \tbinom{n}{2} x^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-1} x^{n-1} + \tbinom{n}{n} x^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^n.$$

• **Ent dibarek, mard eo $x = 1$**:

e teu

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \binom{n}{0}1^0 + \binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}1^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.\end{aligned}$$

Neuze :

$$\boxed{2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}}\ .$$

A du 'rall e terc'henn $\binom{n}{p}$ evit $p \leqslant n$ niver an isteskadoù enno p elfenn a-douez an n elfenn eus un teskad. A se ez eo $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ hollad an teskadoù enno $0, 1, 2, \ldots, n$ elfenn tennet eus un teskad E_n ennañ n elfenn, eleze hollad an isteskadoù bezus eus E_n.

Hogen $\mathfrak{P}(E_n)$ zo teskad parzhioù E_n ha skrivañ a c'haller :

$$\boxed{\text{Card}(\mathfrak{P}E_n) = 2^{\text{Card}(E_n)}}\ .$$

• **Degouezh dibarek all**

Kemeromp $x = -1$. Neuze e teu:

$$(1-1)^n = \binom{n}{0}(-1)^0 + \binom{n}{1}(-1)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n = 0.$$

Neuze :

$$\boxed{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0}\ .$$

EVEZHIADENN — Pouezus eo notañ — o vezañ ma'z eo talvoudek ar reollun evit $\forall a \in \mathbb{R}$ ha $\forall b \in \mathbb{R}$ — e c'hell b bezañ leiel. Dav diwall avat ez eo muiel a^p evit p hebar ha leiel evit p ampar.

• **Arunderioù dibarek**

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2. \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Tric'horn Pascal a dalvez da jediñ ar gwezhiaderioù $\binom{n}{p}$.

• Evezhiadenn a-zivout dewerzhadur $\binom{n}{p}$ pa vez bras n

E degouezhioù zo ez eo dic'hallus jediñ $n!$. Bez' ez eus un arnesâd eus $n!$, anvet reollun Stirling, a gevaraez savelañ ur werzhad arnesadek eus $n!$:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Neuze :

$$\ln(n!) \simeq \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln\pi + \ln n) + n\ln n - n.$$

1.2.4 KEVOSODADOÙ GANT ARREADOÙ

Bezet un teskad n elfenn digemmadus :

$$(a, b, \ldots, s).$$

Graet e vez *kevosodad gant arreadoù* ennañ p elfenn dibabet a-douez n eus ur staladur anurzhiet, gant arreadoù mar bez, amparet gant p elfenn dibabet a-douez an n elfenn : en un kevosodad gant arreadoù ez eus p elfenn en holl, reoù zo anezho o revout lies gwech (betek p gwech).

E se, evit evit $n = 3$ ha $p = 2$, ez eus 6 kevosodad gant arreadoù :

$$(a, a), (b, b), (c, c)$$
$$(a, b), (a, c), (b, c).$$

Anat eo e c'hell p bezañ brasoc'h eget n, tra ma'z eo par p da n, d'ar muiañ, e degouezh ar c'hevosodadoù hep arread.

Pep kevosodad hep arread zo e-touez ar c'hevosodadoù gant arreadoù. Sklaer eo ez eus muioc'h a gevosodadoù gant arreadoù eget a gevosodadoù hep arread :

$$K_n^p > C_n^p,$$

nemet evit $p = 1$:

$$K_n^1 = C_n^1 = n.$$

1.2.4.1 Dienadur war-eeun

Desellomp un teskad n log *digemmadus* dispartiet gant $n-1$ speurenn etreat ha p boull *andigemmadus*. Eriñvomp an doareoù da renkañ ar boulloù-se el logoù, pep hini eus an n log o tegemerout diouzh an dro un niver diforzh a voulloù : $0, 1, \ldots, p$, hervez al lun amañ dindan.

a	b	c	d	e
0 0 0	0	0 0		0

Deverkomp da bep log ul lizherenn : a evit an hini gentañ, b evit an eil,. . ., s evit an hini diwezhañ. Desellomp ur c'hevosodad gant arreadoù ennañ p lizherenn dibabet a-douez $(a, b, \ldots, s)$, da skouer $(n = 5,\ p = 7)$:

$$(a, a, a, b, c, c, e),$$

ha kendivizomp ez arouez ar staladur :

- 3 boull zo el log kentañ;
- 1 voull zo en eil log;
- 2 voull zo en trede log;
- n'eus hini ebet er pevare log;
- 1 voull zo er pempet log :

Kement a zoareoù zo da renkañ ar boulloù el logoù (boulloù andigemmadus, logoù digemmadus) ha ma'z eus a gevosodadoù gant arreadoù, enno p arouezenn dibabet a-douez n : K_n^p.

Dewerzhomp an niver-se war-eeun :

Dilec'hiomp da c'hortoz an $n-1$ speurenn etreat ha dastumomp int dirak ar boulloù :

$$\underbrace{|\;|\;|\;|\;|}_{n-1 \text{ speurenn etreat}}\;\underbrace{0\;0\;0\;0\;0\;0\;0}_{p \text{ boull}}$$

Dre gevamsaviñ an $n-1$ speurenn hag ar p boull e c'haller genel ur wech hag ur wech hepken pep hini eus ar K_n^p staladur gallus.

Alese :

$$K_n^p = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!\,p!}.$$

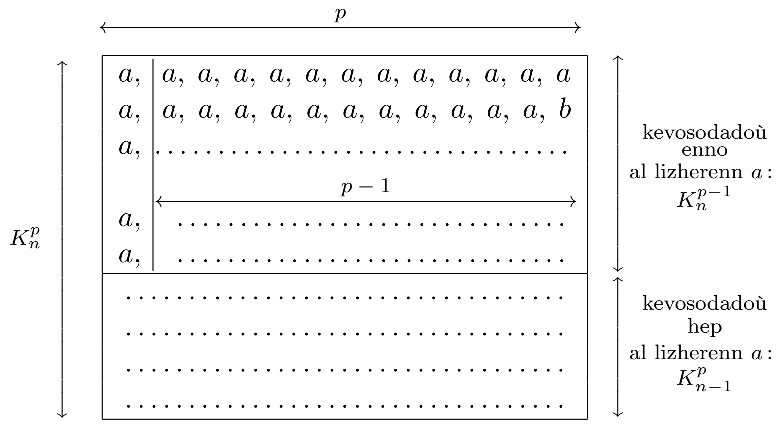
Eleze :

$$K_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

1.2.4.2 Dienadur dre zarren

Desellomp teskad ar K_n^p kevosodad p elfenn dibabet a-douez n gant arreadoù, ha renkomp int en ur rezi. Kentañ penn skrivomp ar c'hevosodadoù enno al lizherenn a ha war-lerc'h ar re hepti.

Dewerzhomp div wech niver reveziadennoù al lizherenn a er rezi.



• Kentañ doare

Er rezi ez eus en holl pK_n^p lizherenn. O vezañ ma'z eo arreet pep lizherenn an un niver a wechoù – en arbenn eus ar c'hemparzh e-keñver an n lizherenn — e revez al lizherenn a :

$$\frac{p}{n}K_n^p \quad \text{gwech.}$$

• Eil doare

Pep kevosodad gant arreadoù ennañ al lizherenn a a c'hell bezañ kevredet ouzh ur c'hevosodad gant arreadur $p-1$ lizherenn dibabet a-douez n. Da neuze ez eus K_n^{p-1} kevosodad enno al lizherenn a.

Niver reveziadennoù al lizherenn a zo par neuze da : K_n^{p-1} + niver reveziadennoù al lizherenn a en isrezi $p-1$ bann ha K_n^{p-1} rez.
En isrezi-se, ennañ $(p-1)K_n^{p-1}$ lizherenn, e revez pep lizherenn an un niver a wechoù. Neuze e revez a en isrezi :

$$\frac{p-1}{n}K_n^{p-1} \quad \text{gwech.}$$

Alese en holl, niver reveziadennoù a er rezi a-bezh :

$$K_n^{p-1} + \frac{p-1}{n}K_n^{p-1} = \frac{n+p-1}{n}K_n^{p-1}.$$

Dre geñveriañ an daou eriñvadur-se e tisoc'her gant an daveadur darren :

$$\frac{p}{n}K_n^p = \frac{n+p-1}{n}K_n^{p-1},$$

eleze :

$$K_n^p = \frac{n+p-1}{p}K_n^{p-1},$$

hag :

$$K_n^{p-1} = \frac{n+p-2}{p-1}K_n^{p-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_n^2 = \frac{n+1}{2}K_n^1.$$

Dre liesaat e teu :

$$K_n^p = \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+1)}{p(p-1)\cdots 2}K_n^1.$$

Hogen $K_n^1 = 1$: niver an doareoù da zibab un elfenn a-douez n. Da heul :

$$K_n^p = \frac{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n)}{p(p-1)\cdots 1}K_n^1 = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!},$$
$$K_n^p = \binom{n+p-1}{p}.$$

Menegomp an daveadur darren : $K_n^p = K_{n-1}^p + K_{n-1}^{p-1}$.

1.2.5 LODENNADUR HOLLEKAET

Mar lodenner n ergorenn *digemmadus* dasparzhet e m rumm (par pe anpar) e p kombod *digemmadus*, hollad an doareoù da lodennañ zo :

$$\frac{n!}{\prod_{j=1}^{p}(n_{\bullet}j)!}\ ,$$

$n_{\bullet}j$ o vezañ niver an ergorennoù lodennet er c'hombod j. E-touez an holl zoareoù da lodennañ an n ergorenn-se, ar re a glot ouzh an daolenn amañ dindan :

Kombodoù / Rummoù	$n°1$	...	$n°j$	...	$n°p$	Hollad
$n°1$						
...						
$n°i$			n_{ij}			$n_{i\bullet}$
...						
$n°m$						
Hollad			$n_{\bullet}j$			n

a eriñver dre :

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(ni_{\bullet})!}{\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{p}(n_{ij}!)}.$$

SKOUER

Pet doare zo da lodennañ ur spletad 52 kartenn etre pevar c'hoarier, hevelep ma ve dasparzhet teir fikezenn d'ar c'hoarierion A, B, C ha peder fikezenn d'ar c'hoarier D ?

Ar blegenn-se a glot gant an daolenn-mañ :

C'hoarierion / Livioù	A	B	C	D	Hollad
Pikez	3	3	3	4	13
Livioù all	10	10	10	9	39
Hollad	13	13	13	13	52

Alese niver an doareoù da zasparzhañ ar c'hartoù etre pevar c'hoarier o klotañ gant an daolenn-se :

$$\frac{13!}{3!3!3!4!} \cdot \frac{39!}{10!10!10!9!}$$

war un hollad a : $\frac{52!}{[13!]^4}$.

POELLADENNOÙ

1.01 Pet doare zo da renkañ pemp ergorenn digemmadus e-barzh teir boest (en ur voest e c'haller lakaat 0, 1, 2, 3, 4, 5 ergorenn).

1.02 Bezet an teskad pemp sifrenn $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
a) Pet niver peder sifrenn anpar a c'haller sevel diwar E?
b) Pet niver pemp sifrenn anpar a c'haller sevel diwar E?
c) Pet niver pemp sifrenn anpar pe get a c'haller sevel diwar E?
d) Pet niver c'hwech sifrenn a c'haller sevel gant ar sifrennoù : $1, 1, 2, 2, 2, 3$?

1.03 Pet doare zo da dregejañ lizherennoù ar ger KALANNA ?

1.04 Pet ger 1, 2, 3, 4 pe 5 lizherenn a c'haller sevel diwar lizherennoù ar ger BUHEZ (hep pe gant ster) ?

1.05 Pevar faotr ha teir flac'h a fell dezho azezañ war ur skaoñ. Savelañ pet doare zo d'o stalañ war ar skaoñ en degouezhioù-mañ:

a) Emañ an tri faotr kichen ha kichen, hag ar plac'hed ivez.

b) N'eus paotr ebet e-kichen ur paotr, na plac'h ebet e-kichen ur plac'h.

1.06 Bezet al lizherennoù A, B, U, V, Y.

a) Pet ger 5 lizherenn unreveziat a c'haller sevel diwar ar 5 lizherenn-se ?

b) Pet ger 5 lizherenn unreveziat a c'haller sevel, hevelep ma ne ve ket A ha Y kichen ha kichen ?

1.07 Bezet ur spletad 52 kartenn.

a) Pet doare zo da lodennañ ar c'hartoù etre pevar c'hoarier A, B, C ha D ?

b) Pet doare zo da lodennañ ar c'hartoù hervez ar blegenn-mañ:

– A a zegemer 5 treflezenn, 2 bikezenn, 4 c'heurenn ha 2 garavenn,
– B a zegemer 4 zreflezenn, 0 pikezenn, 7 keurenn ha 2 garavenn,
– C a zegemer 3 zreflezenn, 10 pikezenn, 0 keurenn ha 0 karavenn,
– D a zegemer 1 dreflezenn, 1 bikezenn, 2 geurenn ha 9 c'haravenn.

1.08 War un doug-mantilli ez eus pemp krog. Pet doare zo da ispilhañ, hep lakaat div vantell an eil war eben :
a) Teir mantell ?
b) Pemp mantell ?

1.09 O loc'hañ diwar ur gêr A e tremen un treug dre ar c'hêrioù B, C, D, E ha F.
a) Eriñvañ an treugoù bezus.
b) Pet anezho zo, hevelep ma ve D an trede kêr en treug ?
c) Pet treug zo, hevelep ma ve gweladennet ar gêr C a-raok ar gêr D ?

1.10 Pet doare zo da renkañ 5 levr war 3 astell ?

1.11 Ur c'hlasad 35 skoliad a zle dibab daou zerc'houezour. Dasparzhet eo ar skolidi e tri rumm : 7 diabarzhad, 18 diavaeziad ha 10 hanterdinellad. Pet doare zo da zibab an daou zerc'houezour, hevelep ma vefent e daou rumm disparti ?

1.12 Daouzek levr zo da renkañ war seizh astell.

a) Eriñvañ ar renkadurioù bezus.
b) Eriñvañ ar renkadurioù, hevelep ma ve ul levr da nebeutañ war bep astell.

1.13 Eus ur spletad 32 kartenn e tenner lerc'h ouzh lerc'h ur gartenn gentañ, un eil, ha goude un trede, hep o lakaat en-dro er spletad.

1° Eriñvañ an tennadurioù bezus.
2° Eriñvañ an tennadurioù bezus en degouezhioù-mañ :
a) Tennet ez eus bet teir fikezenn.
b) An eil kartenn zo ur bikezenn.
c) An eil kartenn zo ur bikezenn hag an trede ur born.

1.14 Tennañ a reer 5 kartenn war un dro eus ur spletad 32 kartenn ; e se e tenner un dornad pemp kartenn.

a) Eriñvañ an tennadurioù bezus.
b) Kavout en o zouez niver an dornadoù enno :

1. Ur born da nebeutañ;
2. Teir zreflezenn ha div bikezenn;
3. Nemet keur pe garo;
4. Ur born hepken;
5. Keur hepken pe garo hepken.

1.15 1. Dispakañ ar riñvenn $(1 + x)^n$.

2. Dre zodiñ $x = 2$, dezren ar sammad : $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$.

3. *a*) Diskouez ez eus evit an holl naturelion n ha p, hevelep ma ve $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}.$$

b) Dezren alese un dewerzhad eus ar sammad : $S = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$ e rezh $a \times 2^b$, ma'z eo a ha b kevanion naturel da savelañ.

1.16 Dezren ez eus evit nep kevan n ha nep kevan p, hevelep ma'z eo $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

1.17 Bezet E teskad ar c'hevanion naturel peder sifrenn amparet gant ar sifrennoù $1, 2, 3, 4, 5$ ha 6 (pep hini anezho a c'hell revout betek peder gwech).

a) Dewerzhañ Card(E).
b) Pet elfenn zo en E dezho sifrennoù unreveziat ?
c) Pet elfenn zo en E dezho div 1 ha div sifrenn all anpar?
d) Pet elfenn zo en E o kregiñ gant ur sifrenn ampar, an kez sifrenn oc'h ezvezañ goude ?

1.18 1. *a*) Savelañ gwezhiader an termen en a^3b^2 e dispakadur $(2a + 3b)^5$.
b) Dezren alese gwezhiader $a^3b^2c^2$ e dispakadur $(2a + 3b + c)^7$.

2. *a*) Dedalvout reollun ar binom da $(1 + i)^7$ hep amsaviñ ar gwezhiaderioù binomel gant o gwerzhadoù niverel.
b) Dre zedalvout $[(1 + i)^2]^3(1 + i)$, dewerzhañ ur rezhienn all eus $(1 + i)^7$.
c) Dezren eus *a*) ha *b*) ar sammadoù :

$$S_1 = \binom{7}{0} - \binom{7}{2} + \binom{7}{4} - \binom{7}{6} \text{ ha } S_2 = \binom{7}{1} - \binom{7}{3} + \binom{7}{5} - \binom{7}{7}.$$

1.19 Teurel a reer tri diñs war un dro, unan glas, unan gwer hag unan ruz, an talioù anezho o vezañ niverennet $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ar sifrenn war dal uhelañ pep diñs a noter. Un dennadenn zo un heuliad teir sifrenn notet diouzh an urzh : diñs glas, diñs gwer, diñs ruz.

a) Pet tennadenn vezus zo ?
b) Pet tennadenn zo, hevelep ma ve unreveziat an teir sifrenn ?
c) Pet tennadenn zo, hevelep ma ve sammad an teir sifrenn par da 15?

1.20 Un emstrivad en deus da respont en un arnodenn da zek goulenn dezho lies dibab ; evit pep goulenn ez eus pevar respont bezus.

1. Pet kloued respontoù a c'haller kaout ?
2. *a*) Pet kloued zo enno eizh respont mat rik?
b) Pet zo enno nav respont mat rik?
3. *a*) Bezet $0 \leqslant k \leqslant 10$. Dezren ez eo niver ar c'hlouedoù enno k respont mat rik : $n_k = \binom{10}{k}3^{10-k}$.
b) Dezren alese gwerzhad : $\sum\limits_{k=0}^{k=10} \binom{10}{k}3^{10-k}$.