YANN-BAOL AN NOALLEG

JEDONIEZH

I

Aljebr, Dezrann, Mentoniezh

GANT GERVAOÙ DIVYEZHEK : BREZHONEG, GALLEG

Eil embannadur reizhet

PREDER
2025

JEDONIEZH

I

Aljebr, Dezrann, Mentoniezh

YANN-BAOL AN NOALLEG

JEDONIEZH

I

Aljebr, Dezrann, Mentoniezh

GANT GERVAOÙ DIVYEZHEK : BREZHONEG, GALLEG

Eil embannadur reizhet

PREDER

2025

KENTSKRID

Pa vo skrivet istor diorreidigezh ar brezhoneg e domani ar Jedoniezh hag ar skiantoù e vo meneget hep ket a var da gentañ levr C. L. Kerjean, *Mentoniez*, embannet gant *Gwalarn* e 1934. Tonket e oa an oberenn da chom e-pad pell he unan penn el levraouegoù : 28 bloavezh a yeas hebiou kent ma kemeras al lavar skiantel e lañs en-dro en hon yezh gant kentelioù Jedoniezh S.A.D.E.D. ha war un dro ar rummadoù Fizik, Kimiezh, Bevoniezh, Armerzh, h.a., diskiblezhiioù o c'houl an anaoudegezh eus skourroù 'zo eus ar Jedoniezh. Koun 'm eus ag an entan a voe va hini o tizoleiñ al labourioù-se er bloavezhioù seikont. Plaouiañ a ris kement a gouezhe dindan va dorn ha strivañ da heuliañ an *Alioù d'ar skolidi war ar Jedoniezh* roet gant Strollad an Deskadurezh Eil Derez : "neuziañ en ho yezh dre ar munud ho meizerezh a-bezh". Spis an dezev enta, hogen ramzel an trevell.

War-dro ar bloavezhioù eikont eo e voe boulc'het an oberenn-mañ. Studiennoù liesseurt a voe kaset da benn gant kenlabourerion *Emsav* ha *Preder* : Poelloniezh (Aregoniezh ha Mezoniezh), Jedoniezh (Aljebr, Aljebr Boole, Kevosodouriezh), Arouezoniezh hag Arhentoniezh, Elektronik ivez war-benn diorren ar yezh war dachenn ar Stlenneg. Frouezh kentañ ar birvilh-se e voe *Geriadur ar Stlenneg*, gant Guy Étienne, deuet e gouloù e 1995, ennañ kalzik a hanc'herioù eus hon diskiblezh. Dek vloaz 'zo e tevredis sammañ renerezh savidigezh ul levr Jedoniezh, gant skoazell pare ar *Greizenn Imbourc'h Sturyezhouriezh* a vod yezhourion ha yezhoniourion, Goulven Pennaod en o zouez. Ar pal buket oa danzen ur benveg diazez ha dre se kinnig un hanc'herieg Jedoniezh puilh en hon yezh. Ar pennadoù embannet war ar steudad Lavar a ziskouez splann ez eus lies ment d'an egor hon eus savelet. Mar sank hon labour e wrizioù en istor ar Jedoniezh, tre betek an henamzer, amparoù all zo c'hoazh dezhañ, evel da skouer donder amzerel ar yezhoù keltiek a ro dimp loazioù puilh, pe ahel diorren ar Jedoniezh kempred.

A-dra-sur ez eo an oberenn-mañ ur bazenn gentañ. Neoazh, pourchas a ra an anaoudegezhioù rekis da dremen ar Vachelouriezh ha zoken da gregiñ gant studioù er Skol Veur evit a sell an Aljebr, an Dezrann hag ar Ventoniezh. Kavet e vo enta ar pep retañ adalek ar C'hwec'hved betek ar c'hlasoù Dibenn studi, gant astennoù o vont un tammig pelloc'h. Dre se e teuy e kerz an holl re o deus dober a Jedoniezh — skolidi, kelennerion, skiantourion — an araezioù hag an termenoù a rae diouer betek-henn, kement-se despizet e pep rikted, hep ma ve dispaket ent reizhiadek evit kelo an dienadurioù holl. Ned eo ket un dornlevr ez eo, n'eus poelladenn ebet da skouer. Nag evit se e c'hallo al lenner kavout despizadurioù, delakadennoù hag ur yoc'h skouerioù kevaraezus da veizañ an termenoù en o c'hemperzh. Ouzhpenn se emañ skoret ar c'hrefen diwar-bouez goulunioù, diervadoù ha kevregadoù e-leizh. Hep ankouaat, en dibenn, ar Gervaoù divyezhek a vo skoazellus bras, a soñj dimp, da vont-dont dre al levr, da gaout kevatal gallek un termen war-benn gouzout hiroc'h dre ar yezhoù all, da adkavout buan un dodenn bennak.

Hon mennoz eo kenderc'hel gant an erv ha kinnig en ul lankad kentañ levrioù all war ar Gevosodouriezh, ar Stadegouriezh. Diwar vremañ emañ en hon amen sevel dornlevrioù a-geñver gant pep live, pa'z eo difraostet da vat an dachenn. N'eo ket hep from e welan sevenet unan eus ar mennadoù diwanet e derou va remzad a gelenner Jedoniezh, ha heuliañ dre se an ali meneget e derou ar c'hentskrid-mañ. Mard eo mat atav an dezevout e meur a yezh, o keñveriañ pezh a vez graet evit an eil derez en Alamaneg, Kembraeg, Galleg, Saozneg e kav din ez eo ar Brezhoneg e-tailh da gemer e renk ha da entanañ an holl re mennet da ziorren ur vuhez kefredel en hon yezh.

Yann-Baol an Noalleg

Pennañ arouezioù arveret er Jedoniezh

Arouez	Anvad	skouer	lennet
$\cdot$	poent	~ liesadur : $a \cdot b$ . . . . ~ dere kevatalder : $\dot{2}$ . . . . ~ kenglenadur : $p.q$	a lies b daou (us)poent p HA q
:	daoubik	~ rannadur : $3 : 2$	tri rann daou
,	skej	~ teskad : $\{a, b, c\}$ . . . . ~ daouac'h: (a, b) . . . . ~ liesac'h : $(a_1, \ldots, a_n)$ . . . . ~ skejel : 3, 14 (a-wechoù . . . . ur pik e-lec'h ar skej 3.14)	teskad a, b, c daouac'h a, b liesac'h a unan, …, a [en] tri skej pevarzek (tri pik pevarzek)
$'$ $''$ $'''$	ask daouask triask	~ meneg : a' . . . . ~ 1ñ, 2l, 3e diarroudenn : . . . . f', f'', f'''	a kent f kent, f eil, f trede
$-$	gourzhell	~ diforc'h : $3-2$ . . . . ~ diforc'h teskadoù : E − F . . . . . ~ niver leiel : -5 . . . . ~ mac'h leiel : x^{-2} . . . . ~ keveskemmenn : f^{-1} . . . . ~ teskad niveroù leiel : $\mathbb{R}^{-1}$	tri lei daou, tri lam daou E lei F lei pemp x mac'h lei daou f lei unan gwerc'helion leiel, $\mathbb{R}$ lei

Arouez	Anvad	skouer	lennet
—	usrezell	~ muzul aljebrel : $\overline{AB}$ . . . . ~ nac'hadur : $\overline{p}$ . . . . ~ klokaenn un teskad : $\overline{A}$ . . . . ~ keveilad ur c'hemplezh : $\overline{z}$	muzul aljebrel AB NANN p klokaenn an teskad A keveilad z
\	kilveskell	~ diforc'h daou deskad $\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$ lei mann
/	beskell	~ teskad rannad $E/\mathscr{R}$ . . . . ~ rannadur : $\pi/3$	E war $\mathscr{R}$, E rann $\mathscr{R}$ pi war tri, pi rann tri
|	serzhell	~ rannadur rik : $b\|a$ . . . . ~ arouez Sheffer : A | B	b a rann rik a, b ranner a A NAG B
↓	ginspeg	~ arouez Peirce (uenac'hadur) : A ↓ B . . .	A NAPE B
—	rezell	rannadur : $\dfrac{a}{b}$	a rann b, a war b
=	divrezell	~ parder : $a = b$	a par da b
//	divveskell	kensturder : $d//d'$	d kenstur da d'
+	kroaz	~ sammadur : $x + a$ . . . . ~ niver muiel : $+\sqrt{a}$ . . . . ~ teskad niveroù muiel : $\mathbb{R}^+$	x mui a, x samm a mui bon a gwerc'helion muiel, $\mathbb{R}$ mui
∓	gourzhell kroaz	~ leiel pe vuiel : $\mp x$ . . . . ~ lamadur pe sammadur : 1 ∓ 2	leimui x unan leimui daou
±	kroaz gourzhell	~ muiel pe leiel : $\pm x$ . . . . ~ sammadur pe lamadur : 1 ± 2	muilei x unan muilei daou
×	beskroaz	~ liesadur : A × B	A lies B, A dre B
⊥	gin-te	~ niñvadur : $x \perp y$ . . . . ~ kenserzhder : $d \perp d'$	x gin-te y d kenserzh da d', d a-serzh war d'
⊤	te	~ niñvadur : $a \top b$	a te b

Arouez	Anvad	skouer	lennet
$\neg$	krogell	~ nac'hadur un erganad : $\neg p$	NANN p
$\wedge$	kernell	~ kenglenadur : $p \wedge q$ . . . . ~ brasañ kenranner : $a \wedge b$ . . . . ~ liesadur sturiadel : $\vec{u} \wedge \vec{v}$	p HAG q a brak b $\vec{u}$ stur $\vec{v}$
$\vee$	trezell	~ disglenadur : $p \vee q$ . . . . ~ bihanañ kenlieskement : $a \vee b$ . . .	p PE q a bik b
$<$	konkell	~ daveadur urzhiañ strizh : $x < 2$	x bihanoc'h strizh eget daou
$>$	kilgonkell	~ daveadur urzhiañ strizh : $x > 3$	x brasoc'h strizh eget tri
$\vdash$	kilstokell	~ trereadur (emplegadur jedoniel) : $p \vdash q$	p trere q
$\vdash\!\dashv$	uestokell	~ kevatalder jedoniel : $p \vdash\!\dashv q$	p kevatal da q
$\equiv$	teirrezell	~ kewez : $x \equiv y \pmod{n}$	x kewez da y modulo n
$\neq$	divrezell beskan	~ anparder : $x \neq 0$	x anpar da vann
$\leq$	konkell rezell	~ daveadur urzhiañ ledan : $a \leq 2$	x bihanoc'h pe bar ouzh daou
$\geq$	kilgonkell rezell	~ daveadur urzhiañ ledan : $x \geq 5$	x brasoc'h pe bar ouzh pemp
$\sqrt{}$	gavr	~ daouvonañ : $\sqrt{a}$	~ bon a
$\sqrt[n]{}$	n-gavr	~ n-vonañ : $\sqrt[n]{a}$	~ n-von a

Arouez	Anvad	skouer	lennet
$\veebar$	divdrezell	~ disglenadur ezkaelat (ezkaeladur) : $p \veebar q$	p NO q
#	divrezell daouveskan	~ dambarder : $x\#2,5$	x dambar da daou skej pemp
$\triangle$	delta	~ diforc'h kemparzhek : $A \triangle B$ ... ~ forc'had : $\triangle x$	A delta B delta x
$\longrightarrow$ $\xrightarrow{f}$ $\rightarrow$	bir pe bir us-f bir	~ kevreizhenn, arloadur : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ .... ~ harz : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\mathbb{R}^+$ etrezek (da, en , war) $\mathbb{R}$ (hervez an degouezh) harz $f(x)$ pa denn x war-du x_0
$\longmapsto$	kilstokell bir	~ delvad un elfenn : $x \longmapsto f(x)$	x delv $f(x)$
$\longrightarrow$	usvir	~ sturiadell : $\overrightarrow{AB}$ .... ~ sturiadell : $\vec{u}$	sturiadell AB sturiadell u
$\Longrightarrow$	divrezell bir	~ emplegadur mezoniel : $p \Longrightarrow q$	p empleg q
$\Longleftrightarrow$	divrezell uevir	~ kevemplegadur mezoniel : $p \Longleftrightarrow q$	p kevempleg q (p kevatal da q)
| |	serzhelloù	~ gwerzh dizave : $\|x\|$ .... ~ moll ur c'hemplezh : $\|z\|$	gwerzh dizave x moll z
( )	krommelloù	~ niñvadurioù kenheuilh : $x(x+1)$ .... ~ daouac'h, liesac'h : (a,b)	x krommell x mui unan kilgrommell daouac'h a, b
{ }	briataennoù	~ teskad : $\{a,b,c\}$	teskad a, b, c

Arouez	Anvad	skouer	lennet
[ ]	sonnelloù	~ niñvadurioù kenheuilh : $x[x+x(x+1)]$ ...... ~ entremez serr : $[a, b]$ .... ~ regenn serr : $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$	x sonnell x mui x periad x mui unan kilsonnell entremez serr a, b regenn serr A, B
] [	kil-sonnelloù	~ entremez digor : $]2, 3[$.......... ~ regenn digor : $]\mathrm{A}, \mathrm{B}[$	entremez digor 2, 3 regenn digor A, B
[[	talkein-sonnelloù	~ entremez leddigor : $[a, b[$	entremez a, b digor a-zehou ha serr a-gleiz
]]	keintal-sonnelloù	~ regenn leddigor : $]\mathrm{A}, \mathrm{B}]$	regenn A, B digor a-gleiz ha serr a-zehou
⟨ ⟩	konkelloù	~ delvadur parzh un teskad : $f\langle \mathrm{A} \rangle$	delvad A, [ef a]
‖ ‖	div-serzhelloù	~ reolad : $\Vert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\Vert$	reolad $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
∪	kopell	~ kembodadur : $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$	A kembod B
∩	gingopell	~ kenskejadur : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$	A kenskej B
⊂	kevell	~ gannadur strizh : $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$.........	A gann (o c'henniñ) U
⊆	kevell (is)rezell	~ gannadur ledan : $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$	A gann pe bar da B
⊃	kilgevell	~ endalc'hadur : $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$	A endalc'h B, A gannet gant B
⊇	kilgevell (is)rezell	~ endalc'hadur ledan : $\mathrm{A} \supseteq \mathrm{B}$	A endalc'h pe bar da B
⊄	kevell beskan	~ angannadur : $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{E}$	A angann E
∈	tribiz	~ enbeziadezh : $x \in \mathrm{A}$	x elfenn eus A, x enbez A
∉	tribiz beskan	~ ezveziadezh : $x \notin \mathrm{B}$	x ezvez B

Arouez	**Anvad**	**skouer**	**lennet**
$\varnothing$	korell beskan	~ teskad goullo : $\mathrm{S} = \varnothing$	S par d'an teskad goullo
$\frown$	kouc'hell	~ gwarenn gelc'h : $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$	gwarenn AB
$\rightarrow$	kouc'hell bir	~ gwarenn gelc'h durc'haet : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ..	gwarenn durc'haet AM
$\widehat{\ }$	tog	~ korn mentoniel : $\widehat{xOy}$	korn x O y
$\prec$	freilh	~ daveadur urzhiañ strizh : $a \prec b$	a a-raok b
$\preccurlyeq$	azfreilh	~ daveadur urzhiañ ledan : $a \preccurlyeq b$	a a-raok b
$\sim$	tonnell	~ kevarzhder : $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \sim (\mathrm{C}, \mathrm{D})$	an daouboent AB kevarzh d'an daouboent CD
$\cong$	tonnell divrezell	~ dambarder : $a \cong b$	a dambar da b
$\circ$	nezell	~ kediadur : $f \circ g$	f ked g, f nez g
$*$	sterenn	~ niñvadur : $a * b$................ ~ teskad : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^*$, ...	a sterenn b $\mathbb{N}$ sterenn, $\mathbb{R}$ sterenn, ...
∞	klomell	~ anvevenn	anvevenn
$+\infty$	kroaz klomell	~ muianvevenn	muianvevenn
$-\infty$	gourzhell klomell	~ leianvevenn	leianvevenn
$\pm\infty$	kroaz gourzhell klomell	~ muileianvevenn	muileianvevenn
$\forall$	gin-A	~ hollerdalader : $\forall x \in \mathbb{R}$	holl x-où enbeziat en $\mathbb{R}$
$\complement$	ke	~ klokaenn : $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{A}$	klokaenn A e-keñver E

Arouez	Anvad	skouer	lennet
$\exists$	kil-E	~ darnerdalader : $\exists x \in \mathbb{Z}$	bout zo un x enbeziat e $\mathbb{Z}$ da nebeutañ...
$\exists\,!$	kil-E sikell	~ darnerdalader : $\exists !x$	bout zo un x hepken
$\sum_{i=1}^{n}$	sigma bras	~ sammata	sigma, sammad eus i par da unan da n
cos, sin, tan, cot	cos, sin, tan, cotan	~ kevreizhennoù kelc'hel	kosinuz, sinuz, tangent kotangent
$\bigoplus$	kroaz argoran	~ ezkaeladur : $p \oplus q$ .... ~ dezv gediañ sammadel	p NO q mui
$\bigotimes$	beskroaz argoran	~ dezv gediañ liesadel : $E_1 \otimes E_2$ ...	E unan lies E daou
d	de	~ pellder : $d(x, y)$ .... ~ orgemmenn : $\mathrm{d}f$	[de iks ye], pellder x, y [de ef]
n !	n sikell	~ dasperiad : 3 !	dasperiad tri, tri sikell
$\int$	siliell	~ sammegenn : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	sammegenn $f(x)\,\mathrm{d}x$ eus a da b
σ	sigma bihan	~ kevamsavadur : $\sigma(a)$	sigma a, kevamsavad a
$\vert$A	serzhell A	~ strishadur : $f_{\vert A}$	strishâd f da A
$\mathscr{P}$	pe	~ teskad ar parzhioù : $\mathscr{P}(A)$	[pe a], teskad parzhioù A

Arouez	Skouer	lennet
det	~ didermenant an oged A : det A	didermenant A
id	~ arunadur : id_{E}	arunadur war an teskad E
inf	~ isvonn : $a = \inf \mathrm{A}$	a par da isvonn A
sup	~ usvonn : $b = \sup \mathrm{A}$	b par da usvonn B
$f^{(n)}$	~ n-vet diarroudenn	n-vet diarroudenn, [ef] n–vet
$(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$	~ familh : $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$	familh an elfennoù x meneget dre I
dim	~ ment un teskad : dim A	ment A, [dim] A
lim	~ harz : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	harz $f(x)$ pa denn x war-du x_0
ln	~ logaritm neperel : $\ln a$	[el en] a, logaritm neperel a
$(a_{ij}), M$	~ oged	[a i ji], [em]
ker	~ kraoñell ur c’hendelvadur : ker (f)	ker [ef], kraoñell [ef]
$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$	~ heuliad	heuliad [u en]
max	~ elfenn vrasañ (uc’hegenn) : max A	[maks] A, uc’h A
min	~ elfenn vihanañ (izegenn) : min B	[min] B, is B
$\mathscr{R}$	~ daveadur daouadek : $a\mathscr{R}b$	a [er] b
Re	~ lodenn werc’hel ur c’hemplezh : $\mathrm{Re}\,(z)$ . .	lodenn werc’hel z
Im	~ lodenn derc’hel ur c’hemplezh : $\mathrm{Im}\,(z)$ . . .	lodenn derc’hel z
Arg	~ arguzenn ur c’hemplezh : Arg (z)	arguzenn z
i	~ kemplezh (0, 1)	i
exp	~ argemmvac’henn : exp (x)	argemmvac’henn x, [eksp] x

TESKADOÙ HA NIVEROÙ

1. DAOUAC’H

• Un daouac’h a c’hoarvez eus div ergorenn x ha y kemeret en urzh-se ha notet (x, y), a lenner “daouac’h xy”.

• x ha y a anver daveennoù an daouac’h (x, y) pe kedrannoù, pe c’hoazh bannadoù an daouac’h (x, y).

• x zo kentañ kedrann pe kentañ bannad — a noter a-wechoù : $\mathrm{bn}_1(x, y)$ — pe c’hoazh ledenn an daouac’h (x, y).

• y zo eil kedrann pe eil bannad — a noter a-wechoù : $\mathrm{bn}_2(x, y)$ — pe c’hoazh hedenn an daouac’h (x, y).

Daouac’h	**Kedrannoù**	**Anvet**
(a, b)	$a \in \mathbb{N}$ ha $b \in \mathbb{N}$	mentel
(a, b)	$a \in \mathbb{D}$ ha $b \in \mathbb{D}$	stern
(A, B)	A ha B zo poentoù a’n eeunenn pe a’r blaenenn	daouboent
$(\mathrm{E}, *)$	E zo un teskad, $*$ un niñvadur diabarzh en E	teskad E dezhañ un niñvadur diabarzh *
$(\mathrm{O}, \vec{u})$	O zo ur poent, $\vec{u}$ ur sturiadell anvannel	dealf un eeunenn
(D, g)	D zo un eeunenn, g un dereziadur anezhi	eeunenn dereziet dre g
$(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$	Ox ha Oy zo ledeeunennoù	daouac’h ledeeunennoù
$(\vec{u}, \vec{v})$	$\vec{u}$ ha $\vec{v}$ zo sturiadelloù (ankenroud)	daouac’h sturiadelloù diazez ar blaenenn

2. TRIAC'H

• Un driac'h a c'hoarvez eus teir ergorenn x, y, z kemeret en urzh-se ha notet (x, y, z), a lenner "triac'h xyz".

• x, y ha z a anver kedrannoù an driac'h (x, y, z).

• x zo ar gentañ kedrann, y an eil kedrann, z an trede kedrann.

Triac'h	Kedrannoù	Anvet
(A, B, C)	A, B, C zo poentoù a'r blaenenn	trifoent pe tric'horn
$(O, \vec{u}, \vec{v})$	O zo ur poent, $\vec{u}$ ha $\vec{v}$ sturiadelloù ankenroud	dealf ar blaenenn
$(E, *, \perp)$	E zo un teskad, $*$ ha $\perp$ daou niñvadur diabarzh en E	teskad E dezhañ daou niñvadur diabarzh $*$ ha $\perp$.

3. PEVARAC'H

• Ur bevarac'h a c'hoarvez eus peder ergorenn x, y, z, t , kemeret en urzh-se ha notet : (x, y, z, t).

• x, y, z, t a anver kedrannoù ar bevarac'h (x, y, z, t).

Pevarac'h	Kedrannoù	Anvet
(A, B, C, D)	poentoù a'r blaenenn eo A, B, C, D	pevarzueg (pe pevarc'horn)
$(E, *, \perp, \leqslant)$	un teskad eo E, daou niñvadur diabarzh en E eo $*$ ha $\perp$, un daveadur urzhiañ en E eo $\leqslant$.	teskad dezhañ daou niñvadur diabarzh $*$ ha $\perp$, urzhiet dre $\leqslant$.

4. ERGORENNOÙ PAR

• Evit dezgeriañ e terc'henn a ha b an un ergorenn e lavarer ez eo par a ha b.
Skrivañ a reer : $a = b$, a lenner "a zo par da b" pe "a ha b zo par".

• Evit dezgeriañ ez eo an daouac'hoù (x, y) ha (x', y'), hevelep ma'z eo $x = x'$ ha $y = y'$, e lavarer ez eo par an daouac'hoù (x, y) ha (x', y'), pe ez eo an daouac'h (x, y) par d'an daouac'h (x', y').

Skrivañ a reer : $(x, y) = (x', y')$, a lenner "(x, y) par da (x', y')".

• Heñvel dra evit triac'hoù, pevarac'hoù, h.a.

• Daou niver zo par mar ha nemet mard eo mannel o diforc'h. E se ez eo keitvent div regenn ha par o regad. Heñvel dra $3 + 2 = 5$, a lenner "tri mui daou zo par da bemp". Lavarout a reer ivez ez eo "$3 + 2 = 5$" ha "$3 + 2 = 2 + 1$" daou barder. An eil zo un erganad faos hag egile un erganad gwir. O treuzfurmiñ an div gazel eus ar parder kentañ e tisoc'her gant "$5 = 5$" a zo un arunder. E se ez eo an arunder ur parder gwir.

• Dre hollekaat e reer ivez "parder" eus un erganad evel :

"*Riñvenn 1* = *Riñvenn 2*".

An arouez "=" a lenner "par da". Pa c'haller treuzfurmiñ an div gazel ha disoc'h gant un erganad eus ar rezh "*Riñvenn 3* = *Riñvenn 3*" e komzer eus arunder, eleze ur parder gwir.

• Er ventoniezh, mar skriver A = M (A o vezañ ur poent digemm e savlec'h ha M ur poent argemmus e savlec'h (o tilec'hiañ)) e talvez e teu M en arun gant A. Lavarout a reer ivez ez eo par M hag A. Bezet daou boent A ha A′. Mar dezreer o deus A hag A′ an un perzhioù, e lavarer ez int par.

5. ERGORENNOÙ ANPAR

• Evit dezgeriañ e terc'henn a ha b div ergorenn diouto o unan ha n'eo ket unan hepken, e lavarer ez eo anpar a ha b.

Skrivañ a reer : $a \neq b$, a lenner "a anpar da b".

• Evit dezgeriañ ez eo an daouac'hoù (x, y) ha (x', y'), hevelep ma'z eo $x \neq x'$ pe $y \neq y'$ e lavarer ez eo anpar an daouac'hoù (x, y) ha (x', y'), pe ez eo an daouac'h (x, y) anpar d'an daouac'h (x', y').

Skrivañ a reer :$(x, y) \neq (x', y')$, a lenner "(x, y) anpar da (x', y')".

Skouer : $(1,2) \neq (2,1)$.

• Heñvel dra evit triac'hoù, pevarac'hoù, h.a. Daou niver zo anpar mar ha nemet ma n'eo ket mannel o diforc'h.

• Dre hollekaat, en un erganad evel "*Riñvenn 1* $\neq$ *Riñvenn 2*", e lenner "anpar da" an arouez "$\neq$".

• Evit a sell daou boent A ha B, hevelep ma'z eo $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, e lavarer ez int anpar, pe A zo anpar da B. Lavaret e vez ivez ez eo A ha B daou boent diforc'h. Daou lun mentoniel anpar a c'hell bezañ par o gorread. Daou lun anpar a c'hell bezañ keitvent.

6. TESKAD SAVELET DRE AN ERDAL

• Un teskad un elfenn a hepken ennañ a anver undañv, notet $\{a\}$.

Skouer : Bezet div eeunenn E hag E' dezho ur poent boutin M (ur c'henboent) hepken. Skrivañ a reer :

$$\mathrm{E} \cap \mathrm{E}' = \{\mathrm{M}\}.$$

• Un teskad, an div elfenn a ha b hepken ennañ, a anver re pe ivez daoudañv, notet $\{a, b\}$.

Skouer : Bezet an undañvoù $\{0\}$ ha $\{1\}$. Skrivet e vo :

$$\{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$$

.

• Anv a reer ivez eus tridañv, perdañv, pemtañv, c'hwedañv, seitañv, eitañv, navdañv, dektañv, h.a.

• Un teskad zo savelet dre an erdal pa anavezer e holl elfennoù (e erdalad).

• An arouez $\cup$ zo hini ar c'hembodadur ha $\cap$ zo hini ar c'henskejadur.

$\mathrm{E} \cup \mathrm{E}'$a lenner "E kembod E kent".

$\mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$ a lenner "E kenskej E kent".

7. ENBEZIADEZH, EZVEZIADEZH

• Evit dezgeriañ ez eo an ergorenn x un elfenn eus an teskad E e noter $x \in$ E, a lenner "x zo elfenn eus an teskad E", "emañ x en teskad E", "x zo enbeziat en E", "x enbez E". Un daveadur etre un elfenn hag un teskad eo an enbeziadezh.

~ Bezet A an teskad $\{a, b, c, d\}$. Gwir eo an dezrevell $a \in$ A ; faos eo $e \in$ A.

~ Bezet [MN] ur regenn serr. Gwir eo an dezrevell N $\in$ [MN].

~ Bezet [MN[ur regenn digor. Faos eo an dezrevell N $\in$ [MN[.

• Evit dezgeriañ ned eo ket an ergorenn x un elfenn eus an teskad E e noter $x \notin$ E, a lenner "x ned eo ket elfenn eus an teskad E", "n'emañ ket x en teskad E", "x zo ezveziat en E", "x ezvez E".

Skouer : E = $\{a, b\}$. Gwir eo an dezrevell $x \notin$ E.

8. TESKAD GOULLO

• Darbenn a reer ez eus un teskad elfenn ebet ennañ. An teskad-se a anver teskad goullo. Notañ a reer : $\emptyset$ pe $\{\,\}$.

Skouer : Bezet D ha D$'$ div eeunenn kenboent ebet dezho.

Skrivañ a reer : D $\cap$ D' = $\emptyset$.

Evezhiadenn : Bezet 0 an niver mann. Skrivañ a reer : $\{0\} \neq \emptyset$.

• An teskad goullo a seller evel parzh eus forzh petore teskad E. An teskad goullo a anver parzh goullo an teskad E. Bezet un teskad A. Skrivañ a reer $\emptyset \subset$ A.

Evezhiadenn : Bezet 0 an niver mann. Skrivañ a reer $\emptyset \subset \{0\}$.

9. TESKADOÙ PAR, TESKADOÙ ANPAR

• Evit dezgeriañ o deus an teskadoù E ha F an un elfennoù e lavarer ez int par.

Notañ a reer : $E = F$, a lenner “E zo par da F”.

• E ha F zo par mar ha nemet mard eo $E \subset F$ ha $F \subset E$.

• Evit dezgeriañ ez eus d’an nebeutañ un elfenn eus E nad eo ket elfenn eus F e lavarer ez eo anpar an teskadoù E ha F, pe ez eo E anpar da F.

Notañ a reer : $E \neq F$.

10. GANNADUR, ANGANNADUR

• Anvet e vez parzh a’n teskad T — pe isteskad a’n teskad T — nep teskad a zo an holl elfennoù anezhañ, mar bez, enbeziat en teskad T, pe an teskad goullo. Evit dezgeriañ ez eo an teskad A ur parzh eus an teskad T e noter $A \subset T$, a lenner “A parzhiat e T”, pe “A gann T”, pe “A e-barzh T”. Arouez ar gannadur eo $\subset$.

~ Graet e vez parzh leun a’n teskad T eus an teskad T e unan.

~ Graet e vez parzh goullo a’n teskad T eus an teskad goullo.

~ Ur parzh kewer eus an teskad T zo nep parzh na leun na goullo.

<u>Evezhiadenn</u> :

~ Diforc’hañ a reer ar gannadur strizh, arouezet dre $\subset$, hag ar gannadur ledan, aroueziet dre $\subseteq$. Evit dezgeriañ ned eo ket an teskad B ur parzh eus un teskad T e skriver $B \not\subset T$, a lenner “B anparzhiat (anendalc’het) e T”, “ B angann T”. Arouez an angannadur eo $\not\subset$.

~ A-wechoù, evit dezgeriañ ez eo an teskad C parzhiat en un teskad T e skriver $T \supset C$, a lenner “T endalc’h C”, “T gannet gant C”. E se e lavarer ivez ez eo C endalc’het e T.

11. KLOKAENN

• Klokaenn ur parzh A eus un teskad T zo teskad B an elfennoù ezveziat en A. An teskad-se a noter $\complement_T A$. Lavarout a reer ivez ez eo B klokaenn A e-keñver T, pe ez eo A ha B daou deskad kenglokaus.

• En degouezh ma'z eo roet an teskad dave T — ar bondeskad — ha sklaer d'an holl, e noter $\overline{\mathrm{A}}$ evit $\complement_T A$, a lenner "A (us)rezell".

• Parzhioù kenglokaus en teskad T a reer eus daou barzh un teskad T, mard eo unan klokaenn egile e-keñver T.

Evezhiadenn : $\complement_T A = \mathrm{T} \setminus \mathrm{A}$ a lenner "T lei A" (notet ivez $\mathrm{T} - \mathrm{A}$)

Dezvoù de Morgan : $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$; $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

12. TESKAD PARZHIOÙ UN TESKAD

• Teskad parzhioù un teskad T zo an teskad amparet gant holl barzhioù T, parzh goullo ha parzh leun en o zouez.

An teskad-se a noter $\mathscr{P}(\mathrm{T})$, a lenner [pete].

Skouer : $\mathrm{F} = \{0, 1\}$. $\mathscr{P}(\mathrm{T}) = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\big\}$

Evezhiadenn : $\emptyset \subset \mathscr{P}(\mathrm{T})$, $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

• Ur parzhadur eus un teskad T zo un teskad parzhioù angoullo eus T, disparti an eil diouzh egile, hevelep ma'z eo ar c'hembodadur anezho par d'an teskad T.

Skouer : Bezet un teskad T savelet dre $\mathrm{T} = \{0, 1, 2\}$. Parzhadurioù T zo an teskadoù :

$$\mathscr{P}_1 = \big\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\big\},\ \mathscr{P}_2 = \big\{\{0\}, \{1, 2\}\big\},\ \mathscr{P}_3 = \big\{\{0, 1\}, \{2\}\big\},$$
$$\mathscr{P}_4 = \big\{\{1\}, \{0, 2\}\big\}.$$

Evezhiadenn : Ur parzhadur eus un teskad T zo ur parzh eus $\mathscr{P}(\mathrm{T})$.

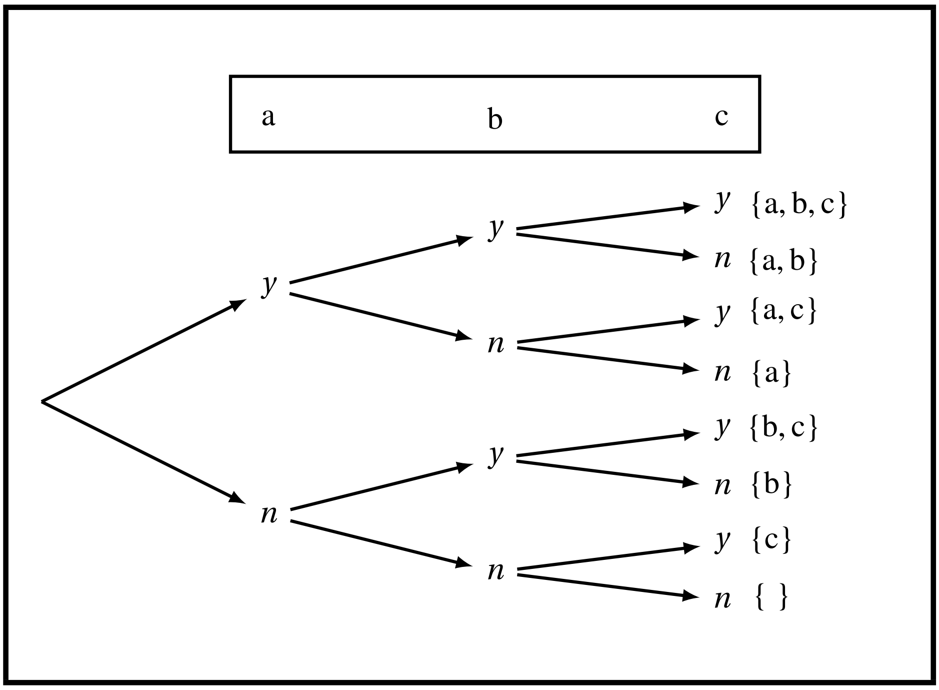
• Un teskad roet T a studier an elfennoù pe ar parzhioù anezhañ a vez graet teskad dave pe c'hoazh bondeskad anezhañ.

13. GWEZENN

• Gwezenn a reer eus ur goulun amparet gant poentoù ha biroù. Diouzh ur poent bennak e c'hell loc'hañ lies bir, n'eus nemet unan a zegouezh dezhañ avat. Talvezout a ra ur wezenn da lakaat a-wel an holl c'hoarvezusterioù a gaver en ur blegenn roet.

Skouer :

Gwezenn parzhioù un teskad $\{a, b, c\}$. Kavout a reer $2^3 = 8$ parzh, en o zouez ar parzhioù leun ha goullo.



"y" a ziskouez bezañs an elfenn ha "n" an ezvezañs anezhi.

Evezhiadenn :

Nep elfenn eus ar wezenn, e-maez ar wriziennn, zo merc'h d'un elfenn all, ha da unan hepken ; diouti e teu un pe lies iswezenn da verc'h(où), pe n'he deus merc'h ebet, hag an anv delienn a roer dezhi neuze.

14. DIERVAD VENN, DIERVAD CARROL

• Un diervad Venn (anvet c'hoazh diervad Euler) a reer eus ur goulun o terc'hennañ un pe lies teskad. Sed amañ dindan un nebeut skouerioù o tiskouez :

~ kenskejadur daou pe dri zeskad,

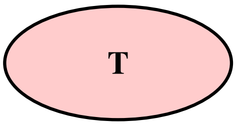
~ kembodadur daou deskad,

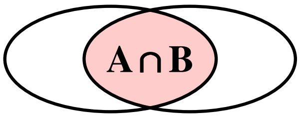
~ gannadur un teskad T gant un teskad A,

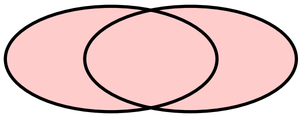
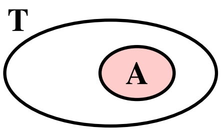
~ diforc'h daou deskad,

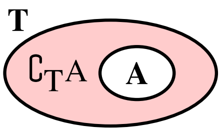
~ diforc'h kemparzhek daou deskad,

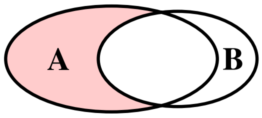
~ klokaenn un teskad A e-keñver un teskad T.

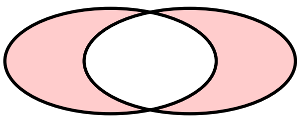
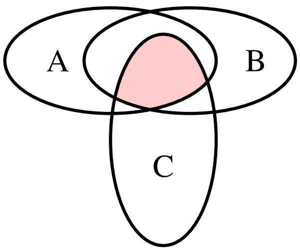
<table>
<tr>
<td>

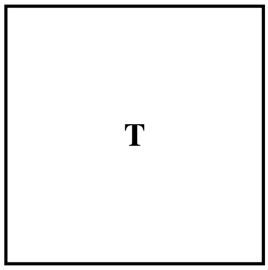
Teskad T</td>
<td>

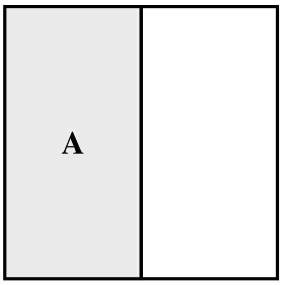
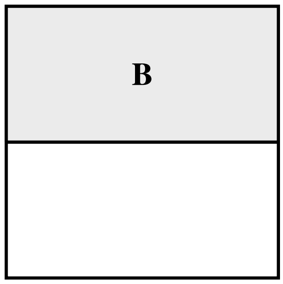
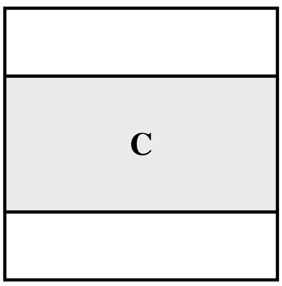
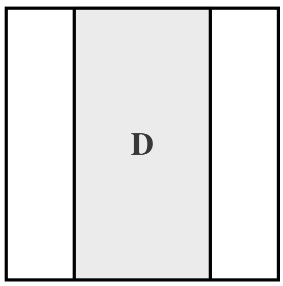
Kenskejadur A ha B :
$A \cap B$</td>
<td>
Kembodadur A ha B :
$A \cup B$</td>
</tr>
<tr>
<td>

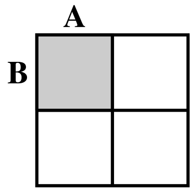
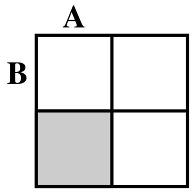
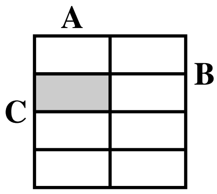
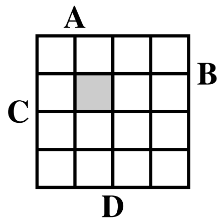
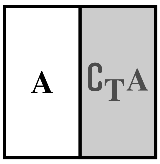
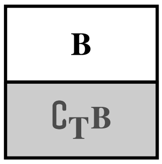
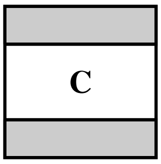
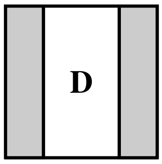
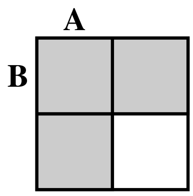
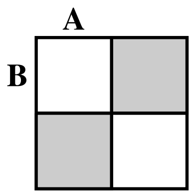
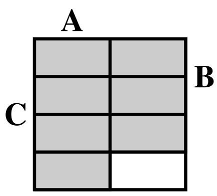
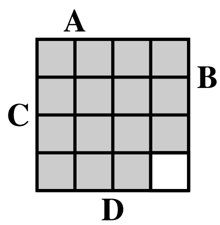
Parzh A eus T :
$A \subset T$</td>
<td>

Parzh A eus T :
$A \subset T$</td>
<td>

Diforc'h A ha B :
$A \setminus B$</td>
</tr>
<tr>
<td>
Diforc'h kemparzhek
A ha B : $A \Delta B$</td>
<td colspan="2">$A \cap B \cap C$ 
</td>
</tr>
</table>

• Un diervad Carrol zo ur goulun a dalvez da zerc'hennañ parzhioù kenglokaus un teskad dave T pe derc'hennañ disoc'hoù niñvadurioù war ar parzhioù kenglokaus-se. • Bezet un teskad T hag an isteskadoù A, B, C ha D	

 Parzh A eus T	 Parzh B eus T
 Parzh C eus T	 Parzh D eus T

$A \cap B$ (kenskejadur) 	$A \setminus B$ (diforc'h) 
$A \cap B \cap C$ 	$A \cap B \cap C \cap D$ 
Klokaenn A e T 	Klokaenn B e T 
Klokaenn C e T 	Klokaenn D e T 
$A \cup B$ (kembodadur) 	$A \triangle B$ (diforc'h kemparzhek) 
$A \cup B \cup C$ 	$A \cup B \cup C \cup D$ 

15. KEMBODADUR

• Kembodadur an teskadoù A ha B zo teskad an elfennoù enbeziat en unan eus an teskadoù A "ha" B d'an nebeutañ. Notañ a reer $A \cup B$, a lenner "A kembod B". Amparet eo $A \cup B$ gant an elfennoù enbeziat en A pe e B, eleze lakaet e-barzh ar re a zo en A ha B. Skrivañ a reer :

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ pe } x \in B\}$. Bez' hon eus ivez :

$A \cup B = (A \vartriangle B) \cup (A \cap B)$, eleze (A no B) pe (A ha B).

• Kembodadur (kembodañ, kembodad, kembod) a reer ivez eus an niñvadur savelet e teskad parzhioù $\mathscr{P}(T)$ eus un teskad T, niñvadur o kevrediñ an elfenn $A \cup B$ eus $\mathscr{P}(T)$ ouzh pep daouac'h (A, B) eus $\mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(T)$.

• Un teskad parzhioù angoullo eus T, ar c'hembodadur anezho o reiñ T, a anver gourloadur eus T.

Evezhiadenn : ur parzhadur eus un teskad T zo ur gourloadur eus T.

16. KENSKEJADUR

• Kenskejadur an teskad E hag an teskad F zo teskad an elfennoù boutin etrezo, eleze ar re enbeziat en E ha F.

Notañ a reer $E \cap F$, a lenner "E kenskej F".

Skouer : Bezet $\mathbb{R}^+$ teskad ar gwerc'helion muiel ha $\mathbb{R}^-$ teskad ar gwerc'helion leiel. Skrivañ a reer : $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$.

• Ur poent eus kenskejadur daou deskad poentoù (daou egor keouenn) zo unan eus elfennoù kenskejadur an daou deskad-se. Anv zo eus poent kenskej — pe eeunoc'h poent skej — div eeunenn a-skej (pe c'hoazh div eeunenn genskej, div skejenn).

• Kenskejadur (kenskejañ, kenskejad, kenskej) a reer ivez eus an niñvadur savelet e teskad parzhioù $\mathscr{P}(T)$ eus un teskad T, niñvadur o kevrediñ an elfenn $A \cap B$ eus $\mathscr{P}(T)$ ouzh pep daouac'h (A, B) eus $\mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(T)$.

• Daou deskad, elfenn voutin ebet dezho, a lavarer disparti. Evit dezgeriañ ez eo disparti an daou deskad E ha F e skriver $E \cap F = \emptyset$.

• Teskadoù a-skej — pe c'hoazh kenskej — a reer eus daou deskad anpar hag andisparti.

17. DIFORC'H TESKADOÙ, DIFORC'H KEMPARZHEK

• Diforc'h an teskad E hag an teskad F a anver teskad an elfennoù eus E ezveziat en F. An teskad-se a noter $E - F$ pe $E \setminus F$, a lenner "E lei F".

• Diforc'h a reer ivez eus an niñvadur savelet e teskad parzhioù $\mathscr{P}(T)$ un teskad T, niñvadur o kevrediñ an elfenn $E \setminus F$ eus $\mathscr{P}(T)$ ouzh pep daouac'h (E, F) eus $\mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(T)$.

• Diforc'h kemparzhek daou deskad E ha F zo kembodadur an diforc'hoù $E \setminus F$ ha $F \setminus E$. An teskad-se a vez notet $E \vartriangle F$, a lenner "E delta F".

• Diforc'h kemparzhek a reer ivez eus an niñvadur savelet e teskad parzhioù $\mathscr{P}(T)$ un teskad T, niñvadur o kevrediñ an elfenn $A \vartriangle B$ eus $\mathscr{P}(T)$ ouzh pep daouac'h (A, B) eus $\mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(T)$.

18. TESKAD LIESÂD PE LIESÂD KARTEZEL

• Liesâd kartezel an teskad E dre an teskad F zo teskad an daouac'hoù (x, y), hevelep ma'z eo x elfenn eus E hag y elfenn eus F. An teskad-se a noter $E \times F$, a lenner "E beskroaz F".

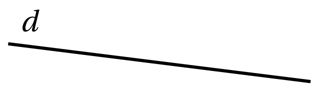
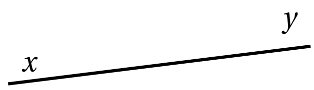
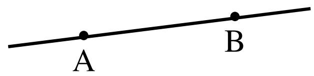
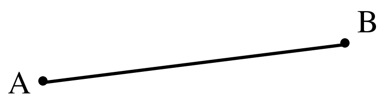
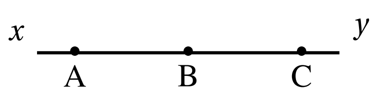
• Karrez kartezel un teskad E zo liesâd kartezel E dre E. Notet e vez : $E^2 = E \times E$. Teskad an daouac'hoù (x, x) a vez anvet treuzvegenn ar c'harrez kartezel.

• Teskad an triac'hoù (x, y, z), hevelep ma'z eo $x \in E$, $y \in F$ ha $z \in G$, zo al liesâd kartezel

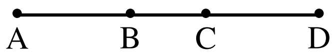
$E \times F \times G$. En degouezh ma'z eo $E = F = G$ e toder $E^3 = E \times E \times E$.

● Heñvel dra gant ar pevarac'hoù, ar pempac'hoù hag en un doare hollek gant al liesac'hoù $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

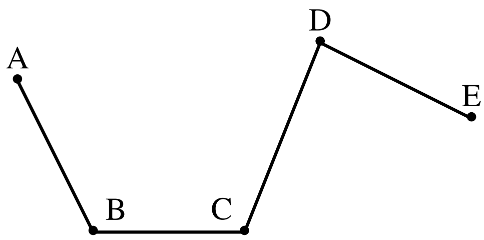
19. DERC'HENNAÑ UR POENT HAG UN TESKAD POENTOÙ

<table>
<tr><td colspan="2">poent A : × pe ●</td></tr>
<tr><td>Un eeunenn d
</td><td>Un eeunenn xy
</td></tr>
<tr><td>Un eeunenn (AB) :

Un eeunenn zo anvevenn.</td><td>Ranneeunenn — pe regenn eeun, eeunregenn, pe c'hoazh regenn — [AB] pennet e daou boent A ha B anvet pennoù :
</td></tr>
<tr><td>Ledeeunenn x a orin O,
notet [Ox *pe* [OA) :
</td><td>Poentoù kenheuilh A, B, C
war un eeunenn xy
</td></tr>
</table>

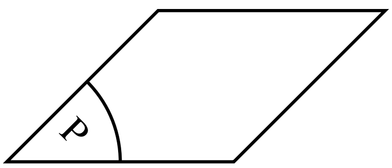
Regennoù (eeun) kefin [AB], [BC], [CD] :



Regennoù (eeun) kenheuilh [AB], [BC], [CD], [DE] :

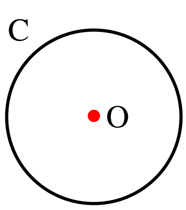


Plaenenn P :

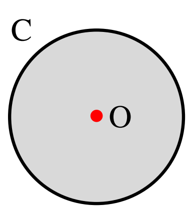


Ledplaenenn a vevenn *d* :

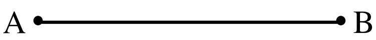
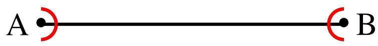
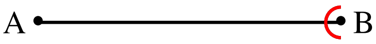
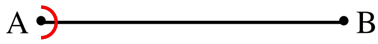
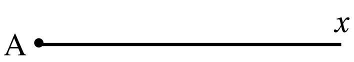
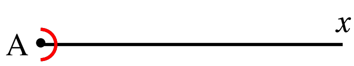
Kelc’h C a greiz O :



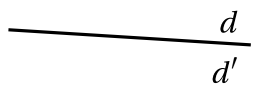
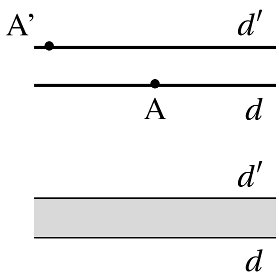
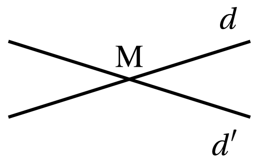
Kantenn D a greiz O :



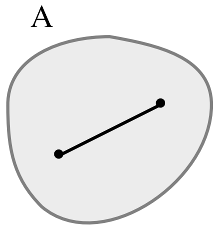
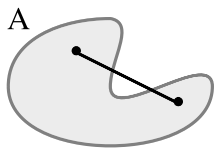
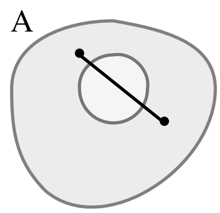
20. DERC’HENNAÑ PARZHIOÙ EEUNENN

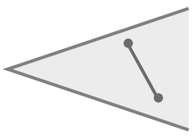
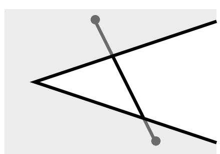
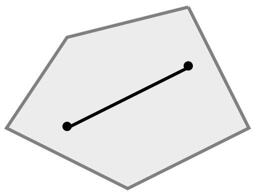
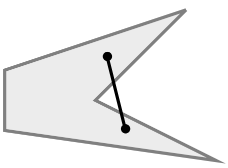
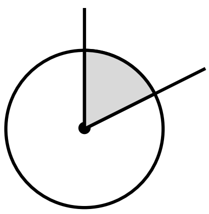
Derc’hennad ar ranneeunenn (regenn) [AB] : 	Derc’hennad ar ranneeunenn]AB[: 
Derc’hennad ar ranneeunenn [AB[: 	Derc’hennad ar ranneeunenn]AB] : 
Derc’hennad al ledeeunenn [Ax : 	Derc’hennad al ledeeunenn]Ax : 

21. KEFLUNIADOÙ DIV EEUNENN GEMPLAEN

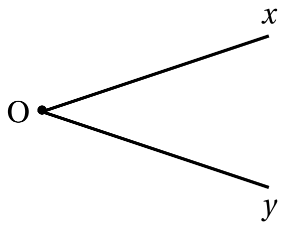
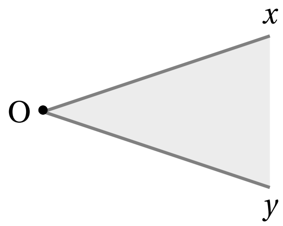
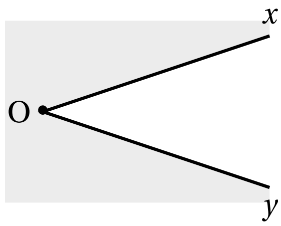
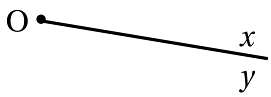
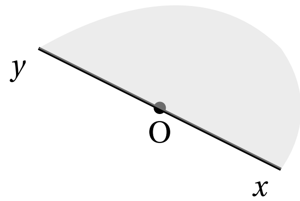
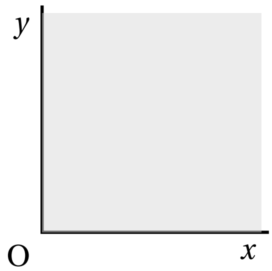
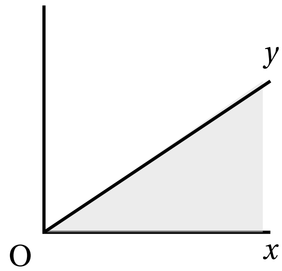
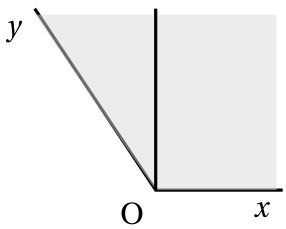
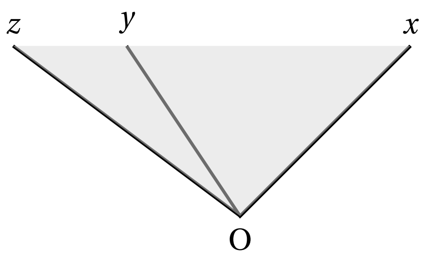
Div eeunenn d ha d' arun (pe : en arun). Lavarout a reer : d arun gant d', pe d en arun gant d'. Skrivañ a reer : $d = d'$	
Div eeunenn d ha d' kenstur strizh : $d \cap d' = \emptyset$. An eeunennoù d ha d' o vezañ kenstur strizh, bezet A ur poent eus d hag A$'$ ur poent eus d', mar noter P al ledplaenenn a vevenn d oc’h enderc’hel A$'$, P$'$ al ledplaenenn a vevenn d' oc’h enderc’hel A, e reer lurell a lezoù d ha d' (pe : a vevennoù d ha d') eus kenskejadur P ha P$'$.	
Div eeunenn d ha d' kenskej (pe a-skej). Kenskejadur an div eeunenn (an div skejenn) d ha d' zo un undañv {M} : $d \cap d' = \{M\}$. Ar c’henboent M eo poent skej (pe c’hoazh poent kenskej) an div eeunenn d ha d'.	

22. TESKAD ARGEINEK, TESKAD ARGEVEK

Ur parzh A a'r blaenenn zo argeinek mar ha nemet mard emañ nep ranneeunenn, he fennoù enbeziat en A, o c'henniñ A (parzhiat eo en A pe endalc'het en A) : 
Ur parzh A a'r blaenenn zo anargeinek pe argev(ek) mar ha nemet mard eus eus ur ranneeunenn nad eo ket endalc'het en A, he fennoù enbeziat en A avat :  

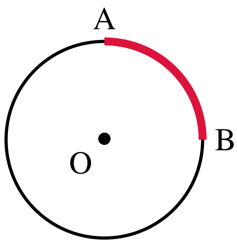
Gennad korn argeinek : 	Gennad korn anargeinek (argevek) : 	Lieskorn (liestueg) argeinek : 
Lieskorn anargeinek (argevek) : 	Gennad kelc'h : Graet e vez gennad kelc'h eus kenskejadur ur gennad korn gant ur gantenn kreizet e beg ar gennad korn : 	

23. LUNIOÙ GENNADOÙ KORN

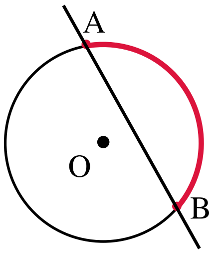
<table>
<tr>
<td>gennad korn
</td>
<td>Gennad korn balegek
</td>
<td>Gennad korn askek
</td>
</tr>
<tr>
<td>Gennad korn mannel
</td>
<td>Gennad korn leun
</td>
<td>Gennad korn sklat
</td>
</tr>
<tr>
<td>Gennad korn serzh
</td>
<td>Gennad korn lemm
</td>
<td>Gennad korn tougn
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Gennadoù korn kefin : $[Ox, Oy]$ ha $[Oy, Oz]$
</td>
</tr>
</table>

24. LUNIOÙ GWARENNOÙ KELC’H

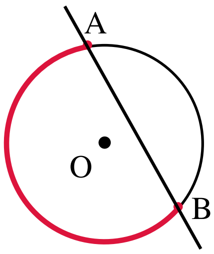
Gwarennoù $\overset{\frown}{AB}$



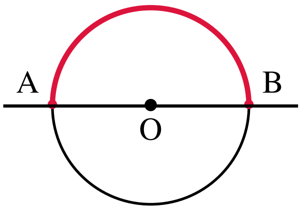
Gwarenn valegek
(a’r spesad kentañ)



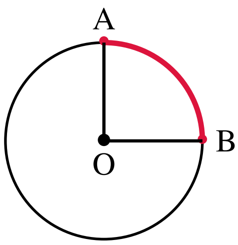
Gwarenn askek
(a’n eil spesad)



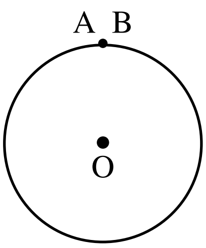
Hantergelc’h



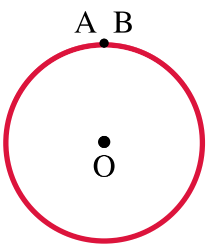
Palevarzh kelc’h
(pevarenn gelc’h)



Gwarenn vannel



Gwarenn leun



25. GENNADOÙ KORN

• Gennad korn balegek, pe c'hoazh baleg (a-getep : gennad korn askek, pe c'hoazh ask) eus ur blaenenn euklidel P a reer eus kenskejadur (a-getep : kembodadur) div ledplaenenn a zo o bevennoù d ha d' skejennoù en ur poent O anvet beg.

• Al ledeeunennoù Ox hag Oy — ar c'hembodadur anezho oc'h amparañ bevenn ar gennad korn — zo anvet tuioù ar gennad. Mard eo digor an div ledplaenenn, n'emañ ket an tuioù e-barzh ar gennad : lavarout a reer ez eo digor ar gennad korn. Mard eo serr an div ledplaenenn ez endalc'h ar gennad e duioù : lavarout a reer ez eo serr ar gennad.

26. GWARENN GELC'H

• A ha B o vezañ daou boent eus ur c'helc'h (C) a greiz O, gwarenn pennet en A ha B a'r c'helc'h (C) a reer eus kenskejadur ar c'helc'h (C) gant unan eus ar gennadoù korn serr a duioù [OA hag [OB pe c'hoazh :

• A ha B o vezañ daou boent diforc'h eus ur c'helc'h (C), gwarenn pennet en A ha B a'r c'helc'h (C) a reer eus kenskejadur ar c'helc'h (C) gant unan eus al ledplaenennoù serr a vevenn AB.

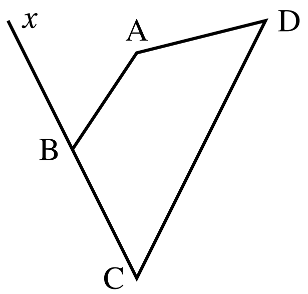
• Ur warenn pennet en A ha B a noter $\overparen{AB}$, a lenner "gwarenn AB". Ar warenn pennet en A ha B oc'h enderc'hel M a noter $\overparen{AMB}$.

• Ar warenn $\overparen{AB}$ eus ur c'helc'h (C) a vez anvet gwarenn valegek, pe c'hoazh gwarenn a'r spesad kentañ, mard eo ar warenn-se kenskejadur ar c'helc'h (C) hag al ledplaenenn a vevenn AB na endalc'h ket kreiz ar c'helc'h (C).

• Gwarenn $\overparen{AB}$ eus ur c'helc'h (C) a vez anvet gwarenn askek, pe c'hoazh gwarenn a'n eil spesad, mard eo ar warenn-se kenskejadur ar c'helc'h (C) hag al ledplaenenn a vevenn AB a endalc'h kreiz ar c'helc'h (C).

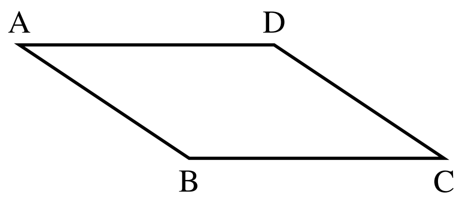
• Lavarout a reer ez eo kefin div warenn $\overparen{AB}$ ha $\overparen{CD}$, mar ha nemet mard eo $\overparen{AB} \cap \overparen{CD} = \{B\}$.

27. LUNIOÙ PEVARZUEGOÙ



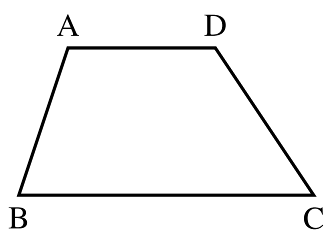
Ur pevarzueg ABCD zo ur bevarac'h poentoù (A,B,C,D) eus an un plaenenn. Ar poentoù A, B, C, D a anver begoù ar pevarzueg ABCD. Ar regennoù [AB], [BC], [CD], [DA] a vez graet tuioù anezho. Ar regennoù [AC] ha [BD] a reer treuzvegennoù anezho.

$[BA,BC]$ a anver gennad korn diabarzh ha $[BA,Bx]$ gennad korn diavaez. Amregenn al liestueg eo al lun o c'hoarvezout eus an tuioù anezhañ. An amregad eo muzul an amregenn.



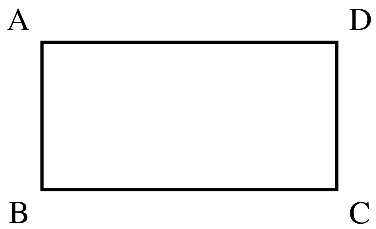
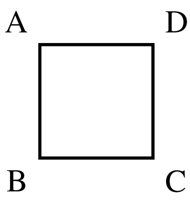
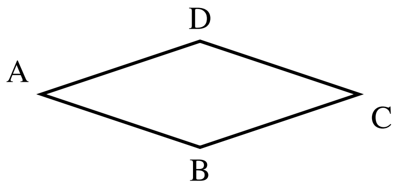
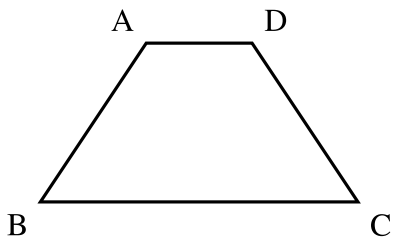
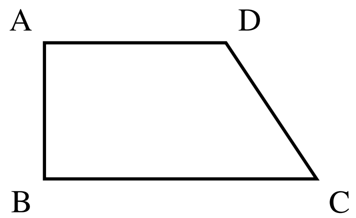
Ur c'hensturieg ABCD zo ur bevarac'h poentoù (A,B,C,D), hevelep ma'z eo kengreiz an daouboentoù (A,C) ha (B,D). Pa vez ar poentoù A, B, C, D a-eeun e lavarer ez eo skladet ar c'hensturieg.

A hent all e lavarer ez eo kewer ar c'hensturieg. Poent skej treuzvegennoù ur c'hensturieg kewer a reer kreiz ar c'hensturieg anezhañ. Kenstur daou ha daou eo tuioù ar c'hensturieg.

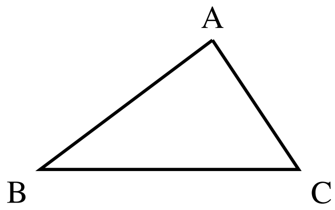
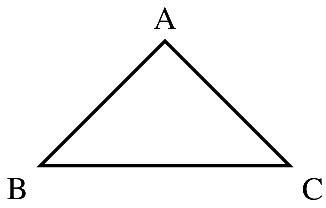
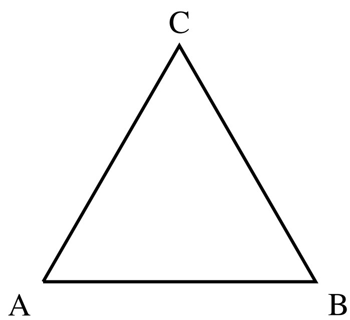
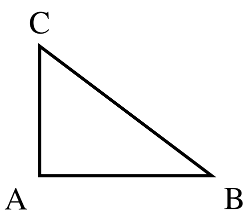
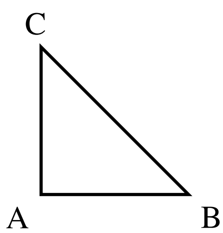


Un tristurieg ABCD zo ur bevarac'h poentoù (A,B,C,D), hevelep ma'z eo kenstur strizh an div eeunenn (AD) ha (BC). Ar regennoù [AD] ha [BC] a reer diazoù an tristurieg anezho.

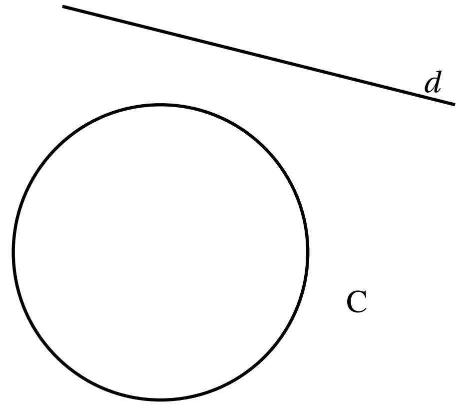
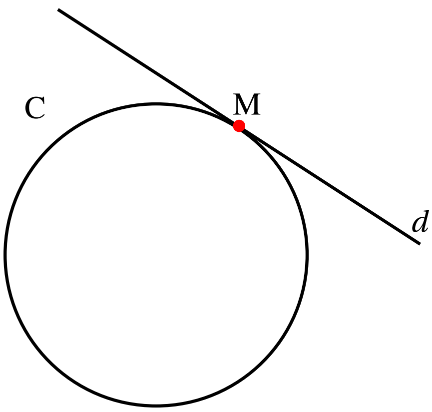
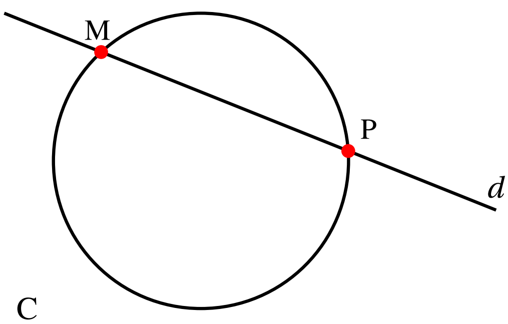
Pevarzuegoù all

	Ur reizhkorneg ABCD zo ur c'hensturieg ABCD, hevelep ma'z eo kenserzh an eeunennoù (AB) ha (BC).
	Ur c'harrez zo ur reizhkorneg, hevelep ma'z eo par an tuioù AB ha BC.
	Ul lankell zo ur c'hensturieg kenserzh e dreuzvegennoù.
	Keitgarek eo nep tristurieg mar en deus un ahel kemparzh.
	Serzh eo nep tristurieg mard eo kenserzh an eeunennoù (AB) hag (AD). Serzh eo ivez daou c'hennad korn diabarzh.

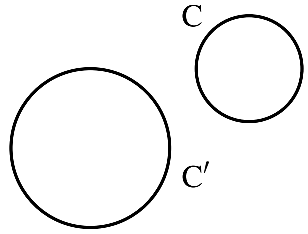
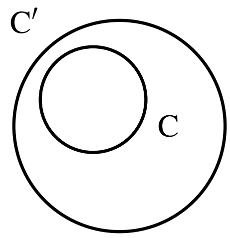
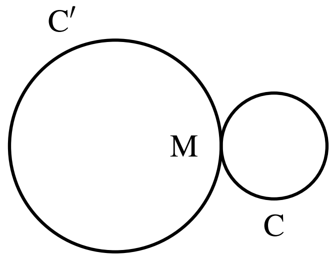
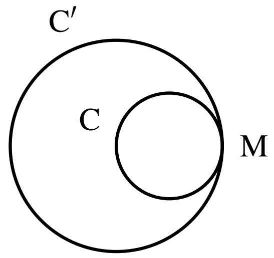
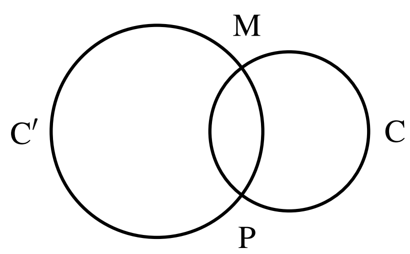
28. LUNIOÙ TRIC’HORNIOÙ

Un tric’horn (trizueg) ABC zo un driac’h poentoù (A, B, C). Ar poentoù A, B, C a anver begoù an tric’horn. A regennoù $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ a reer tuioù an tric’horn anezho. Pa vez A, B, C a-eeun e lavarer ez eo skladet an tric’horn. A hent all e lavarer ez eo kewer.	
Keitgarek eo nep tric’horn mar en deus un ahel kemparzh. Ar beg war an ahel kemparzh a reer pennveg an tric’horn keitgarek anezhañ. An tu ragenep d’ar pennveg a anver diaz an tric’horn keitgarek.	
Keittuek eo nep tric’horn a zo par muzul e dri zu.	
Un tric’horn ABC zo serzh mard eo serzh unan eus kornioù mentoniel an tric’horn (pe : mard eo kenserzh daou du anezhañ). An tu BC a’n tric’horn serzh en A a reer goustenner anezhañ.	
Un tric’horn serzh keitgarek zo un tric’horn war un dro serzh ha keitgarek.	

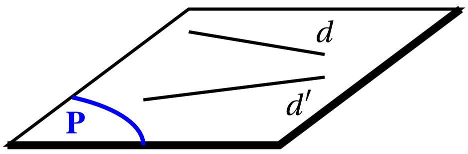
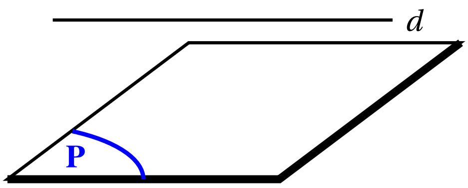
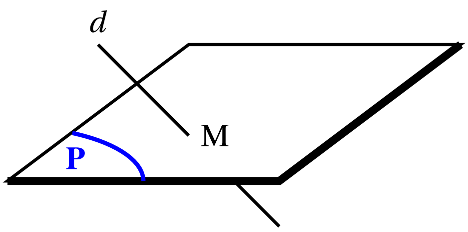
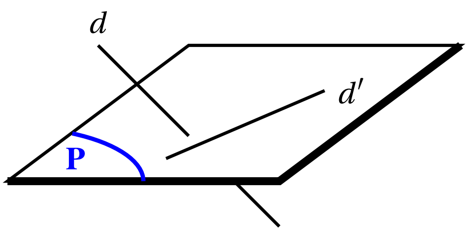
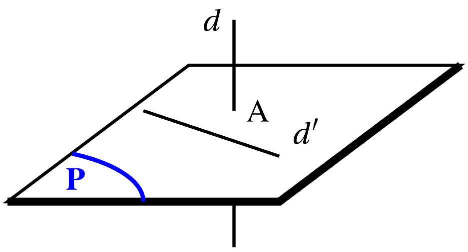
29. KEFLUNIADOÙ UN EEUNENN HAG UR C'HELC'H

<table>
<tr><td></td><td>Eeunenn d diavaez d'ar c'helc'h C, anvet hebiadenn.
$$d \cap C = \emptyset$$</td></tr>
<tr><td></td><td>Eeunenn d a-spin d'ar c'helc'h C. Kenskejadur an eeunenn hag ar c'helc'h zo an undañv $\{M\}$:
$$d \cap C = \{M\}$$
Lavarout a reer ez eo an eeunenn d ar spinenn d'ar c'helc'h er poent M. Poent stekiñ (pe : poent spin) an eeunenn hag ar c'helc'h a reer ivez eus M.</td></tr>
<tr><td></td><td>Eeunenn d a-skej war ar c'helc'h C. Kenskejadur an eeunenn hag ar c'helc'h zo ur re (un daoudañv) boentoù $\{M, P\}$:
$$d \cap C = \{M, P\}$$
Lavarout a reer ez eo an eeunenn d ur skejenn d'ar c'helc'h C en daou boent M ha P. Tant ar c'helc'h C a reer eus MP. Nep tant oc'h enderc'hel kreiz ar c'helc'h a reer treuzkiz ar c'helc'h anezhañ.</td></tr>
</table>

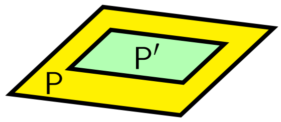
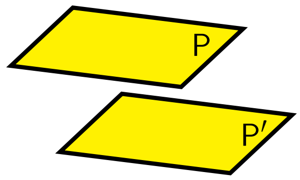
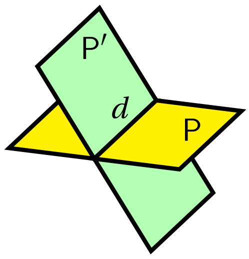
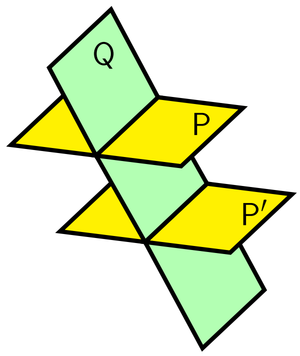
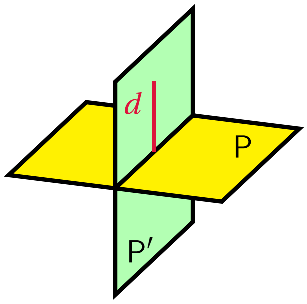
30. KEFLUNIADOÙ DAOU GELC'H

Kelc'h C diavaez d'ar c'helc'h C'. Kenskejadur C ha C' zo an teskad goullo ha kenskejadur ar c'hantennoù a vevennoù ketep C ha C' zo an teskad goullo.	
Kelc'h C diabarzh d'ar c'helc'h C'. Kenskejadur C ha C' zo an teskad goullo hag emañ ar gantenn a vevenn C o c'henniñ ar gantenn a vevenn C'. Daou gelc'h dezho an un kreiz a lavarer kengreiz.	
Kelc'h C a-spin diavaez d'ar c'helc'h C'. Kenskejadur C ha C' zo un undañv $\{M\}$ ha kenskejadur ar c'hantennoù a vevennoù C ha C' zo an undañv $\{M\}$. Poent stekiñ pe poent spin an daou gelc'h a vez graet eus M.	
Kelc'h C a-spin diabarzh d'ar c'helc'h C'. Kenskejadur C ha C' zo an undañv $\{M\}$ hag emañ ar gantenn a vevenn C o c'henniñ ar gantenn a vevenn C'. Poent stekiñ pe poent spin an daou gelc'h a vez graet eus M.	
Kelc'h C a-skej war ar c'helc'h C'. Kenskejadur C ha C' zo an daoudañv $\{M, P\}$. Lavarout a reer ez eo C ha C' kenskej en M ha P. Poentoù skej — pe poentoù kenskej — ar c'helc'hioù C ha C' a vez graet eus M ha P.	

31. KEFLUNIADOÙ EEUNENNOÙ HA PLAENENNOÙ

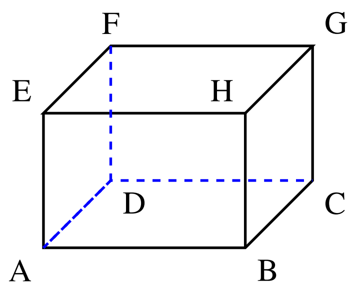
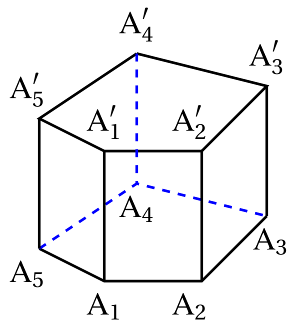
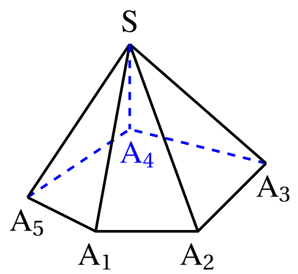
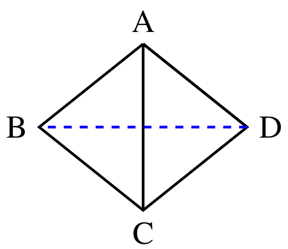
	Eeunenn d endalc'het en ur blaenenn P : $$d \subset \mathrm{P}$$ Div eeunenn endalc'het en un plaenenn a lavarer kemplaen.
	Eeunenn d kenstur strizh d'ar blaenenn P : $$d \cap \mathrm{P} = \emptyset.$$
	Eeunenn d a-skej war ur blaenenn P : $$d \cap \mathrm{P} = \{\mathrm{M}\}.$$ M zo poent skej (pe : poent kenskej) an eeunenn d hag ar blaenenn P.
	Eeunenn d ha d' ankemplaen. N'eus plaenenn P ebet, hevelep ma'z eo : $$d \subset \mathrm{P} \text{ ha } d' \subset \mathrm{P}.$$
	Eeunenn d a-serzh war ur blaenenn P. d zo ar serzhenn war P en A. Lavarout a reer c'hoazh : serzh eo an eeunenn d war ar blaenenn P. P ha d a lavarer kenserzh : $d \perp \mathrm{P}$. Diaskouer eo d ouzh nep eeunenn d' a'r blaenenn P.

32. KEFLUNIADOÙ PLAENENNOÙ

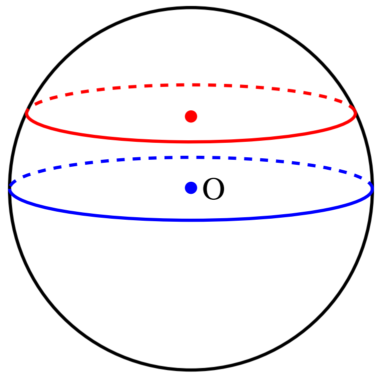
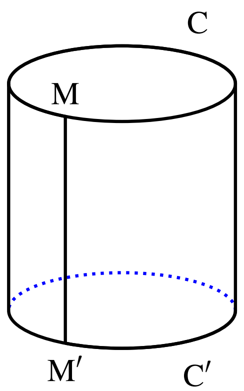
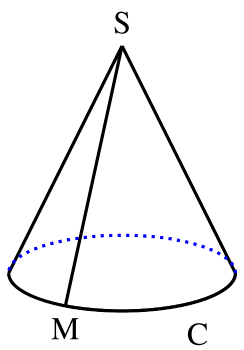
<table>
<tr><td>Plaenenn P ha plaenenn P′ arun (en arun) :
$$P = P'$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Div blaenenn P ha P’ kenstur strizh :
$$P \cap P' = \emptyset$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Div blaenenn P ha P′ a-skej (pe kenskej). Kenskej-adur ar plaenennoù P ha P′ zo un eeunenn d :
$$P \cap P' = d$$
Eeunenn skej (pe eeunenn genskej) ar plaenennoù P ha P′ a reer a-wechoù eus d.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Plaenenn Q a-skej war div blaenenn P ha P′ kenstur strizh :
$$(P \cap Q) \cap (P' \cap Q) = \emptyset$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Plaenenn P ha Plaenenn P′ kenserzh.
Bez’ ez eus eus un eeunenn d, hevelep ma’z eo :
$$d \subset P' \text{ ha } d \perp P$$
.</td><td>
</td></tr>
</table>

33. DERC’HENNAÑ UL LIESTALEG

Despizadur ul liestaleg : lun teirment kloz — anvet ec’honenn pe sonnenn — bevennet gant liestuegoù plaen a zo an talioù. Anv a reer ivez a liesker.

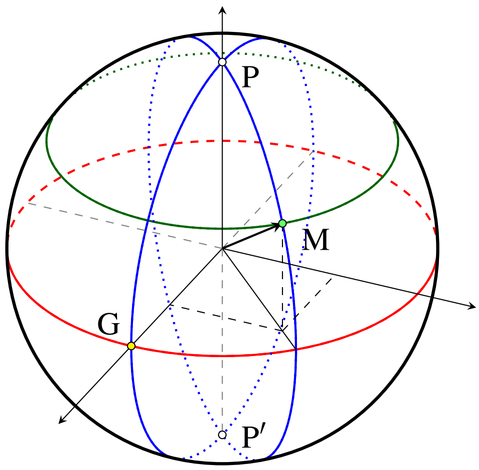
	Ur c’hensturdaleg serzh savelet gant ar poentoù A, B, C, D, E, F, G, H zo dezhañ 8 beg : ar poentoù A, B, C, D, E, F, G, H ; 12 ker : ar regennoù [AB], [EF], [DC], [HG], [AE], [DF], [CG], [BH], [AD], [BC], [FG], [EH] ; 6 tal : ar reizhkornegoù ADFE, CBHG, ABHE, DCGF, ABCD, EFGH. Un diñs zo ur c’hensturdaleg par muzul e gerioù (dezhañ kerioù keitvent).
	Ur c’hengereg zo ul liestaleg daou dal dezhañ liestuegoù par ha kenstur o zuioù (diazoù a reer eus an talioù-se) hag an talioù all — an talioù a-stlez, pe stlezioù — kensturiegoù oc’h eren tuioù an diazoù. Serzh eo ar c’hengereg pa vez kenserzh ar stlezioù hag an diazoù. Nep serzhenn war an diazoù a reer sav ar c’hengereg anezhi.
	Ur c’herndaleg zo ul liestaleg a zo an diaz anezhañ ul lieskorn hag an talioù all tric’hornioù o kenvegañ en ur poent anvet kern. Ar serzhenn diouzh ar c’hern S war an diaz a vez graet sav ar c’herndaleg anezhi.
	Ur pevarzaleg reoliek zo ur c’herndaleg a zo an diaz hag ar stlezioù tric’hornioù keittuek.

34. DERC'HENNAÑ UR BELLENN, UR GRANENN GELC'HTREIÑ, UR GERNENN GELC'HTREIÑ

Pellenn a greiz O a reer eus teskad ar poentoù a'n egor teirment $\mathbb{R}^3$ keitpell diouzh ar poent O. Ar pellder eus ar c'hreiz O d'ur poent a'r bellenn a anver skin ar bellenn-se. Kelc'h bras a'r bellenn eo nep kelc'h o c'henniñ ar bellenn, kreizet e kreiz ar bellenn-se. Kelc'h bihan a'r bellenn eo nep kelc'h o c'henniñ ar bellenn kreizet en ur poent anarun gant kreiz ar bellenn-se. Treuzkiz ar bellenn a reer eus nep treuzkiz ur c'helc'h bras a'r bellenn-se. Diabarzh ar bellenn a greiz O hag a skin R a anver boull a greiz O hag a skin R.	
Ur granenn gelc'htreiñ — pe kranenn serzh — a saveler dre zaou gelc'h C ha C′ anvet diazoù ar granenn ha dre regennoù eeun [MM′] a-serzh war plaenennoù C ha C′, M enbeziat e (war) C ha M′ enbeziat e (pe : war) C′. Ar regennoù [MM′] a reer ganerennoù ar granenn anezho. Nep serzhenn war ziazoù ar granenn a vez anvet sav ar granenn .	
Savelañ a reer ur gernenn gelc'htreiñ — pe kernenn serzh — dre : a) ur c'helc'h C anvet diaz ar gernenn ; b) ur poent S, ezveziat e plaenenn an diaz, anvet kern ar gernenn ; c) regennoù [SM], M enbeziat e C. Ar regennoù [SM] a reer ganerennoù ar gernenn anezho, pe apotem ar gernenn. Sav ar gernenn eo ar serzhenn eus ar gern war an diaz.	

35. PELLENN DOUAR

Un derc'hennad eus an douar eo ar bellenn douar ; kevaraezañ a ra savlec'hiañ ur poent roet.



• Ar bellenn douar he deus da ahel c'hwelañ an eeunenn PP′ anvet ahel ar bleinoù, P o vezañ ar blein norzh ha P′ ar blein su. (Er yezh voutin e reer anv ivez a ahel bed, pe ahel pennoù an douar. P ha P′ a reer anezho pennoù ahel ivez.)

• Ar **c'helc'h bras**, e blaenenn a-serzh war PP′, a anver keheder, pe kelc'h kehederel.

• Nep **kelc'h bihan**, e blaenenn a-serzh war PP′ ha kenstur da blaenenn ar c'heheder, a anver ledredenn.

• Plaenenn ar c'heheder a vez anvet plaenenn gehederel.

• Nep **hantergelc'h** a dreuzkiz PP′ a vez graet kreistegelc'h pe hedredenn anezhañ. Evit savlec'hiañ ur poent M a'r bellenn douar e teseller al ledredenn o tremen dre M (anvet ledredenn M) hag an hedredenn o tremen dre M (anvet hedredenn M).

• Niverennet eo an hedredennoù eus 0° da 180° etrezek ar reter hag eus 0° da 180° etrezek ar c'hornog. An hedredenn niverenn 0 a anver hedredenn orin (hedredenn Greenwich).

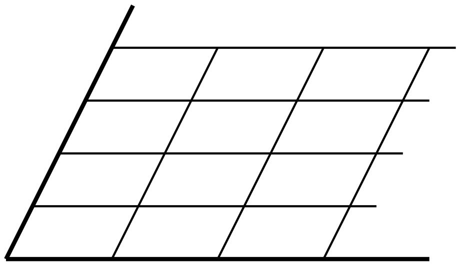
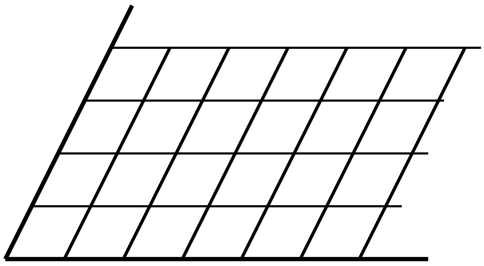
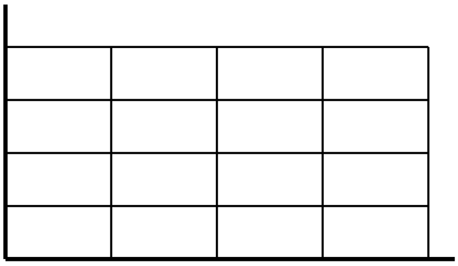
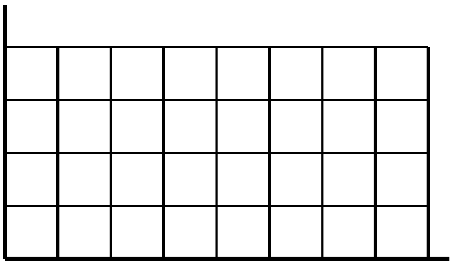
• Niverennet eo al ledredennoù eus 0° da 90° etrezek an norzh hag eus 0° da 90° etrezek ar su. Ar c'heheder eo al ledredenn niverenn 0.

Hedred M a reer eus niverenn hedredenn M ha ledred M eus niverenn ledredenn M.

• Savelet eo savlec'h ur poent M war ar bellenn douar dre e ledred hag e hedred, anvet daveennoù douaregorel M.

36. TEZELLADUR, ROUEDAD

Un tezelladur a c'hoarvez eus un teskad eeunennoù, ar c'henskejadurioù anezho o talvout da zerc'hennañ daouac'hoù.

Un tezelladur a-veskell zo un teskad eeunennoù, daou roud diforc'h dezho, o savelañ kensturiegoù anvet tirennoù. Rouedad a reer ivez eus un tezelladur.	
Un tezelladur reolel eo an tezelladur a zo lankelloù an tirennoù anezhañ.	
Un tezelladur reizhkorn (pe serzh) zo amparet gant tirennoù reizhkorn.	
Un tezelladur reizhreolel zo amparet gant tirennoù karrezek.	

37. DAVEADUR DAOUADEK HA GRAF

• Un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ eus un teskad E d'un teskad F (adalek E etrezek F) zo o naouiñ dre :

~ An teskad E anvet teskad tarzh (pe tarzh, aplud, teskad loc'hañ) $\mathscr{R}$,

~ An teskad F anvet teskad amkan (pe amkan, teskad buk, teskad disoc'h) $\mathscr{R}$,

~ Ur parzh R a'l liesâd kartezel $E \times F$ anvet graf $\mathscr{R}$.

An daveadur $\mathscr{R}$ savelet eus E da F dezhañ R da c'hraf a noter (E, F, R). Al liesañ e vez notet un daveadur dre ul lizherenn ront, e c'hraf dre ar bennlizherenn o klotañ gant al lizherenn ront arveret da arouezin an daveadur-se.

Skouer : Skrivañ a reer $\mathscr{H}$ an daveadur ha H e c'hraf.

Evezhiadenn : E-lec'h daveadur daouadek e lavarer c'hoazh kenglotadur eus un teskad E d'un teskad F.

• Un daveadur daouadek en un teskad T zo un daveadur daouadek dezhañ :

~ an teskad tarzh : T,

~ an teskad amkan : T,

~ ar graf : ur parzh eus $T \times T$.

Daveadur daouadek savelet dre	**en un teskad**
gann par da	parzhioù un teskad
par da bihanoc'h eget brasoc'h eget bihanoc'h pe bar ouzh brasoc'h pe bar ouzh lieskement ha ranner da	niveroù

Daveadur daouadek savelet dre	**en un teskad**
keitvent da	parzhioù un teskad poentoù
kenstur da a-serzh war	eeunennoù a'r blaenenn
kevatal da	daouboentoù a'r blaenenn
kenroud da	sturiadelloù a'r blaenenn

38. ELFENNOÙ KENEREET DRE UN DAVEADUR DAOUADEK

• Bezet un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ savelet gant $(\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{R})$. Evit dezgeriañ ez eo $(a, b) \in \mathrm{R}$ e skriver $a \mathscr{R} b$, pezh a dalvez ez eo a kenereet ouzh b dre an daveadur $\mathscr{R}$.

Skouer :

Bezet un daveadur $\mathscr{S}$ savelet gant $(\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{S})$, hevelep ma'z eo $\mathrm{E} = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{F} = \{a, b, c, d\}$, $\mathrm{S} = \{(1, b), (2, a), (3, b), (3, a)\}$.

Skrivet e vo : $1 \mathscr{S} b$, $2 \mathscr{S} a$, $3 \mathscr{S} b$, $3 \mathscr{S} a$.

• Graf un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ eus un teskad E d'un teskad F zo amparet gant teskad an daouac'hoù (x, y) hevelep ma'z eo $x \mathscr{R} y$.

Skouer :

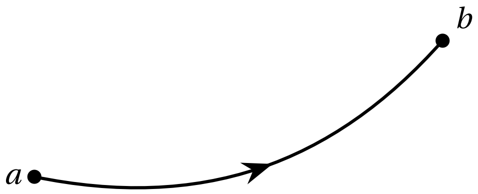
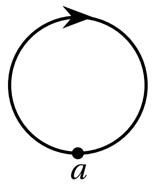
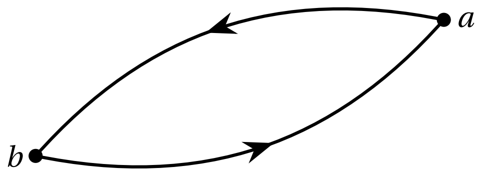
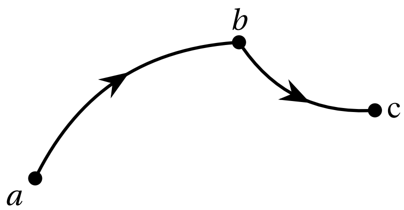
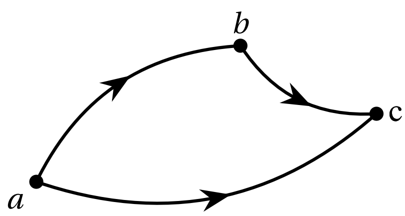
Bezet un daveadur $\mathscr{L}$ el liesâd kartezel $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, hevelep ma talvez :

$$(x, y) \mathscr{L} (x', y') \text{ kement ha } (x + y' = y + x').$$

An daouac'h $\big((0, 1), (1, 1)\big)$ zo ezveziat e graf $\mathscr{L}$ hag an daouac'h $\big((0, 4), (1, 5)\big)$ zo enbeziat e graf $\mathscr{L}$.

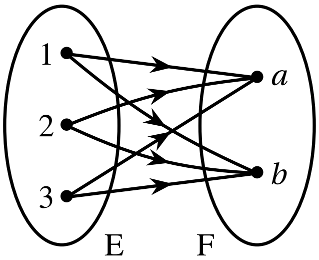
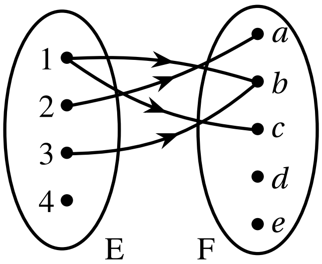
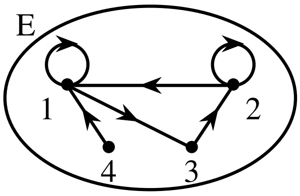
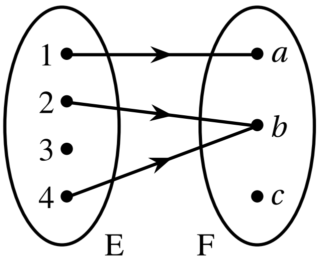
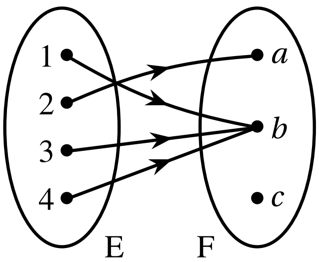
39. BIR

Ar biroù a dalvez da zerc'hennañ daouac'hoù.

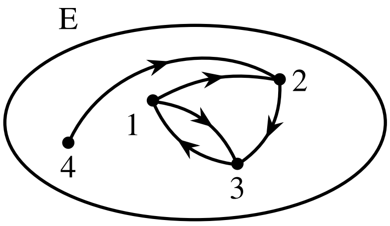
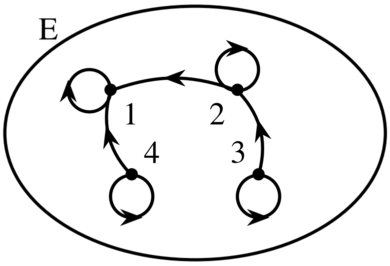
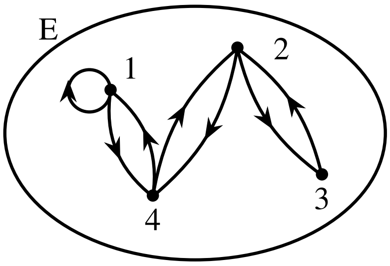
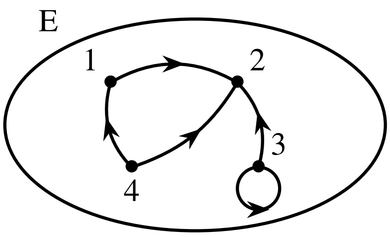
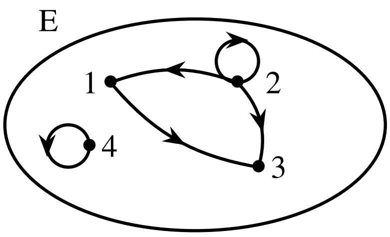
<table>
<tr><td></td><td>Bir a orin a hag a zibenn b o terc'hennañ an daouac'h
(a, b)</td></tr>
<tr><td></td><td>Dol : bir a orin a hag a zibenn a o terc'hennañ an daouac'h
(a, a).</td></tr>
<tr><td></td><td>Bir mont dont o terc'hennañ an daouac'hoù
(a, b) ha (b, a)</td></tr>
<tr><td></td><td>Biroù kenheuilh o terc'hennañ an daouac'hoù
(a, b) ha (b, c).</td></tr>
<tr><td></td><td>Heptreug :
Bezet an daou vir kenheuilh o terc'hennañ an daouac'hoù (a, b) ha (b, c), un heptreug zo neuze ar bir o terc'hennañ an daouac'h
(a, c).</td></tr>
</table>

40. DIERVAD BIREK

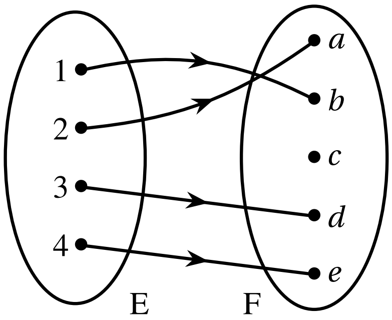
Un diervad birek, pe c'hoazh goulun birek, zo un derc'hennad eus daouac'hoù pe eus graf un daveadur war-bouez biroù.

	Derc'hennad al liesâd kartezel E × F. Pep elfenn eus E zo orin ur bir ha pep elfenn eus F zo dibenn ur bir. $E = \{1, 2, 3\}$ ha $F = \{a, b\}$. $E \times F = \big\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\big\}$
	Derc'hennad graf G an daveadur $\mathscr{G}$ eus E da F. Evit pep daouac'h (x, y) a'r graf G ez eus ur bir a orin x hag a zibenn y.
	Derc'hennad graf R an daveadur $\mathscr{R}$ en E. Evit pep daouac'h (x, x) a'r graf ez eus un dol. An degouezh eo evit $(1, 1)$ ha $(2, 2)$. $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ha $R = \big\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 1)\big\}$
	Derc'hennad graf F ur gevreizhenn f eus E da F. $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ha $F = \{a, b, c\}$
	Derc'hennad graf G un arloadur f eus E da F. $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ha $F = \{a, b, c\}$. $f(1) = b,\ f(2) = a,\ f(3) = b,\ f(4) = b$. Pep elfenn eus E zo orin ur bir hepken.

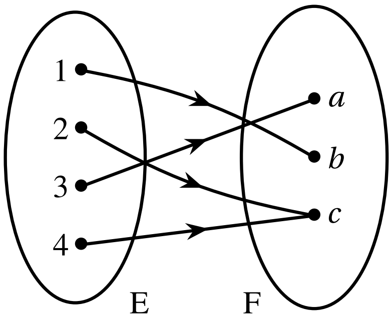
41 DIERVAD BIREK UN DAVEADUR SAVELET EN UN TESKAD

	Derc'hennad graf R un daveadur gourzhasplegat en E. Dol ebet gant elfennoù E.
	Derc'hennad graf R un daveadur asplegat en E. Elfennoù E o deus pep a zol.
	Derc'hennad graf R un daveadur kemparzhek (pe eiltroüs) en E. Pep bir mont a glot gant ur bir dont.
	Derc'hennad graf R un daveadur gourzhkemparzhek en E. Bir dont ebet gant nep bir mont.
	Derc'hennad graf R un daveadur trazeat en E. Pep daouac'h viroù kenheuilh en deus un heptreug.

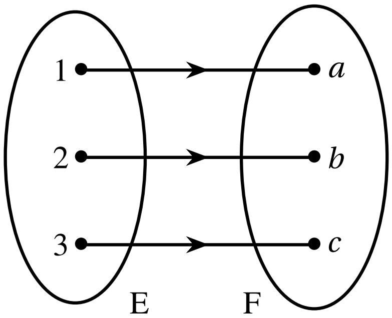
42 DIERVAD BIREK UN ARLOADUR

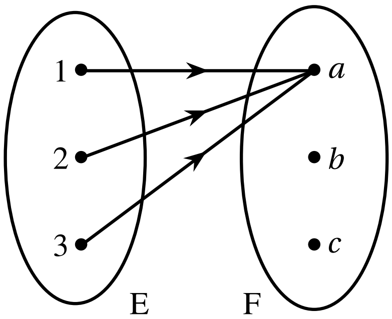
<table>
<tr><td>
</td><td>Derc’hennad graf G un arloadur ensaezhañ eus E da F.

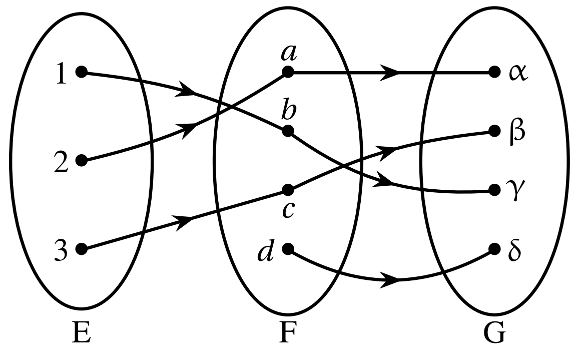
Lavaret e vez ivez : un ensaezhadur eus E da F. Pep elfenn eus F zo dibenn ur bir d’ar muiañ.

Pep elfenn eus E zo orin ur bir hepken.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Derc’hennad graf un arloadur arsaezhañ eus E war F.

Lavaret e vez ivez : un arsaezhadur eus E war F. Pep elfenn eus F zo dibenn ur bir da nebeutañ.

Pep elfenn eus E zo orin ur bir hepken.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Derc’hennad graf G un arloadur kesaezhañ eus E war F.

Lavaret e vez ivez : ur c’hesaezhadur eus E war F. Pep elfenn eus F zo dibenn ur bir hepken. Pep elfenn eus E zo orin ur bir hepken.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Derc’hennad graf G un arloadur arstalek eus E da F. Un elfenn hepken eus F zo dibenn an holl viroù. Pep elfenn eus E zo orin ur bir hepken.</td></tr>
</table>



Derc'hennad graf K arloadur kediat (pe c'hoazh kediad) un arloadur f eus E da F dre un arloadur g eus F da G. Kediañ a reer daou arloadur — o lakaat a reer a-ged — da gaout ar c'hediad anezho, notet :

$h = g \circ f$ [lennet : g ked (nez) f].

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G}$$

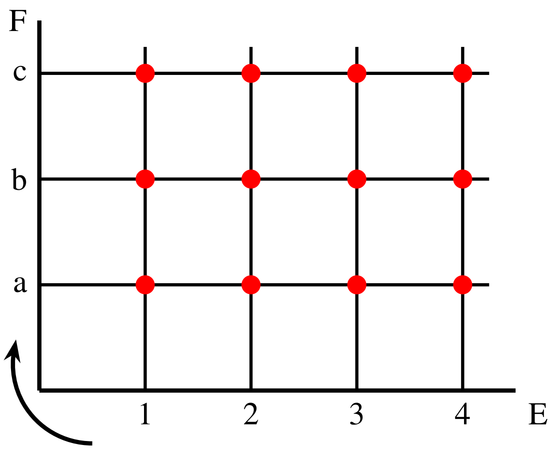
pe

$$\mathrm{E} \xrightarrow{g \circ f} \mathrm{G}$$

43. DERC'HENNAÑ KARTEZEL

• Bezet un trevnad a linennoù a-zerc'h hag a linennoù a-zremm. O foentoù skej a reer klomoù anezho.

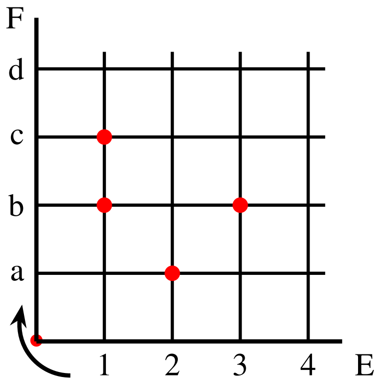
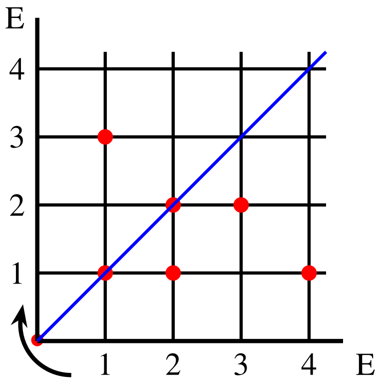
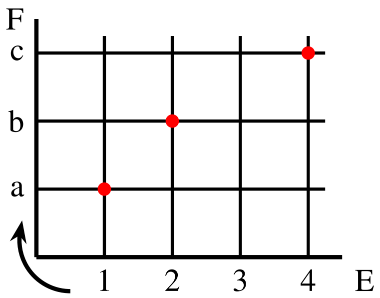
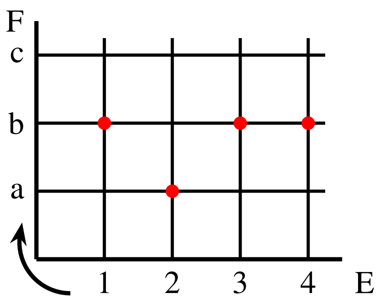
• Pep linenn a-zerc'h — derc'hlinenn — a noter dre un elfenn eus an teskad E, pep linenn a-zremm — dremmlinenn — a noter dre un elfenn eus an teskad F. Ar c'hlom, kenboent an derc'hlinenn x hag an dremmlinenn y a zerc'henn an daouac'h (x, y) eus al liesâd kartezel $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.



Derc'hennad al liesâd kartezel $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b, c\}$.

Stad a reer eus an holl glomoù.

$\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \big\{(1, a), (1, b), (1, c),$
$(2, a), (2, b), (2, c),$
$(3, a), (3, b), (3, c),$
$(4, a), (4, b), (4, c)\big\}$

	Derc'hennad graf R an daveadur $\mathscr{R}$ eus E da F. Stad a reer eus an holl pe eus darn a'r c'hlomoù, pe c'hoazh eus klom ebet. $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 3, 4\}$ ha $\mathrm{F} = \{a, b, c, d\}$ $\mathrm{R} = \big\{(1, b), (1, c), (2, a), (3, b)\big\}$
	Derc'hennad graf R an daveadur $\mathscr{R}$ en E. $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4\}$ Nep daouac'h (x, x) a'r graf zo derc'hennet gant ur c'hlom eus an dreuzvegenn. $\mathrm{R} = \big\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 1)\big\}$
	Derc'hennad graf G ar gevreizhenn f eus E da F. War bep derc'hlinenn ez eus ur c'hlom d'ar muiañ. $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4\}$ ha $\mathrm{F} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$. $f(1) = \mathrm{a},\ f(2) = \mathrm{b},\ f(4) = \mathrm{c}$
	Derc'hennad graf G un arloadur f eus E da F. War bep derc'hlinenn ez eus ur c'hlom hag unan hepken. $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4\}$ ha $\mathrm{F} = \{a, b, c\}$. $f(1) = \mathrm{b},\ f(2) = \mathrm{a},\ f(3) = \mathrm{b},\ f(4) = \mathrm{b}$

44 REZI KARTEZEL

• Ar rezi a c'hoarvez eus stelloù tirennoù a-zerc'h hag eus stelloù tirennoù a-zremm. Pep stell a-zerc'h — bann — a noter dre un elfenn eus an teskad E, pep stell a-zremm — rez — dre un elfenn eus an teskad F. Tirenn voutin ar bann x hag ar rez y a zerc'hen an daouac'h (x, y) eus al liesâd $E \times F$.

Derc'hennad al liesâd kartezel $E \times F$.

$E = \{1, 2, 3\}$ ha $F = \{a, b\}$

$E \times F = \big\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\big\}$.

E pep tirenn ez eus ur groaz.

F \ E	1	2	3
a	×	×	×
b	×	×	×

Derc'hennad graf R an daveadur $\mathscr{R}$ eus E da F.

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ ha $F = \{a, b, c, d\}$

$R = \big\{(1, b), (1, c), (2, a), (3, b)\big\}$.

Ur groaz zo en holl pe e darn eus an tirennoù pe n'eus kroaz ebet e nep tirenn.

F \ E	1	2	3	4
a		×		
b	×		×	
c	×			
d				

Derc'hennad graf R eus an daveadur $\mathscr{R}$ en E.

$E = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \big\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 1)\big\}$

Rezi karrezek, m'emañ derc'hennet nep daouac'h (x, x) a'r graf gant un direnn eus an dreuzvegenn.

F \ E	1	2	3	4
1	×	×		×
2		×	×	
3	×			
4				

Derc'hennad graf G ar gevreizhenn f eus E da F.

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ ha $F = \{a, b, c\}$

$f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(4) = c$

E pep bann ez eus un direnn groaziet d'ar muiañ.

F \ E	1	2	3	4
a	×			
b		×		
c				×

Derc'hennad graf G un arloadur f eus E da F.

$E = \{1, 2, 3, 4\}$ ha $F = \{a, b, c\}$

$f(1) = b,\ f(2) = a,\ f(3) = b,\ f(4) = b$

E pep bann ez eus rik un direnn groaziet.

F \ E	1	2	3	4
a		×		
b	×		×	×
c				

Skouerioù daveadurioù en un teskad E :

E \ E	1	2	3
1		×	
2			×
3	×		

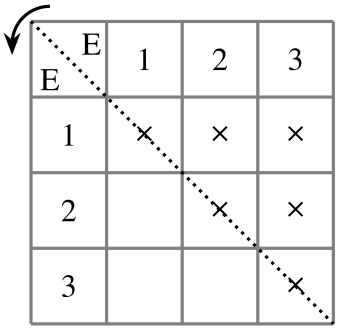
Ankemparzhek, gourzhasplegat hag antrazeat.

E \ E	1	2	3
1		×	×
2	×		×
3			

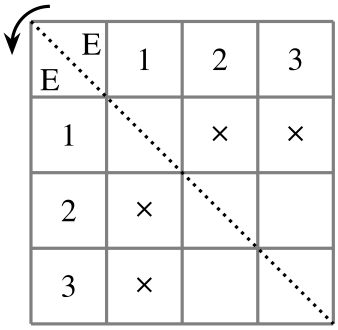
Amgemparzhek, gourzhasplegat ha trazeat.

E \ E	1	2	3
1	×	×	
2		×	×
3			

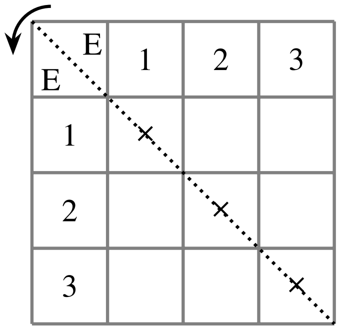
Gourzhkemparzhek, anasplegat hag antrazeat.



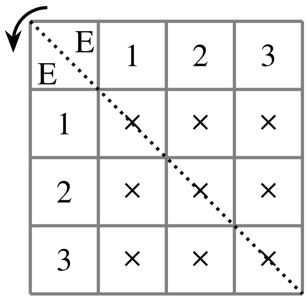
Gourzhkemparzhek, asplegat ha trazeat.



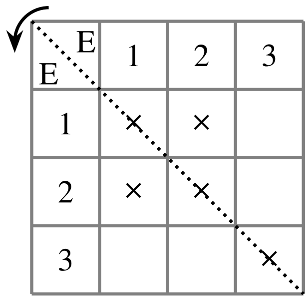
Kemparzhek, gourzhasplegat hag antrazeat.



Trazeat, kemparzhek, gourzhkemparzhek, hag asplegat.



Kemparzhek, asplegat ha trazeat.



Kemparzhek, asplegat ha trazeat.

45 KEVREIZHENN HAG ARLOADUR

• Un arloadur f eus an teskad E d'an teskad F (pe : etrezek F) zo un daveadur f eus E da F, hevelep ma'z eus, evit pep elfenn x eus E, un elfenn y hag unan hepken eus F, x o vezañ ereet ouzh y dre f. En degouezh-mañ e reer graf an arloadur f eus graf an daveadur.

Skouer : $\mathrm{E} = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{F} = \{a, b, c\}$, $\mathrm{R} = \big\{(1, b), (3, a), (2, a)\big\}$.

An daveadur f savelet gant (E, F, R) zo un arloadur eus E da F.

• Ur gevreizhenn f eus an teskad E d'an teskad F — un daveadur kevreizhel — zo un daveadur f eus E da F, hevelep ma'z eus evit pep elfenn x eus E un elfenn y eus F d'ar muiañ, x o vezañ ereet ouzh y dre f. En degouezh-se e reer graf ar gevreizhenn f eus graf an daveadur f.

Skouer : $\mathrm{E} = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{F} = \{a, b, c\}$, $\mathrm{R} = \big\{(1, a), (3, b)\big\}$.
An daveadur f savelet gant (E, F, R) zo ur gevreizhenn eus E da F.

• Kent a se ez eo nep arloadur eus un teskad E etrezek un teskad F ur gevreizhenn eus E da F.

• Pa zeseller :
~ un arloadur f eus E da F ;
~ ur gevreizhenn f eus E da F ;

e noter :

$$f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F} \quad \text{pe} \quad \mathrm{E} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{F}$$

E a anver teskad tarzh f, pe c'hoazh teskad loc'hañ. F a anver teskad amkan f, pe c'hoazh teskad disoc'h, teskad buk (bukenn).

• Anvet e vez kevreizhenn naouus d'an teskad E nep arloadur eus E etrezek an daoudañv $\{0, 1\}$.

Skouer : Un arloadur eus an teskad $\{a, b, c\}$, dezhañ da c'hraf $\big\{(a, 1), (b, 0), (c, 1)\big\}$ zo ur gevreizhenn naouus d'an teskad $\{a, b, c\}$.

• Ur gevreizhenn niverel eo nep kevreizhenn eus un teskad d'un teskad niveroù. E se ez eo ur gevreizhenn naouus d'un teskad roet ur gevreizhenn niverel.

46 DELVAD HA KENTORAD

• Pa zeseller un arloadur f eus un teskad E d'un teskad F, pe ur gevreizhenn f eus un teskad E d'un teskad F, evit dezgeriañ ez eo an elfenn x eus E ereet ouzh an elfenn y eus F dre f, e noter :

$$f : x \longmapsto y \quad \text{pe} \quad x \xmapsto{\ f\ } y$$

y a vez anvet eilorad pe c'hoazh delvad x dre f hag x a reer kentorad y evit f anezhañ. Lenn a reer "x delv y".

• $f(x)$ a arouez delvad x dre an arloadur f — pe ar gevreizhenn f —, x o vezañ kentorad $f(x)$ dre f.

$$\text{Notet e vez : } f : x \longmapsto f(x) \quad \text{pe} \quad x \xmapsto{f} f(x)$$

Skrivet e vez : ur gevreizhenn f — pe un arloadur — eus E da F zo savelet dre $y = f(x)$, a lenner "ye par da ef iks", a dalvez ez eo y delvad x dre f (pe c'hoazh : delvet eo x gant y dre f).

• Pa zeseller ur gevreizhenn pe un arloadur f eus E da F, teskad delvadoù ur parzh A eus E dre f a noter $f\langle A\rangle$ hag a anver delvad ar parzh A eus E dre f, pe c'hoazh, teskad gwerzhadoù f en F.

<u>Skouer</u> : Bezet $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$ hag f : ar gevreizhenn daouvac'hañ. $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ hag $f\langle A\rangle = \{1, 4\}$

• Teskad savelañ pe, domani savelañ, pe c'hoazh savelva ur gevreizhenn f eus E da F a reer eus ar parzh A eus E a zo e elfennoù delvet dre f.

<u>Skouer</u> : Bezet ar gevreizhenn f eus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, despizet dre $f(x) = \sqrt{x}$. N'eo ket savelet f evit ar gwerc'helion leiel, e se ez eo $\mathbb{R}^+$ he savelva.

47 DAVEADURIOÙ PAR HAG ANPAR

• Evit dezgeriañ o deus an daveadurioù $\mathscr{R}$ ha $\mathscr{R}'$ an un tarzh, an un amkan hag an un graf, e lavarer ez int par. Par eo $\mathscr{R}$ gant $\mathscr{R}'$ pe, par eo$\mathscr{R}$ da $\mathscr{R}'$.

Notañ a reer : $\mathscr{R} = \mathscr{R}'$, a lenner « $\mathscr{R}$ par da $\mathscr{R}'$ ».

<u>Evezhiadenn</u> : Par eo an daveadurioù savelet gant (E, F, R) ha
(E′, F′, R′) mar ha nemet mard eo E = E′, F = F′ ha R = R′.

• E se, div gevreizhenn zo par mar ha nemet mar o deus an un tarzh, an un amkan hag an un graf. Pe c'hoazh :

par eo div gevreizhenn f ha g mar ha nemet mar o deus an un savelva, an un amkan hag ouzhpenn se $f(x) = g(x)$ evit nep elfenn x eus E.

Evit dezgeriañ parder ar c'hevreizhennoù f ha g e noter $f = g$, a lenner "f par da g". Pezh zo talvoudek ivez, anat, evit daou arloadur par.

• Evit dezgeriañ ned eo ket par an daveadurioù $\mathscr{R}$ ha $\mathscr{R}'$ e lavarer ez int anpar.

Notañ a reer $\mathscr{R} \neq \mathscr{R}'$. Div gevreizhenn anpar a skriver $f \neq g$.

48 STRISHÂD HAG ASKOUEZH

• Roet :
~ un arloadur f eus un teskad E d'un teskad F ;

~ ur parzh E$'$ eus E ;

~ un arloadur g eus E$'$ da E ;

mard eo, evit pep elfenn x eus E$'$, $f(x) = g(x)$, e reer eus g strishâd f da E$'$ hag an arloadur f a anver askouezh g da E.

Skoueriù :

~ Bezet f eus $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}$ savelet dre $f(x) = x^2$.

~ Bezet g eus $\mathbb{N}$ da $\mathbb{N}$ savelet dre $g(x) = x^2$.

~ O vezañ ma'z eo $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ hag, evit pep elfenn x eus $\mathbb{N}$, $f(x) = g(x)$, ez eo g strishâd f da $\mathbb{N}$ hag f askouezh g da $\mathbb{R}$.

~ Ar sammañ e $\mathbb{Z}$ a askouezh ar sammañ e $\mathbb{N}$.

~ Al liesaat e $\mathbb{R}$ a askouezh al liesaat e $\mathbb{D}$.

• Mard eo E$'$ ur parzh kewer eus E, mard eo g strishâd f da E$'$, pe f askouezh g da E, ez eo neuze $f \neq g$.

49 ATALAD HA KESAEZHADUR

• Roet un arloadur f eus an teskad E d'an teskad F ha y un elfenn festet eus F, an dezrevell $f(x) = y$ a-zivout an elfenn x eus E a vez graet atalad anezhañ. Nep elfenn x_0, hevelep ma'z eo $f(x_0) = y$, a anver diskoulm an atalad $f(x) = y$.

Skouer :

Bezet $\mathrm{E} = \{1,2,3,4\}$, $\mathrm{F} = \{a,b,c,d\}$, $\mathrm{G} = \big\{(1,a),(2,d),(3,a),(4,c)\big\}$.
Desellomp an arloadur f eus E da F, dezhañ G da c'hraf. 1 ha 3 eo diskoulmoù nemeto an atalad $f(x) = a$. An atalad $f(x) = b$ n'en deus diskoulm ebet.

• Graet e vez kesaezhadur eus E war F pe arloadur kesaezhañ (kesaezhat) eus E war F nep arloadur f eus un teskad E d'un teskad F, hevelep ma'z eus, evit pep elfenn y eus F, ur c'hentorad hepken en E. E termenoù all : ur c'hesaezhadur eus E war F zo nep arloadur eus E da F, hevelep ma'z eus d'an atalad $f(x) = y$ evit pep elfenn y eus F, un diskoulm hepken.

Kesaezhat eo nep arloadur mar ha nemet mard eo arsaezhat hag ensaezhat war un dro.

Skoueriοù :

~ Bezet $\mathrm{E} = \{1,2,3\}$, $\mathrm{F} = \{a,b,c\}$ hag f an arloadur eus E da F, hevelep ma'z eo $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = b$. Kesaezhat eo an arloadur-se, rak a he deus 1 da gentorad, b he deus 3 da gentorad ha c he deus 2 da gentorad.

~ An arloadur eus $\mathbb{R}^+$ da $\mathbb{R}^+$ savelet dre $f(x) = x^2$ zo kesaezhat.

~ Kesaezhadurioù eo ivez ar c'heitventadurioù er blaenenn euklidel.

50 KEVAMSAVADUR

• Kevamsavadur un teskad E a reer eus nep kesaezhadur eus E war E. Kevamsavad a reer eus delvad un elfenn en ur c'hevamsavadur.

Skouer : Bezet $\mathrm{E} = \{a,b,c\}$ hag ar c'hesaezhadurioù eus E war E savelet gant :

	a	b	c
f_1	a	b	c
f_2	b	c	a
f_3	c	a	b
f_4	b	a	c
f_5	a	c	b
f_6	c	b	a

Ar c'hesaezhadurioù f_1, f_2, …, f_6 zo kevamsavadurioù E.

• Diwar ur rezad lizherennoù renket e saveler ur rezad all dre lakaat al lizherenn gentañ er renk diwezhañ, al lizherennoù all o linkañ eus ur renk war-raok. Amparañ an holl arenkadoù-se diwar ar rezad kentañ zo ur c'hevamsaviñ a-gor — pe koramsaviñ — eus al lizherennoù-se.

Skouer : ~ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ ha $\sigma_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ zo daou goramsavadur.

~ Al liesâdoù $x(y+z),\ y(z+x),\ z(x+y)$, a zezreer dre goramsaviñ.

51 KEDIAÑ DAVEADURIOÙ PE ARLOADURIOÙ

• Kediad un daveadur $\mathscr{R}$ eus E da F gant un daveadur $\mathscr{S}$ eus F da G zo an daveadur eus E da G a ere un elfenn x eus E ouzh un elfenn z eus G mar ha nemet mard emañ y en F, $x\mathscr{R}y$ ha $y\mathscr{R}z$.

~ Notañ a reer $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$, a lenner "$\mathscr{S}$ ked (pe : nez) $\mathscr{R}$".

~ Bezet R graf an daveadur $\mathscr{R}$ ha S hini $\mathscr{S}$, notañ a reer a-wechoù $\mathrm{S} \circ \mathrm{R}$ graf $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$.

• Kediad pe arloadur kediat an arloadur f eus E da F gant an arloadur g eus F da G zo an arloadur eus E da G a gevred pep elfenn x eus E ouzh an elfenn $g\left[f(x)\right]$ eus G.

~ Notañ a reer an arloadur-se $g \circ f$, a lenner "g nez f".

~ Skrivañ a reer :
$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G}$$
$$\mathrm{E} \xrightarrow{g\circ f} \mathrm{G}$$

~ Delvad x dre $g \circ f$ a skriver $g \circ f(x)$ pe $(g \circ f)(x)$.

~ Anat : $g \circ f(x) = g\left[f(x)\right]$. Skrivañ a reer : $x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g\left[f(x)\right]$.

52 DAVEADUR KEVESKEMM

• An daouac'h (y,x) a vez anvet daouac'h keveskemm an daouac'h (x,y).

• Daveadur keveskemm un daveadur $\mathscr{R}$ savelet eus E da F dre e c'hraf R zo an daveadur savelet eus F da E dre deskad daouac'hoù keveskemm daouac'hoù R.

~ Notañ a reer $\mathscr{R}^{-1}$, a lenner "$\mathscr{R}$ lei unan".

~ Mard eo R graf $\mathscr{R}$, graf $\mathscr{R}^{-1}$ a noter R^{-1} ivez.

• Daveadur keveskemm an daveadur savelet dre $(\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{R})$ zo savelet dre $(\mathrm{F},\mathrm{E},\mathrm{R}^{-1})$.

~ Evit an holl elfennoù x eus E ha y eus F : $y\,\mathscr{R}^{-1}\,x \Longleftrightarrow x\mathscr{R}\,y$.

• Daou gesaezhadur zo kesaezhadurioù keveskemm mar ha nemet mard eo graf an eil teskad daouac'hoù keveskemm egile.

• Ar c'hesaezhadur f eus E da F hag ar c'hesaezhadur g eus F da E zo kesaezhadurioù keveskemm mar ha nemet mard eo $g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ ha $f\circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ (Id zo an arloadur aruniñ eus un teskad T en un teskad T, hevelep ma'z eo $\left(\forall x\in \mathrm{E}\right) f(x) = x$.

~ Kesaezhadur keveskemm ar c'hesaezhadur f a noter f^{-1}, a lenner "f lei unan".

• Evit pep elfenn x eus E ha pep elfenn y eus F :

$$\left(y = f(x)\right) \Longleftrightarrow \left(x = f^{-1}(y)\right)$$

Skouer :

Ar c'hesaezhadurioù f ha g eus $\mathbb{R}^+$ war $\mathbb{R}^+$, savelet dre $f(x) = x^2$ ha $g(x) = \sqrt{x}$ zo kesaezhadurioù keveskemm.

53 PRIÑVEL, TESKAD KENGOULUD

• Bezet E un teskad angoullo, hevelep ma'z eus ur c'hesaezhadur eus an entremez serr $[1,n]$ eus $\mathbb{N}$ war E. Unel eo an entremez-se. Lavarout a reer ez eo n niver priñvel an teskad E pe priñvel E, eleze niver an elfennoù eus an teskad E. E se ez eo ar priñvelion elfennoù an teskad $\mathbb{N}$. Er yezh voutin e reer ivez niver pegementiñ eus ar priñvel. Priñvel un teskad E a lak a-wel ur perzh boutin etre an holl deskadoù kesaezh gantañ.

~ Notañ a reer : $\mathrm{Card}(\mathrm{E})$, $\#E$, $|\mathrm{E}|$, $\overline{E}$, $\overline{\overline{E}}$.

~ Sed un nebeut priñvelion : mann evit an teskad goullo ; unan evit un undañv ; daou evit un daoudañv ; tri evit un tridañv ; hag all.

• Pa vez ur c'hesaezhadur etre an teskadoù A ha B e lavarer ez eo priñvel A par da briñvel B. Notañ a reer : $\mathrm{Card(A)} = \mathrm{Card(B)}$. Lavaret e vez ivez ez eo kengoulud A ha B, pe ez eo A kengoulud gant B. E-lec'h priñvel un teskad eriñvadus (bevennek pe anvevenn) e vez graet gant "goulud" un teskad, anvevenn dreist holl : $\mathbb{R}$ en deus goulud an didorr, da skouer.

• Mar bez ur c'hesaezhadur eus A etrezek ur parzh anleun eus B e lavarer ez eo priñvel A bihanoc'h eget priñvel B.

Notañ a reer $\mathrm{Card(A)} < \mathrm{Card(B)}$. Lavarout a reer ivez ez eo priñvel B brasoc'h eget priñvel A : $\mathrm{Card(B)} > \mathrm{Card(A)}$.

• Mar bez ur c'hesaezhadur eus A etrezek ur parzh eus B e lavarer ez eo priñvel A bihanoc'h pe bar ouzh priñvel B.

Notañ a reer $\mathrm{Card(A)} \leqslant \mathrm{Card(B)}$. E se ez eo priñvel B brasoc'h pe bar ouzh priñvel B : $\mathrm{Card(B)} \geqslant \mathrm{Card(A)}$.

• Savelañ a reer ur sammadur notet + a gevaraez jediñ sammad Card(A) ha Card(B), gant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, dre ar jedadur :

$$\mathrm{Card(A)} + \mathrm{Card(B)} = \mathrm{Card(A \cup B)}.$$

• Savelañ a reer ul liesadur notet $\times$, a gevaraez jediñ, evit daou deskad A ha B diforzh, liesâd Card(A) dre Card(B), dre ar jedadur :

$$\mathrm{Card(A)} \times \mathrm{Card(B)} = \mathrm{Card(A \times B)}.$$

• Un teskad E a vez graet teskad bevennek anezhañ mar ha nemet mard eo $\mathrm{Card(E)} \neq \mathrm{Card(X)}$, evit nep parzh X anleun eus E.

54 TESKAD AN NIVEROÙ KEVAN NATUREL

• Priñvel nep teskad bevennek a anver niver kevan naturel, kevan (liester : kevanion) naturel, naturel (liester : naturelion).

• Pep kevan naturel n en deus un arlerc'hiad $n+1$. An daou niver n ha $n+1$ a vez lavaret kenheuilh.

• Teskad ar c'hevanion naturel zo anvevenn ha notet $\mathbb{N}$.

• Arouezin̄ a reer ar c'hevanion naturel war-bouez sifrennoù lakaet diouzh un urzh savelek, ar sifrennoù-se hag an urzh-se o vezañ savelet dre ur reizhiad niveriñ.

Skrivañ a reer : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Despizañ a reer teskad an naturelion anvannel dre $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

• Diwar an aksiomennoù a-zivout ar priñvelion e saveler en $\mathbb{N}$ an daveadurioù : $a = b$, $a < b$, $a > b$, $a \leqslant b$, $a \geqslant b$. Peururzhiet eo $\mathbb{N}$ dre an daveadur urzhiañ $\leqslant$.

• Diwar an aksiomennoù a-zivout ar priñvelion e saveler ur sammadur en $\mathbb{N}$. Disoc'h sammadur a ha b zo sammad a ha b, notet $a+b$.
~ Evit forzh petore naturelion a ha b, $a+b$ zo enbeziat en $\mathbb{N}$, hag :

$$a + b = b + a$$

$$a + 0 = a \text{ hag } 0 + a = a.$$

~ Evit forzh petore naturelion a, b ha c : $a + (b + c) = (a + b) + c$.
~ Hag en $\mathbb{N}$: $(a + b = 0) \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ ha } b = 0)$.

• En $\mathbb{N}$, diforc'h daou niver a ha b, hevelep ma'z eo $a \geqslant b$ zo an niver x savelet dre $a = b + x$. Al lamadur eo an niñvadur notet "$-$" ha lennet "lei" a gevaraez savelañ diforc'h x an daou niver : $a - b = x$.

• Diwar an aksiomennoù a-zivout ar priñvelion e saveler ul liesadur en $\mathbb{N}$. Disoc'h liesadur a ha b zo liesâd a ha b notet $a \times b$.
~ Evit forzh petore naturelion a ha b, $a \times b$ zo enbeziat en $\mathbb{N}$. Hag ivez :

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot 1 = a \text{ ha } 1 \cdot a = a.$$

~ Evit forzh petore naturelion a, b ha c :

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ ha } (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

~ Hag en $\mathbb{N}$:

$$0 \cdot a = 0 \text{ hag } a \cdot 0 = 0$$

$$(ab = 0) \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ pe } b = 0)$$

$$(ab = 1) \Longleftrightarrow (a = 1 \text{ ha } b = 1)$$

55 SKRIVAÑ AR C'HEVANION NATUREL

• Ur reizhiad niveriñ zo un hentenn derc'hennañ reizhiadek an niveroù kevan naturel diwar-bouez arouezioù (sifroù ha lizherennoù). Pep sifr zo ur gwezhiader a liesaer drezañ un niver anvet diazez niveriñ pe petred savet d'ur mac'h par da renk ar sifr en niver (ar renk kentañ o vezañ 0). Ar reizhiad arveret ent voutin eo an niveriñ dekredel pe dekred. Er Stlenneg ez eo an niveriñ daouredel ar reizhiad boaziet.

• Diazez niveriñ pe petred ur reizhiad niveriñ zo niver ar sifroù arveret er reizhiad-se. Niver unanennoù a un urzh ret da furmiñ unanenn an urzh uheloc'h diouzhtu eo ivez.

• ur reizhiad niveriñ diazez m zo ur reizhiad ma arverer m sifr.

Da skouer :

~ Er reizhiad diazez daou, pe reizhiad daouredel, ez arverer daou sifr notet 0 hag 1.

~ Er reizhiad diazez dek, pe reizhiad dekredel, ez arverer dek sifr notet 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

~ Er reizhiad c'hwezekredel (pe c'hwezekred) ez arverer dek sifr 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ha c'hwec'h lizherenn A, B, C, D, E, F.

• En ur reizhiad diazez m e terc'henner un niver evel-henn :

$$\alpha\beta\ldots xyz$$

ma'z eo α, β, … x, y, z arouezioù ar reizhiad petred m. O vont a zehou da gleiz e terc'henn an arouez kentañ niver an unanennoù a'r gentañ urzh, an eil an unanennoù a'n eil urzh, hag all betek an n-vet o terc'hennañ niver an unanennoù a'n n-vet urzh.

Unanenn un urzh roet, lakaet er-maez unanenn ar gentañ urzh, a dalvez m unanenn an urzh izeloc'h diouzhtu.

En niveriñ dekredel (dekred) : $894 = 8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

	Unanenn ar bevare urzh	Unanenn an drede urzh	Unanenn an eil urzh	Unanenn ar gentañ urzh
zo	eizh $= 2^3$	pevar $= 2^2$	daou $= 2^1$	unan $= 2^0$
En daoured eo skrivet an niver x	**1**	**0**	**1**	**1**
An niver unnek eo x	1 (eizh) +	0 (pevar) +	1 (daou) +	1 (unan)

56 MENEG

• Ar skrivad u_α a lenner “u dregis α” pe “u is α” ma ne vez forc’hellegezh ebet. Meneg u a reer eus α. Alies e vez α un elfenn eus $\mathbb{N}$. A-wechoù e skriver ivez : u', u'', u''' (a lenner “u kent, u eil, u trede”) e-lec’h u_1, u_2, u_3.

• Arverañ a reer ar skrivad u_α, da skouer, da venegiñ elfennoù un teskad bevennek, pe c’hoazh gwezhiaderioù ur polinom un argemmenn.

• Un teskad a c’haller ardaoliñ menegoù d’e elfennoù a reer familh anezhañ. Da skouer, ar familh $\mathscr{F}$ dereziadurioù un eeunenn. Ur familh a zespizer evel henn : bezet M un teskad, envel a reer familh a elfennoù eus an teskad E, ibiliet ouzh M, nep arloadur eus M da E. Bezet x_i delvad un elfenn diforzh i eus M dre an arloadur-se, notañ a reer $(x_i)_{i\in \mathrm{M}}$ ur seurt arloadur pe familh.

• Sed ar reizhiad da envel ar menegoù :

ragus(-)	us(-)	dregus(-)
rak(-)	ar(-)	drek(-)
ragis(-)	is(-)	dregis(-)

Da skouer : $\overline{A_3^4}$ a lenner “A (us)rezell dregus4 dregis3”.

57 NIÑVADUR

• Un dezv gediañ diabarzh war un teskad E, anvet ivez niñvadur diabarzh war un teskad E, zo un arloadur eus al liesâd kartezel E × E en E. Ur gwezhiadur er ster jedoniel eo an niñvadur, eleze e lakaer a-ged (pe : e kedier) elfennoù ’zo eus E — an niñvuzennoù — evit kefleuniañ an niñvadur. Setu un nebeut skouerioù :

Niñvadur diabarzh	war an teskad
Kembodañ Kenskejañ Diforc’h Diforc’h kemparzhek	parzhioù un teskad
Sammañ Liesaat	$\mathbb{N}$
Lemel	$\mathbb{Z}$
Rannañ	$\mathbb{R}$
Kediañ	arloadurioù eus un teskad etrezek un teskad

• Un dezv gediañ diavaez (niñvadur diavaez) en un teskad E, gant niñvaderioù en un teskad K, zo un arloadur eus al liesâd kartezel K × E en E.

Skouer :
Liesadur ur sturiadell eus ar blaenenn dre un niver gwerc'hel zo un dezv gediañ diavaez e teskad ar sturiadelloù $\mathcal{V}$ eus ar blaenenn, gant niñvaderioù en $\mathbb{R}$, rak kevrediñ a ra nep daouac'h eus $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ ouzh ur sturiadell eus $\mathcal{V}$.

• Anv a reer ivez eus niñv un teskad K (teskad an niñvaderioù) war un teskad E. Niñvañ a ra K war E.

• Sed un nebeut arouezioù arveret da zerc'hennañ an niñvaderioù :

Arouez	**Lennet**
$*$	Sterenn
$\square$	Karrez
$\circ$	Nez
$\top$	Te
$\perp$	Gin-te
$\mid$	Serzhell
$/$	Beskell
$\times$	Beskroaz
$+$	Kroaz
$\oplus$	Kroaz argoran

• Bezet un niñvadur notet $*$ etre an elfennoù x ha y eus un teskad E. Gallout a reer dezevout e kevreder an daouac'h (x, y) ouzh z dre $*$. z a vez graet kediad x ha y dre $*$, pe c'hoazh disoc'h an niñvadur $*$ war x ha y.

58 NIÑVADURIOÙ KENHEUILH

• Kediad $x * y$ ha z a noter $(x * y) * z$; kediad x ha $y * z$ a noter : $x * (y * z)$. Arabat kemmeskañ an eil gant egile, rak anpar e vezont ar peurliesañ.

Skouer :

E $\mathscr{P}(\mathrm{E})$: kediad $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ha C dre ar c'henskejadur zo $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$; kediad A ha $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$ dre ar c'henskejadur zo $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$.

• Kediad $x * y$ ha z dre $\perp$ a vez notet : $(x * y) \perp z$; kediad x ha $(y \perp z)$ dre $*$ a vez notet : $x * (y \perp z)$. Arabat kemmeskañ an eil gant egile, ar peurliesañ e vezont anpar.

Skouer :

$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$ zo kediad $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ha C dre ar c'hembodadur $\cup$.

$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$ zo kediad A ha $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ dre ar c'henskejadur $\cap$.

• Kediad $(x * y) \perp z$ ha u dre $\top$ a vez notet : $\left[(x * y) \perp z\right] \top u$.

Skouer :

$(x + y) \cdot z - u$ zo kediad $(x + y) \cdot z$ hag u dre al lamadur en $\mathbb{R}$.

$x + (yz) - u$ zo kediad x ha $(y \cdot z) - u$ dre ar sammadur en $\mathbb{R}$.

59 SAMMAÑ

• Savelañ a reer lerc'h ouzh lerc'h ar sammadur e teskad ar priñvelion, en $\mathbb{N}$, en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{D}$, en $\mathbb{R}$, e $\mathbb{Q}$. Ar sammadur zo bep tro an niñvadur notet + a gevaraez kaout sammad daou niver a ha b : $a+b$, a lenner "a mui b". a ha b a reer termenoù ar sammadur anezho.

Evezhiadenn :

Evit a ha b niveroù diforzh eus $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$ pe $\mathbb{Q}$ e c'haller skrivañ :

~ Mard eo $a \geqslant 0$ ha $b \geqslant 0$, neuze $a+b=|a|+|b|$.
~ Mard eo $a \leqslant 0$ ha $b \leqslant 0$, neuze $a+b=-(|a|+|b|)$.
~ Mard eo $a \leqslant 0$ ha $b \geqslant 0$, neuze $a+b=|b|-|a|$.
~ Mard eo $a \geqslant 0$ ha $b \leqslant 0$, neuze $a+b=|a|-|b|$.

• Mard eo (a,b) ur stern eus an niver x ha (a',b') ur stern eus an niver x', neuze ez eo $(a+a',b+b')$ ur stern eus ar sammad $x+x'$.

• Sammad div gevreizhenn niverel f ha g savelet en un teskad E zo ar gevreizhenn niverel a gevred $f(x)+g(x)$ ouzh nep elfenn x eus E. Sammad ar c'hevreizhennoù f ha g a vez notet $f+g$, a lenner "f mui g". $f+g$ a anver ivez kevreizhenn sammad f ha g.

~ Skrivañ a reer $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
~ Ar sammañ (-adur) kevreizhennoù niverel zo an niñvadur a gevaraez savelañ kevreizhenn sammad ar c'hevreizhennoù-se.

<u>Skouer</u> :
Bezet f ha g, kevreizhennoù eus $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}$, hevelep ma'z eo $f(x)=x+3$ ha $g(x)=-x+2$. Neuze $(f+g)(x)=5$.

• Sammad sturiadel div sturiadell $\vec{u}$ ha $\vec{v}$ eus an eeunenn pe ar blaenenn sturiadel zo sturiadell treuzkludadur kediat an treuzkludadurioù a sturiadell $\vec{u}$ hag a sturiadell $\vec{v}$.
~ Notañ a reer $\vec{u}+\vec{v}$, a lenner "sturiadell $\vec{u}$ mui sturiadell $\vec{v}$ ".
~ $\vec{u}+\vec{v}$ a vez anvet ivez sturiadell sammad $\vec{u}$ ha $\vec{v}$. Skrivet e vez :

$$f_{\vec{u}+\vec{v}} = f_{\vec{v}} \circ f_{\vec{u}}$$

~ Ar sammañ (-adur) sturiadel zo an niñvadur a gevaraez savelañ ur sturiadell sammad sturiadelloù.

60 LIESAAT

• Savelañ a reer lerc'h ouzh lerc'h al liesadur en $\mathbb{N}$, e $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{D}$, en $\mathbb{R}$, e $\mathbb{Q}$. Bep tro ez eo al liesadur an niñvadur notet $\times$ pe $\cdot$, a gevaraez kaout liesâd daou niver.

~ Liesâd daou niver a ha b a noter $a \times b$ pe $a \cdot b$ pe ab zoken, a lenner “a lies b”, pe “a periad b”, pe “a dre b”, pe “a b”.

~ a ha b a reer periadoù al liesâd anezho.

~ Evit niveroù diforzh a ha b eus $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$ pe $\mathbb{Q}$,

~ Mard eo $a \geqslant 0$ ha $b \geqslant 0$, neuze ez eo $ab = |a| \cdot |b|$

~ Mard eo $a \leqslant 0$ ha $b \leqslant 0$, neuze ez eo $ab = |a| \cdot |b|$

~ Mard eo $a \leqslant 0$ ha $b \geqslant 0$, neuze ez eo $ab = -|a| \cdot |b|$

~ Mard eo $a \geqslant 0$ ha $b \leqslant 0$, neuze ez eo $ab = -|a| \cdot |b|$

• Liesâd div gevreizhenn niverel f ha g savelet en un teskad E zo ar gevreizhenn niverel a gevred $f(x) \cdot g(x)$ ouzh nep elfenn x eus E. Liesâd ar c’hevreizhennoù f ha g a noter $f \cdot g$ a lenner “f lies g”, pe “f dre g”, pe “f g”.

~ Ar gevreizhenn $f \times g$ pe $f \cdot g$ a vez anvet ivez kevreizhenn liesâd f ha g. Skrivet e vez $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

~ Al liesaat (-adur) kevreizhennoù niverel zo an niñvadur a gevaraez savelañ kevreizhenn liesâd ar c’hevreizhennoù-se.

<u>Skouer</u> : Bezet f hag eus $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}$, hevelep ma’z eo $f(x) = x - 1$ ha $g(x) = x + 4$. Neuze, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x - 1)(x + 4)$.

• Liesâd ur sturiadell $\overrightarrow{u}$ derc’hallet gant an daouboent (A, B) dre un niver gwerc’hel α zo ar sturiadell $\overrightarrow{w}$ derc’hallet gant an daouboent (A, C), hevelep ma’z eo $\mathrm{C} \in \mathrm{AB}$ hag $\overline{\mathrm{AC}} = \alpha \overline{\mathrm{AB}}$.

~ Liesâd ar sturiadell $\overrightarrow{u}$ dre ar gwerc’hel α a vez notet $\alpha \cdot \overrightarrow{u}$ pe $\alpha \overrightarrow{u}$, a lenner “alfa dre sturiadell u”, pe “alfa u” hepken.

~ Liesaat (-adur) ur sturiadell dre ur gwerc’hel zo an niñvadur a gevaraez savelañ liesâd ur sturiadell dre ur gwerc’hel.

~ Kenroud pe kevamzalc’h ent linennek eo ar sturiadelloù $\overrightarrow{u}$ ha $\overrightarrow{v}$ mar ha nemet mar bez ur gwerc’hel α, hevelep ma’z eo $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$.

~ Kendu eo ar sturiadelloù $\overrightarrow{u}$ ha $\overrightarrow{v}$ mar ha nemet mard eus eus ur gwerc’hel p muiel, hevelep ma’z eo $\overrightarrow{v} = p \overrightarrow{u}$.

~ Gindu eo ar sturiadelloù $\vec{u}$ ha $\vec{v}$ mar ha nemet mard eus eus ur gwerc'hel n leiel, hevelep ma'z eo $\vec{v} = n\vec{u}$.

~ Evit dezgeriañ ned eo ket kenroud $\vec{u}$ ha $\vec{v}$ e lavarer ez int dizalc'h ent linennek.

61 ELFENN C'HOUGEMERUS

• Un elfenn c'hougemerus s eus un teskad E evit un niñvadur diabarzh $*$ en E zo ul elfenn s eus E a wir ar parderioù $x * s = s$ hag $s * x = s$ evit nep elfenn x eus E.

~ Gougemerus eo $\emptyset$ e $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ evit ar c'henskejadur : evit nep elfenn A eus $\mathscr{P}(\mathrm{E})$), $\mathrm{A} \cap \emptyset = \emptyset$ hag $\emptyset \cap \mathrm{A} = \emptyset$.

~ E zo an elfenn c'hougemerus eus $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ evit ar c'hembodadur : evit nep elfenn X eus $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, $\mathrm{X} \cup \mathrm{E} = \mathrm{E}$ hag $\mathrm{E} \cup \mathrm{X} = \mathrm{E}$.

~ Gougemerus eo 0 e $\mathbb{N}$ evit al liesadur : evit nep elfenn x eus $\mathbb{N}$, $x \cdot 0 = 0$ hag $0 \cdot x = 0$.

62 ELFENN NEPTU

• Elfenn neptu un teskad E evit un niñvadur diabarzh $*$ en E zo an elfenn e eus E a wir ar parderioù $x * e = x$ hag $e * x = x$, evit nep elfenn x eus E. Anvet e vez e elfenn aruniñ ivez.

~ E eo elfenn neptu $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ evit ar c'henskejadur : evit nep A eus $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{E} = \mathrm{A}$ hag $\mathrm{E} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A}$.

~ $\emptyset$ eo elfenn neptu $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ evit ar c'hembodadur : evit nep X eus $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, $\mathrm{X} \cup \emptyset = \mathrm{X}$ hag $\emptyset \cup \mathrm{X} = \mathrm{X}$.

~ 0 eo elfenn neptu $\mathbb{N}$ evit ar sammadur : evit nep a eus $\mathbb{N}$, $a + 0 = a$ hag $0 + a = a$.

~ 1 eo elfenn neptu $\mathbb{N}$ evit al liesadur : evit nep x eus $\mathbb{N}$, $x \cdot 1 = x$ hag $1 \cdot x = x$. En degouezh-mañ hag evit an niñvadurioù a rizh liesadel e reer elfenn unan pe unanenn eus e.

~ Id_E eo elfenn neptu A, teskad an arloadurioù eus E da E evit ar c'hediadur : evit nep f eus $\mathscr{A}$, $f \circ \mathrm{Id}_\mathrm{E} = f$ hag $\mathrm{Id}_\mathrm{E} \circ f = f$.

~ $\overrightarrow{0}$ eo elfenn neptu $\mathcal{V}$, teskad sturiadelloù ar blaenenn, evit ar sammadur sturiadel : evit nep $\overrightarrow{u}$ eus $\mathcal{V}$, $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ hag $\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$.

63 KANTAMSAVADEZH

• Un dezv gediañ diabarzh $*$ (pe niñvadur diabarzh $*$) savelet en un teskad E zo kantamsavat mar ha nemet mard eo $a*b=b*a$, evit nep daouac'h (a,b) eus E^2. Lavaret e vez neuze ez eo kantamsavadus an elfennoù eus E.

~ Kantamsavat eo ar c'henskejadur e $\mathscr{P}(\mathrm{E})$: evit nep daouac'h (A,B) eus $\mathscr{P}(\mathrm{E})\times\mathscr{P}(\mathrm{E})$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{B}\cap\mathrm{A}$.

~ Kantamsavat eo ar c'hembodadur e $\mathscr{P}(\mathrm{E})$: evit nep daouac'h (X,Y) eus $\mathscr{P}(\mathrm{E})\times\mathscr{P}(\mathrm{E})$, $\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}=\mathrm{Y}\cup\mathrm{X}$.

~ Kantamsavat eo ar sammadur en $\mathbb{N}$: evit nep daouac'h (a,b) eus $\mathbb{N}$, $a+b=b+a$.

~ Kantamsavat eo al liesadur en $\mathbb{N}$: evit nep daouac'h (x,y) eus $\mathbb{N}$, $x\cdot y=y\cdot x$.

~ Kantamsavat eo ar sammadur sturiadel e teskad sturiadelloù ar blaenenn P : evit nep daouac'h $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ eus P^2 : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$

• Ned eo ket kantamsavat $*$ — dezv gediañ diabarzh pe niñvadur diabarzh savelet en un teskad E — mar ha nemet mard eus da nebeutañ eus un daouac'h (a,b) eus E^2, hevelep ma'z eo $a*b\neq b*a$. Mard eo $a*b=-(b*a.)$ ez eo gourzhkantamsavat an dezv gediañ diabarzh (pe an niñvadur diabarzh).

~ Ar rannadur en $\mathbb{R}^*$ ned eo ket kantamsavat, rak $1\ :\ \dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{2}:1$.

~ Ar c'hediadur e teskad an arloaduriοù eus $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}$ ned eo ket kantamsavat : $g\circ f\neq f\circ g$.

~ Al liesadur sturiadel en un egor sturiadel euklidel durc'haet teirment E zo gourzhkantamsavat, rak $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=-\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}\right)$. Lavaret e vez ez eo pebeilat ivez.

64 STROLLATADEZH

• Un dezv gediañ diabarzh $*$ pe un niñvadur diabarzh $*$ savelet en un teskad E zo strollatat mar ha nemet mard eo $a*(b*c)=(a*b)*c$, evit nep triac'h (a,b,c) eus E^3. En dro-mañ e noter :

$$a*b*c \text{ an elfennoù : } a*(b*c) \text{ hag } (a*b)*c.$$

~ Strollatat eo ar c'henskejadur e $\mathscr{P}(E)$: evit nep triac'h (A,B,C) eus $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

~ Strollatat eo ar c'hembodadur e $\mathscr{P}(E)$: evit nep triac'h (A,B,C) eus $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)$, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

~ Strollatat eo ar sammadur en $\mathbb{N}$: evit nep triac'h (a,b,c) eus $\mathbb{N}^3$, $a+(b+c)=(a+b)+c$.

~ Strollatat eo al liesadur en $\mathbb{N}$: evit nep triac'h (x,y,z) eus $\mathbb{N}^3$, $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.

~ Strollatat eo kediadur an arloadurioù e teskad an arloadurioù eus E da F : evit nep triac'h (f,g,h), eus A^3, $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

~ Strollatat eo ar sammadur sturiadel e teskad sturiadelloù ar blaenenn P : evit nep triac'h $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ eus P^3, $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

• Ned eo ket strollatat un dezv gediañ diabarzh $*$ pe un niñvadur diabarzh $*$ savelet en un teskad E mar ha nemet mard eus da nebeutañ eus un driac'h (a,b,c) eus E^3, hevelep ma'z eo $a*(b*c)\neq(a*b)*c$.

~ Ar rannadur e $\mathbb{R}^*$ ned eo ket strollatat, rak $2:(4:2)\neq(2:4):2$.

65 DASPARZHADEZH

• Un niñvadur diabarzh $\top$ savelet en un teskad E zo dasparzhat e-keñver un niñvadur diabarzh $\perp$ savelet en un teskad E mar ha nemet mard eo :

$$a\top(b\perp c)=(a\top b)\perp(a\top c) \quad \text{hag} \quad (b\perp c)\top a=(b\top a)\perp(c\top a)$$

~ E $\mathscr{P}(E)$ ez eo dasparzhat ar c'henskejadur e-keñver ar c'hembodadur : evit nep triac'h (A,B,C) eus $[\mathscr{P}(E)]^3$, ez eo :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

hag

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$$

~ E $\mathscr{P}(E)$ ez eo dasparzhat ar c'hembodadur e-keñver an c'henskejadur : evit nep triac'h (x, y, z) eus $[\mathscr{P}(E)]^3$, ez eo :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

hag

$$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A).$$

~ En $\mathbb{N}$ ez eo dasparzhat al liesadur e-keñver ar sammadur : evit nep triac'h (a, b, c) eus $\mathbb{N}^3$,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

• Un niñvadur diabarzh $\top$ savelet en un teskad E ned eo ket dasparzhat e-keñver un niñvadur diabarzh $\perp$ savelet en un teskad E mar ha nemet mard eus da nebeutañ eus un driac'h (a, b, c) eus E^3, hevelep ma'z eo :

$$a \top (b \perp c) \neq (a \top b) \perp (a \top c) \quad \text{pe} \quad (b \perp c) \top a \neq (b \top a) \perp (c \top a)$$

~ En $\mathbb{N}$, ned eo ket ar sammadur dasparzhat e-keñver al liesadur, rak :

$$1 + (2 \times 3) \neq (1 + 2) \times (1 + 3).$$

• Evit dezgeriañ ez eo, evit nep daouac'h sturiadelloù $(\vec{u}, \vec{v})$ ha nep gwerc'hel α :

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v},$$

e lavarer ez eo dasparzhat liesadur ur sturiadell dre ur gwerc'hel e-keñver ar sammadur sturiadel.

• Evit dezgeriañ ez eo, evit nep sturiadell $\vec{u}$ ha nep daouac'h werc'helion (α, β),

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u},$$

e lavarer ez eo dasparzhat liesadur ur sturiadell dre ur gwerc'hel e-keñver sammadur ar gwerc'helion.

66 PERIATA

• Bezet a ha b daou niver gwerc'hel diforzh ; $a \times b$ pe $a \cdot b$ pe ab zo disoc'h liesadur a dre b. Liesaer a vez graet eus a, liesaed eus b ha liesâd eus $c = ab$.

Mar seller ouzh an daou niver a ha b o kedniñvañ, hep diforc'h ebet a staelad etrezo enta, e vez graet kentañ periad al liesâd eus a hag eil periad al liesâd eus b, c o vezañ neuze ul liesâd periadoù.

• Bezet $ab+ac=a(b+c)$. Lakaet eo bet ar gazel gentañ e rezh ul liesâd periadoù, periataet eo bet. Lavarout a reer ivez emañ an eil kazel e rezh ur periatâd. Periatadur a reer ivez eus an niñvadur periata. En degouezh-mañ ez eo bet lakaet ar gwerc'hel a da beriad boutin — kenberiad — hag anvet e vez an eil kazel "rezh periataet" neuze. An hent gin, eleze tremen eus an eil kazel d'an hini gentañ, zo dasparzhañ a e-keñver ar sammad $b+c$, da gaout ar rezh dispaket. E se e lavarer ivez e tispaker ar periatâd $a(b+c)$.

• Ar parderioù-mañ a vez graet arunderioù heverk anezho :

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\ x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \\ u^2-v^2=(u+v)(u-v) \end{cases}$$

67 TAOLENN NIÑVADUR

• Desellout a reer an niñvadur diabarzh notet $*$ en teskad E. Bezet

$$\mathrm{E}=\{x_1,\ x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n\},\qquad i\in\mathbb{N}^*,j\in\mathbb{N}^*.$$

Un daolenn eus an niñvadur $*$ — pe taolenn Pitagoras — zo un daolenn enni lies rez ha lies bann. Seurt taolenn urzhiet a vez graet ivez rezi anezhi. Da gaout $x_i * x_j$ e lenner en direnn eus an i-vet bann hag eus ar j-vet rez.

Taolenn sammañ en diazez daou

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Taolenn liesaat en diazez daou

×	0	1
0	0	0
1	0	1

68 TAOLENN ARLOADUR

• Un daolenn eus an arloadur f zo un daolenn div rez ha lies bann. An elfenn x_i a lakaer er rez kentañ, en i-vet bann. Delvad $f(x_i)$ eus x_i a lakaer en eil rez, en i-vet bann (dindan x_i).

Skouer :

~ Taolenn an arloadur f, hevelep ma'z eo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha

$$f(x) = x^2 :$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81

~ Taolenn an arloadur g, hevelep ma'z eo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ (isarnesaet da } 10^{-3}\text{) :}$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	0,500	0,333	0,250	0,200	0,166	0,142	0,125	0,111

~ Taolenn an arloadur h, hevelep ma'z eo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ (isarnesaet da } 10^{-3}\text{) :}$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	1,414	1,732	2	2,236	2,449	2,645	2,828	3

69 KALVEZDERIOÙ AR SAMMAÑ

• Ent damkanel e reer ar sammañ renk ha renk, o treuzdougen an astaolioù eus ar renk 0 a-zehou d'ar renk n a-gleiz. Seurt araezad zo hir da ren : er reizhiad daouredel e skriver $a = 1011$ ha $b = 111$.

Unanennoù	**renk pevar**	**renk tri**	**renk daou**	**renk unan**	**renk mann**
	c'hwezek	eizh	pevar	daou	unan
a b		1	0 1	1 1	1 1
astaol a b		 1	 0 1	1 1 1	 0
astaol a b		 1	1 0 1	 1	 0
astaol a b		1 1	 0	 1	 0
astaol a b	1	 0	 0	 1	 0
$a+b$	1	0	0	1	0

• Kalvezderioù all a arverer, da skouer hini an astaolioù oglennek : sammañ a reer an holl sifroù daouredel hep astaol, da c'houde e sammer ar sammad darnel gant an astaolioù (oglenn gentañ) hag e kendalc'her betek ma vo heskaet an astaolioù :

$$
\begin{array}{rll}
 & 01011101 & \\
+ & \underline{01101110} & \\
 & 00110011 & \text{sammad darnel} \\
 & \underline{10011000} & \text{astaolioù darnel (oglenn gentañ)} \\
 & 10101011 & \\
 & \underline{00100000} & \text{eil oglenn astaolioù} \\
 & 10001011 & \\
 & \underline{01000000} & \text{trede oglenn astaolioù} \\
 & 11001011 & \text{sammad disoc'hel}
\end{array}
$$

70 LIESKEMENT HA KENLIESKEMENT DAOU GEVAN NATUREL

• Notañ a reer a-wechoù $\mathrm{L}(a)$ teskad lieskementoù ur c'hevan naturel.

Skouer : $\mathrm{L}(24) = \{x \in \mathbb{N} \; ; \; x = 24k, \, k \in \mathbb{N}\}$

• Nep kevan naturel lieskement eus daou a vez graet niver hebar anezhañ. Nep kevan naturel nad eo ket lieskement eus daou a vez graet niver ampar anezhañ.

• Nep elfenn eus $\mathrm{L}(a) \cap \mathrm{L}(b)$ a vez graet lieskement boutin — pe, kenlieskement — d'an daou gevan naturel a ha b. A-wechoù e noter :

$$\mathrm{L}(a \; ; \; b) = \mathrm{L}(a) \cap \mathrm{L}(b).$$

Skouer : Teskad ar c'henlieskementoù eus 40 ha 60 zo :

$$\{n \in \mathbb{N} \; ; \; n = 120k, \, k \in \mathbb{N}\}$$

• Ar bihanañ lieskement boutin (bihanañ kenlieskement) da zaou gevan naturel a ha b eo an elfenn vihanañ anvannel eus $\mathrm{L}(a \, ; b)$. Notañ a reer a-wechoù : bik $(a \; ; \; b)$ pe $a \vee b$.

Skouer : $40 \; \vee \; 120 = 120.$

71 RANNADUR EUKLIDEL

• Evit nep kevan naturel a ha nep kevan naturel b ez eus daou gevan naturel unel r ha q, hevelep ma'z eo $a = bq + r$ gant $0 \leqslant r < b$.
~ Ar jedadur a gevaraez kaout q ha r eo rannadur euklidel a dre b.
~ a a vez graet ranned anezhañ ; b a vez graet ranner anezhañ ; q eo rannad euklidel a dre b hag r an dilerc'h euklidel.

Skouer : $452 = 7 \times 64 + 4 \quad$ hag $\; 0 \leqslant 4 < 7.$

• a ha b o vezañ daou gevan naturel, mar bez ur c'hevan naturel q, hevelep ma'z eo $a = bq$, e lavarer ez eo a ul lieskement eus b, pe ez eo a rannadus dre b, pe ez eo b ur ranner eus a, pe ez eo rik rannadur a dre b. Ar c'hevan naturel a zo ul lieskement eus ar c'hevan naturel b, pa vez mannel an dilerc'h er rannadur euklidel eus a dre b.

• 0 ne rann niver ebet, rak evit nep kevan naturel anvannel a, $a \neq 0 \cdot q$; ha gant a mannel, $0 = 0 \cdot q$ hep ma ve unel q.

• 0 zo ul lieskement eus ne vern pe gevan naturel, rak evit nep kevan naturel b, $0 = b \cdot 0$.

72 RANNER HA KENRANNER DAOU GEVAN NATUREL

• Teskad rannerioù un niver kevan naturel a a noter a-wechoù $\mathrm{R}(a)$.

<u>Skouer</u> : R(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

• Un niver kentañ zo ur c'hevan naturel dezhañ daou ranner hepken en $\mathbb{N}$: 1 hag eñ e unan.

<u>Skouerioù</u> :

Kentañ eo 3, rak $\mathrm{R}(3) = \{1, 3\}$. Padal, 1 ned eo ket kentañ, rak $\mathrm{R}(1) = \{1\}$, ur ranner hepken en $\mathbb{N}$ enta. 4 ned eo ket kentañ, rak $\mathrm{R}(4) = \{1, 2, 4\}$.

Er skouerioù-se hon eus graet anv eus kentaelezh kevanion naturel. Seurt goulenn zo c'hoazh divoud ur bern enklaskoù.

• Nep elfenn eus $\mathrm{R}(a) \cap \mathrm{R}(b)$ a vez graet ranner boutin (kenranner) d'an daou gevan naturel a ha b. Teskad kenrannerioù a ha b a noter a-wechoù $\mathrm{R}(a\ ;\ b)$. Neuze :

$$\mathrm{R}(a\ ;\ b) = \mathrm{R}(a) \cap \mathrm{R}(b).$$

• Daou gevan naturel a ha b zo kentañ etrezo mar ha nemet mard eo teskad o c'henrannerioù an undañv $\{1\}$. Lavaret e vez ivez ez eo a ha b daou gevan naturel estren.

<u>Skouer</u> : R(36 ; 175) = $\{1\}$, kentañ etrezo eo 36 ha 175.

• Ar brasañ ranner boutin (brasañ kenranner) da zaou gevan naturel a ha b eo an elfenn vrasañ eus R(a ; b). Notañ a reer a-wechoù : brak $(a\ ;\ b)$ pe $a \wedge b$.

<u>Skouer</u> : $40 \wedge 60 = 20$; $36 \wedge 175 = 1$.

73 SKRIVAD KENTAEL UR C'HEVAN NATUREL

• Nep kevan naturel nad eo ket kentañ, estr eget 0 hag 1, a c'hell bezañ skrivet e rezh ul liesâd periadoù kentañ. Skrivañ ur c'hevan naturel n e rezh ul liesâd periadoù kentañ a vez anvet digenaozañ (digenaozadur) n e liesâd periadoù kentañ pe periata (periatadur) kentañ n.

Skouer : Periatadur kentañ 360 zo : $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

• Niver kentael a reer eus nep kevan naturel a c'hell bezañ skrivet e rezh mac'had un niver kentañ.

Skouer : Kentael eo 16, rak 16 a c'hell bezañ skrivet 2^4, $16 = 2^4$. Heñvel dra evit $5 = 5^1$.

• Nep kevan naturel n estreget 0 hag 1 a c'hell bezañ skrivet e rezh un niver kentael pe e rezh ul liesâd niveroù kentael, an disoc'h o vezañ anvet skrivad kentael n.

Skouer :

~ Skrivad kentael 13 zo 13^1.

~ Skrivad kentael 27 zo 3^3. Skrivad kentael 360 zo $2^3 \times 3^2 \times 5$.

• Mard eo $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot \ldots x^\chi$ skrivad kentael un niver n ma'z eo a, b, c, ..., x kevanion naturel kentañ hag α, β, γ, ..., χ kevanion naturel anvannel, neuze ez eo niver rannerioù n :

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots (\chi + 1).$$

Skouer : O vezañ ma'z eo $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, ez eo niver rannerioù 360 :
$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$.

74 KROUER ERATOSTENES

• Krouer Eratostenes zo un hentenn o kevaraezañ kaout roll ar c'hevanion kentañ bihanoc'h eget ur c'hevan roet. Evit savelañ ar c'hevanion naturel kentañ gavaelet etre 1 ha 99 e skriver an holl gevanion eus 1 da 99, kroaziañ a reer 1 ha lerc'h ouzh lerc'h an holl lieskementoù eus 2, 3, 5, 7..., ma n'int ket bet kroaziet a-gent.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

An niveroù kentañ bihanoc'h eget 100 zo :

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$.

A-wechoù e reer niver kenaozat eus nep niver nad eo ket kentañ.

75 NIVER SKEJEL pe SKEJEL

• Un niver skejel en ur reizhiad niveriñ diazez m (reizhiad m-redel) zo un heuliad sifroù m-redel troc'het gant ur skej (gant ur pik a-wechoù[1]).

~ Lodenn gevan ur skejel zo derc'hennet gant heuliad ar sifroù a-gleiz d'ar skej. Lavarout a reer emaint a-raok ar skej.

~ Un niver dekrannel zo bevennek niver ar sifroù war lerc'h ar skej, pa en skriver er reizhiad dekredel. Dekrannennoù eo ez int neuze.

~ Lodenn rannek un dekrannel zo amparet gant heuliad ar sifroù a-zehou d'ar skej. Emañ ar sifrennoù dekrannel (an dekrannennoù) war-lerc'h ar skej. Un dekrannenn zo enta ur ranngementenn a reizhiad dek (dekred), da skouer an dekvedenn, ar gantvedenn, ar vilvedenn, h.a.

[1] An anv *niver poentel* pe *poentel* ls. *-ion* a zerefe neuze (YBAN 2025).

• Un niver skejel en ur reizhiad niveriñ diazez m (reizhiad m-redel) a vez skrivet :

$$\alpha\beta\ \dots\ ab, x\ \dots\ yz,$$

ma'z eo $\alpha,\ \beta,\ \dots,\ a, b,\ x,\ \dots,\ y,\ z$ sifroù ar reizhiad m-redel-se.

~ An n-vet sifr a-raok ar skej a zerc'henn niver unanennoù an urzh n a-raok ar skej. Un unanenn a'n urzh n a-raok ar skej a dalvez m unanenn a'n urzh $n-1$ izeloc'h diouzhtu a-raok ar skej.

~ An n-vet sifr war-lerc'h ar skej a zerc'henn niver unanennoù an urzh n war-lerc'h ar skej. Un unanenn a'n urzh n war-lerc'h ar skej a dalvez m unanenn a'n urzh $n+1$ uheloc'h diouzhtu war-lerc'h ar skej.

• Ur c'hevan naturel a c'hell bezañ desellet evel un niver skejel a zo holl e sifroù war-lerc'h ar skej par da vann.

	Unanenn eus an eil urzh *a-raok* ar skej	Unanenn eus ar gentañ urzh *a-raok* ar skej	Unanenn eus ar gentañ urzh *war-lerc'h* ar skej	Unanenn eus an eil urzh *war-lerc'h* ar skej
	daou	unan	hanter	kard
Ar skejel x skrivet en daoured	1	1 ,	0	1
	Unanenn eus ar gentañ urzh *a-raok* ar skej	Unanenn eus ar gentañ urzh *war-lerc'h* ar skej	Unanenn eus an eil urzh *war-lerc'h* ar skej	Unanenn eus an drede urzh *war-lerc'h* ar skej
	unan	dekvedenn	kantvedenn	milvedenn
Ar skejel y skrivet en dekred	5 ,	3	6	4

76 MUZULIAÑ

• A-wechoù e c'haller ardaoliñ ur werzhad — eleze un niver gwerc'hel — ouzh un teskad poentoù E (da skouer : ur regenn, ur warenn, ur gennad korn, ur c'horreenn, un ec'honenn). Lavarout a reer e vuzulier an teskad-se, ha muzul E a reer eus ar werzhad. Evit dezgeriañ ez eo gallus seurt ardaoladur e lavarer ez eo E ur ventenn vuzuliadus. Mentad a reer eus ar muzul ivez. Notañ a reer : muz E.

Skouer : Muzul ar regenn [AB], eleze ar regad, a noter muz [AB].

• Aksiomennoù ar muzuliañ :

~ Evit nep teskad muzuliadus E ha F : muz E $\geqslant 0$.

~ muz E + muz F = muz (E $\cup$ F) + muz (E $\cap$ F).

• Div regenn geitvent zo par o muzul. Heñvel dra evit daou gennad korn keitvent, div warenn geitvent.

77 LINENN LIESTUEK HA LIESTUEG

• Ar regennoù eeun $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, …, $[A_{n-2}A_{n-1}]$, $[A_{n-1}A_n]$ a vez graet regennoù kenheuilh anezho.

• Linenn liestuek a reer eus un teskad regennoù kenheuilh. Al linenn liestuek savelet gant ar regennoù :

$[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, …, $[A_{n-2}A_{n-1}]$, $[A_{n-1}A_n]$ a vez notet :
$A_1A_2A_3A_4, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}A_n$. Ar poentoù A_1 hag A_n a anver pennoù al linenn liestuek.

• Ul liestueg eo nep linenn liestuek a zo he fennoù en arun. Ar poentoù A_1, A_2, A_3, A_4, …, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n a vez anvet begoù al liestueg $A_1A_2A_3A_4, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}A_n$.

Ar regennoù $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$, …, $[A_{n-2}A_{n-1}]$, $[A_{n-1}A_n]$ a reer tuioù al liestueg anezho. Daou veg war an un tu zo begoù kenheuilh. Treuzvegenn al liestueg eo nep regenn pennet e daou veg ankenheuilh.

- Anvioù un nebeut liestuegoù (pe lieskornioù) :

  tric'horn (trizueg), pevarzueg (pevarc'horn), pemptueg (pempkorn), c'hwechtueg (c'hwec'hkorn), seizhtueg (seizhkorn), eizhtueg (eizhkorn), navzueg (navc'horn), dektueg (dekkorn), unnektueg (unnekkorn), daouzektueg (daouzekkorn), h.a.

78 RAKGERIOÙ LIESKEMENTIÑ HA RANNGEMENTIÑ

Gwezhiader	Rakger	Arouez	Gwezhiader	Rakger	Arouez
10^{18}	eksa	E	10^{-1}	deki	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	kenti	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mili	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	mikro	µ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	piko	p
10^{2}	hekto	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deka	da	10^{-18}	ato	a

79 UNANENNOÙ REGAD

Anv an unanenn	arouez	gwerzhad
parsek	. . . .	. . . 3,3 bloaziad luc'h
bloaziad luc'h	. . . .	. . . 9,468 milmilion km
unanenn steredoniel	. . . .	. . . 150 milion km
megametr	. . . Mm	. . . 1,000 km pe 10^6 m
kilometr	. . . km	. . . 10 hm pe 10^3 m
hektometr	. . . hm	. . . 10 dam pe 10^2 m
dekametr	. . . dam	. . . 10 m pe 10 m
metr	. . . **m**	. . . **1 m**
dekimetr	. . . dm	. . . 0,1 m pe 10^{-1} m
kentimetr	. . . cm	. . . 0,1 dm pe 10^{-2} m
milimetr	. . . mm	. . . 0,1 cm pe 10^{-3} m
mikron	. . . µ	. . . 0,001 mm pe 10^{-6} m
angstrom	. . . Å	. . . 10^{-10} m

80 REOLLUNIOÙ GORREAD

gorreadoù lunioù ar blaenenn		
Gorreenn	**arouez vuzulioù**	**Gorread**
karrez	an tu : c	c^2
reizhkorneg	an tuioù : a ha b	$a \cdot b$
tric'horn	un tu : a hag ar sav dioutañ : h	$a \cdot h$
tristurieg	an diazoù : D ha d, ar sav : h	$\left(\frac{\mathrm{D}+d}{2}\right) \cdot h$
kensturieg	un tu : b hag ar sav outañ : h	$b \cdot h$
lankell	an treuzvegennoù : t ha t'	$\frac{t \cdot t'}{2}$
kantenn	ar skin : R	$\pi \cdot \mathrm{R}^2$

gorreadoù ec'honennoù		
Arouez vuzulioù	amregad an diaz : **P** gorread an diaz : **B** ar sav : $\boldsymbol{h}$ ar sav ouzh un tal : $\boldsymbol{h'}$ an apotem : $\boldsymbol{a}$ ar skin : **R**	
ec'honenn	**Gorread a-stlez**	**Gorread hollel**
kengereg serzh	$\mathrm{P}\cdot h$	$\mathrm{P}\cdot h + 2\mathrm{B}$
kensturdaleg serzh	$\mathrm{P}\cdot h$	$\mathrm{P}\cdot h + 2\mathrm{BP}$
kerndaleg reoliek	$\dfrac{\mathrm{P}\cdot h'}{2}$	$\dfrac{\mathrm{P}\cdot h'}{2} + \mathrm{B}$
kranenn gelc'htreiñ (serzh)	$2\pi\mathrm{R}\cdot h$	$2\pi\mathrm{R}\cdot h + 2\pi\mathrm{R}^2$
kernenn gelc'htreiñ (serzh)	$\pi\mathrm{R}a$	$\pi\mathrm{R}a + \pi\mathrm{R}^2$
pellenn		$4\pi\mathrm{R}^2$

81 UNANENNOÙ GORREAD

• Bez' ez eus teskadoù poentoù anvet gorreennoù. Ouzh pep gorreenn e c'haller kevrediñ ur gwerc'hel muiel anvet gorread.

• Aksiomennoù ar gorreadoù :
~ Gorread an teskad goullo zo 0.
~ Gorread ur c'harrez hed e du par d'an unanenn regad zo 1.
~ Gorread kembodadur daou deskad disparti zo par da sammad gorreadoù an teskadoù-se.

Unanenn c'horread		
Anv an unanenn	**Arouez**	**Gwerzhad**
kilometr karrez	km^2	100 hm^2
hektometr karrez	hm^2	100 dam^2
dekametr karrez	dam^2	100 m^2
metr karrez	m^2	1 m^2
dekimetr karrez	dm2	0,01 m^2
kentimetr karrez	cm^2	0,01 dm2
milimetr karrez	mm^2	0,01cm^2

• **Gorreadoù douar :**

Anv an unanenn	**Arouez**	**Gwerzhad**
Hektar (kevatal d'an hektometr karrez)	ha	100 a
ar	a	1 a
kentiar	ca	0,01 a pe 1 m^2

82 REOLLUNIOÙ EC'HONAD

• Bez' ez eus teskadoù poentoù anvet ec'honennoù. Da bep ec'honenn e c'haller kevrediñ ur gwerc'hel muiel pe vannel anvet ec'honad.

• Aksiomennoù an ec'honadoù :

~ Ec'honad an teskad goullo zo 0.

~ Ec'honad un diñs hed e du par d'an unanenn regad zo 1.

~ Ec'honad kembodadur daou deskad disparti zo par da sammad ec'honadoù an teskadoù-se.

Ec'honenn	**Arouez vuzulioù**	**Ec'honad**
diñs	ar c'her : a	a^3
kensturdaleg serzh	ar c'herioù : L, l, h	$\mathrm{L}\cdot l\cdot h$
kengereg serzh	gorread an diaz : B hag ar sav : h	$\mathrm{B}\cdot h$
kranenn gelc'htreiñ	skin an diaz : R hag ar sav : h	$\pi\cdot\mathrm{R}^2\cdot h$
kerndaleg	gorread an diaz : B hag ar sav : h	$\dfrac{\mathrm{B}\cdot h}{3}$
kernenn gelc'htreiñ	skin an diaz : R hag ar sav : h	$\dfrac{\pi\cdot\mathrm{R}^2\cdot h}{2}$
pellenn	ar skin : R	$\dfrac{4\pi\mathrm{R}^3}{3}$

83 UNANENNOÙ EC’HONAD HA TOLZDER EC’HONEL

Unanennoù ec’honad		
Anv an unanenn	**Arouez**	**Gwerzhad**
kilometr diñs	km^3	1 000 000 000 m^3
metr diñs	m^3	1 m^3
dekimetr diñs	dm^3	0,001 m^3
kentimetr diñs	cm^3	0,001 dm^3
milimetr diñs	mm^3	0,001 cm^3

Unanennoù ec’honad evit ar c’heuneud		
Anv an unanenn	**Arouez**	**Gwerzhad**
Dekister	dst	0,1 m^3
ster	st	1 m^3

Daveadurioù etre unanennoù ec’honad hag unanennoù endalc’had		
1 m^3 = 10 hL	1 dm^3 = 1 L	1 cm^3 = 1 mL

Unanennoù tolzder ec’honel (pe rummel)	
Anv an unanenn	**Arouez**
gramm dre gentimetr diñs	g / cm^3
kilogramm dre zekimetr diñs	kg / dm^3
tonenn dre vetr diñs	t / m^3

84 UNANENNOÙ MUZULIAÑ AR GENNADOÙ KORN HAG AR GWARENNOÙ

Anv an unanenn	Arouez	Gwerzhad
korn serzh (evit ar gennadoù korn) pevarenn gelc'h (evit ar gwarennoù)	D	1 D
derez	° pe d	$\frac{1}{90}$ D
munud	$'$	$\frac{1}{60}$ d
eilenn	$''$	$\frac{1}{60}\,'$
grad	gr	0,01 D
dekigrad	dgr	0,1 gr
kentigrad	cgr	0,1 dgr
miligrad	mgr	0,1 cgr
radian	rad	$\frac{2}{\pi}$ D

85 TESKADOÙ NIVEROÙ ; KEVANION DAVEEL

• El liesâd kartezel $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e saveler an daveadur kevatalder $\mathscr{R}$, hevelep ma'z eo :

$$(a, b)\ \mathscr{R}\ (a', b') \Longleftrightarrow (a + b' = b + a').$$

skouer : (3, 7) $\mathscr{R}$ (1, 5) pe (4, 3) $\mathscr{R}$ (2, 1)

• $\mathbb{Z}$ a anver teskad dereoù kevatalder an daouac'hoù eus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ evit $\mathscr{R}$.

$\mathbb{Z}$ zo teskad an niveroù kevan (ar c'hevanion) daveel.

• Evit un elfenn n eus $\mathbb{N}$ ha ne vern pe elfenn x eus $\mathbb{N}$, dere an daouac'h $(x, x+n)$ a noter $-n$; an dere kevatalder-se a anver niver kevan leiel pe kevan leiel.

Skouer : $\{(0,3),\ (1,4),\ (2,5),\ \ldots,\ (x, x+3),\ ...\} = -3$.

• Teskad ar c'hevanion leiel a vez notet $\mathbb{Z}^-$, a lenner "Z lei".

• Evit un elfenn n eus $\mathbb{N}$ ha ne vern pe elfenn x eus $\mathbb{N}$, dere an daouac'h $(x+n, n)$ a noter $+n$ pe n ; an dere kevatalder-se a anver niver kevan muiel pe kevan muiel.

Skouer : $\{(1, 0), (2, 1), (3, 2), ..., (x+1, x), ...\} = +1$.

• Teskad ar c'hevanion muiel a vez notet $\mathbb{Z}^+$, a lenner "Z mui". $\mathbb{Z}^+$ a heveleber ouzh $\mathbb{N}$.

• El liesâd kartezel $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e saveler ur sammadur, hevelep ma'z eo :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Skouer :
$(3, 9) + (2, 5) = (5, 14)$ pe $(1, 6) + (25, 4) = (26, 10)$.
Gant ar sammadur-se en deus $\mathbb{Z}$ ul luniadur a stroll kantamsavat.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^- = \{\ldots, \text{-}3, \text{-}2, \text{-}1, 0\}$	$\mathbb{Z}^* = \mathrm{Z} - \{0\} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

• E $\mathbb{Z}$ e saveler an daveadurioù : evit nep daouac'h (a, b) eus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
$(a \leqslant b) \Longleftrightarrow (a - b \in \mathbb{Z}^-)$ hag $(a \geqslant b) \Longleftrightarrow (a - b \in \mathbb{Z}^+)$. $\mathbb{Z}$ zo peururzhiet gant an daveadur $\leqslant$.

• Savelañ a reer gwerzh dizave ur c'hevan daveel : evit nep kevan daveel a, $|a| \in \mathbb{N}$.

• Savelañ a reer ur liesadur war $\mathbb{Z}$. Gant ar sammadur hag al liesadur en deus $\mathbb{Z}$ ul luniadur a walenn gantamsavat, unanek ha kevanled.

Evezhiadenn : $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{0\}$, $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ hag $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$.

86 DIBARDER

• a ha b o vezañ daou niver eus $\mathbb{Z}$, pe $\mathbb{D}$, pe $\mathbb{R}$, pe $\mathbb{Q}$, evit dezgeriañ ez eo an niver $a-b$ leiel hag anvannel, e lavarer ez eo $a-b$ leiel strizh pe ez eo a bihanoc'h eget b (dibarder strizh). Notañ a reer : $a < b$, a lenner "a bihanoc'h eget b". Evit dezgeriañ ez eo leiel strizh un niver x e skriver $x < 0$.

• a ha b o vezañ daou niver eus $\mathbb{Z}$, pe $\mathbb{D}$, pe $\mathbb{R}$, pe $\mathbb{Q}$, evit dezgeriañ ez eo an niver $a-b$ leiel pe vannel, e lavarer ez eo a bihanoc'h pe bar ouzh b (dibarder ledan).

~ Notañ a reer $a \leqslant b$, a lenner "a bihanoc'h pe bar ouzh b". Evit dezgeriañ ez eo leiel pe vannel un niver x e skriver $x \leqslant 0$.

$$\text{Evit nep gwerc'hel } x,\ (x \leqslant 0) \Longleftrightarrow (x \in \mathbb{R}^-).$$

• a ha b o vezañ daou niver eus $\mathbb{Z}$, pe $\mathbb{D}$, pe $\mathbb{R}$, pe $\mathbb{Q}$, evit dezgeriañ ez eo an niver $a-b$ muiel hag anvannel, e lavarer ez eo $a-b$ muiel strizh pe ez eo a brasoc'h eget b (dibarder strizh).

~ Notañ a reer : $a > b$, a lenner "a brasoc'h eget b". Evit dezgeriañ ez eo muiel strizh un niver x e skriver $x > 0$.

• a ha b o vezañ daou niver eus $\mathbb{Z}$, pe $\mathbb{D}$, pe $\mathbb{R}$, pe $\mathbb{Q}$, evit dezgeriañ ez eo an niver $a-b$ muiel pe vannel, e lavarer ez eo a brasoc'h pe bar ouzh b (dibarder ledan). Notañ a reer : $a \geqslant b$, a lenner "a brasoc'h pe bar ouzh b". Evit dezgeriañ ez eo muiel pe vannel un niver x e skriver $x \geqslant 0$.

$$\text{Evit nep gwerc'hel } x,\ (x \geqslant 0) \Longleftrightarrow (x \in \mathbb{R}^+).$$

Evezhiadenn : Evit nep gwerc'helion a ha b : $(a < b) \Longleftrightarrow (b > a)$ hag $(a \leqslant b) \Longleftrightarrow (b \geqslant a)$.

87 GWERZH DIZAVE

• a o vezañ un niver eus $\mathbb{Z}$, pe $\mathbb{D}$, pe $\mathbb{R}$, pe $\mathbb{Q}$, gwerzh dizave a, ma n'eo ket mannel a, zo ar brasañ eus an daou niver a pe $-a$; mard eo a par da vann ez eo an niver mann. Notañ a reer ar werzh dizave $|a|$, a lenner "gwerzh dizave a".

Skouer :
$|-3|$ eo ar brasañ eus an daou niver -3 ha $-(-3)$, eleze $+3$.

• Evit nep gwerc'hel a : Mard eo $a \leqslant 0$, neuze ez eo $|a| = -a$ ha mard eo $a \geqslant 0$, neuze ez eo $|a| = a$.

Skouerioù :
~ $|17| = 17$, rak $17 > 0$; $|-2| = 2$, rak $-2 < 0$

~ $|x-1| \begin{cases} = -x+1, \text{ mard eo } x \leqslant 1 \\ = x-1, \text{ mard eo } x \geqslant 1 \end{cases}$

• Evit nep gwerc'hel a : $|a| \in \mathbb{R}^+$

• Evit gwerc'helion a ha b diforzh : $\begin{cases} |ab| = |a| \cdot |b| \\ \big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b| \end{cases}$

88 MAC'HAD UN NIVER

• n o vezañ ur c'hevan naturel estreget mann pe unan, n-vac'had un niver zo liesâd n periad par d'an niver-se. Notañ a reer n-vac'had a : a^n, a lenner "a mac'h n"

$\boldsymbol{b = a^n}$	
b	mac'had
a	mac'hed
n	mac'her

• Sevel un niver a d'ar mac'h n — n-vac'hañ — zo liesaat n periad a.

Mac'hadur a reer eus seurt jedadur. Daouvac'hañ eo sevel d'ar mac'h daou — lavarout a reer ivez : sevel d'ar c'harrez —, trimac'hañ sevel d'ar mac'h tri — lavarout a reer ivez : sevel d'an diñs.

• Dre gendivizad : $a^1 = a$, $a^0 = 1$, hag evit nep niver a anvannel ha nep kevan naturel n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Eus $-n$ e reer neuze mac'her kevan leiel a.

• Evit nep niver anvannel a ha nep kevan daveel α, a^α a zerc'henn ur mac'had kevan eus a hag α zo ar mac'her kevan daveel eus a.

• Evit nep kevan daveel α hag ar gwerc'helion diforzh a ha b :

$(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$. Evit α ha β kevanion daveel diforzh ha nep gwerc'hel a anvannel : $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ hag $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

89 KARREZ LATIN

• Graet e vez karrez latin eus nep rezi karrezek n rez ha n bann, eleze n^2 tirenn ennañ, ma vez dasparzhet n niver pe arouez, hevelep ma ne gaver hini ebet anezho div wech en un rez pe en un bann. E gerioù all : war bep bann ha war bep rez ne revez pep hini eus an n niver pe arouez nemet ur wech :

E = {a, b, c}

a	b	c
b	c	a
c	a	b

E = {x, y, z, t}

x	y	z	t
y	z	t	x
z	t	x	y
t	x	y	z

• Taolenn Pitagoras ur stroll bevennek zo ur c'harrez latin. Ma n'eo ket taolenn un niñvadur diabarzh $*$ savelet en un teskad E ur c'harrez latin, neuze (E, $*$) ned eo ket ur stroll.

• Arveret e vez ar c'harrezioù latin evit ergrafañ ha dezrannañ arnodoù stadegouriezhel hag ivez e damkaniezh ar stlenn, ent arbennik e studi ar bonegoù reizhañ kammadoù. Er Jedoniezh e vezont engwerc'het er gevosodouriezh. Lies kudenn o tennañ d'ar c'harrezioù latin a ra dave da zamkaniezh ar grafoù ha da arver an urzhiataerioù.

90 STROLL

• Ur stroll (G, $*$) zo un teskad G dezhañ un niñvadur diabarzh $*$ o naouiñ dre ar perzhioù-mañ :

~ Strollatat eo $*$ e G.

~ Un elfenn neptu ez eus evit $*$.

~ Un elfenn gemparzhek zo da nep elfenn eus G evit $*$ e G.

Evezhiadenn :

Elfenn gemparzhek (kemparzheg) un elfenn a eus un teskad E evit un niñvadur diabarzh $*$ en E zo an elfenn b eus E a wir ar parderioù : $a * b = e$ ha $b * a = e$ ma'z eo e elfenn neptu E evit $*$. Kemparzhadus eo nep elfenn a zo dezhi ur c'hemparzheg evit un niñvadur diabarzh $*$.

~ Kemparzheg a evit ar sammadur e $\mathbb{Z}$: $-a$ anvet gourzharouezad a.

~ Kemparzheg x anvannel evit al liesadur e $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{x}$ pe x^{-1} anvet ginad x.

~ Kemparzheg $\overrightarrow{u}$ evit ar sammadur sturiadel : $-\overrightarrow{u}$ sturiadell enebat $\overrightarrow{u}$.

Skouer :

Bezet F teskad ar c'hesaezhadurioù eus un teskad E warnañ e unan. Pourveziñ a reer F gant an niñvadur diabarzh $\circ$ oc'h aroueziñ ar c'hediadur. Kemparzheg f zo f^{-1} kesaezhadur keveskemm f.

Naouiñ a ra ar stroll (F, $\circ$) dre ar perzhioù-mañ, evit nep f, g, h eus F :

$$\sim h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$\sim f \circ \mathrm{Id_E} = f \ ; \ \mathrm{Id_E} \circ f = f$$

$$\sim f \circ f^{-1} = \mathrm{Id_E} \ ; \ f^{-1} \circ f = \mathrm{Id_E}$$

• Pa vez kantamsavat an niñvadur $*$ e lavarer ez eo (G, $*$) ur stroll kantamsavat pe abelel.

$\mathbb{Z}$ **ennañ ar sammadur +** Naouiñ a ra ar stroll kantamsavat ($\mathbb{Z}$, +) dre :	Evit nep a, b, c eus $\mathbb{Z}$	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a+0=a$ hag $0+a=a$ $a+(-a)=0$ hag $(-a)+a=0$ $a+b=b+a$
$\mathbb{R}^*$ **ennañ al liesadur .** Naouiñ a ra ar stroll kantamsavat ($\mathbb{R}^*$, $\cdot$) dre :	Evit nep x, y, z eus $\mathbb{R}^*$	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ $x\cdot 1=1$ hag $1\cdot x=1$ $x\cdot\frac{1}{x}=0$ hag $\frac{1}{x}\cdot x=1$ $x\cdot y=y\cdot x$
$\mathcal{V}$ **teskad sturiadelloù ar blaenenn ennañ ar sammadur sturiadel +** Naouiñ a ra ar stroll kantamsavat ($\mathcal{V}$, +) dre :	Evit nep $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ eus $\mathcal{V}$	$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}$ hag $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ hag $(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

• Dre heñveliezh ouzh ar sammadur war $\mathbb{Z}$ e vez graet stroll sammadel eus ur stroll dezhañ an niñvadur diabarzh notet $+$.

• Dre heñveliezh ouzh al liesadur war $\mathbb{R}^*$ e vez graet stroll liesadel eus ur stroll dezhañ an niñvadur diabarzh notet $\times$ pe $\cdot$.

91 GWALENN

• Ur walenn zo un driac'h (A, $*$, $\perp$), A o vezañ un teskad danlec'hiet d'ar walenn, $*$ ha $\perp$ o vezañ daou niñvadur diabarzh o naouiñ dre ar perzhioù-mañ :

~ A zo dezhañ ul luniad a stroll abelel evit an niñvadur kentañ $*$.

~ Strollatat en A eo an eil niñvadur $\perp$.

~ Dasparzhat eo an eil niñvadur $\perp$ e-keñver an hini kentañ $*$ en A.

• Kantamsavat eo ur walenn (A, $*$, $\perp$) mard eo kantamsavat an eil niñvadur $\perp$.

• Unanek eo ur walenn (A, $*$, $\perp$) mar he deus un elfenn neptu evit an eil niñvadur $\perp$.

• Bezet e elfenn neptu A evit $*$. Kevanled eo ar walenn (A, $*$, $\perp$) mard eo, evit elfennoù diforzh a ha b eus A, $(a \perp b = e) \Longrightarrow (a = e \quad \text{pe } b = e)$.

<u>Skouer</u> :

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $+$ o vezañ ar sammadur hag $\cdot$ al liesadur, zo ur walenn gantamsavat, unanek ha kevanled, o naouiñ dre :

	Evit nep a, b, c eus $\mathbb{Z}$
Gwalenn	• $a+(b+c)=(a+b)+c$ • $a+0=a$ hag $0+a=a$ • $a+(-a)=0$ hag $(-a)+a=0$ • $a+b=b+a$ • $a(b+c)=ab+ac$ hag $(b+c)a=ba+ca$ • $a(bc)=(ab)c$
Gwalenn gantamsavat	• $ab=ba$
Gwalenn gantamsavat hag unanek	• $a\cdot 1=a$ hag $1\cdot a=a$
Gwalenn gantamsavat, unanek ha kevanled	• $(a\cdot b=0) \Rightarrow (a=0 \text{ pe } b=0)$

• $\mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}$ gant an dezvoù + ha · ned eo ket ur walenn gevanled, rak $\dot{2}\,.\,\dot{2} = \dot{0}$ ha padal $\dot{2} \neq \dot{0}$.

92 TESKAD AN NIVEROÙ DEKRANNEL DAVEEL

• Desellout a reer teskad P mac'hadoù kevan 10 :
P = {…, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{-0}, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, …, }. El liesâd kartezel $\mathbb{Z} \times$ P e saveler an daveadur kevatalder $\mathscr{S}$, hevelep ma'z eo :

$$(a,\, 10^{p})\ \mathscr{S}\ (10a,\, 10^{p-1}).$$

Da skouer hon eus :

$$(5, 10^2)\,\mathscr{S}(50, 10),\ (-3, 10^4)\,\mathscr{S}(-30, 10^3),\ (21, 10^{-2})\,\mathscr{S}(210, 10^{-3}),$$
$$(-451, 10^0)\,\mathscr{S}(-4510, 10^{-1}).$$

Nep dere kevatalder amparet gant an daouac'hoù eus $\mathbb{Z} \times$ P evit $\mathscr{S}$ a vez anvet niver dekrannel daveel. Lavarout a reer ivez : un dekrannel daveel. Teskad an dekrannelion daveel a noter $\mathbb{D}$.

~ Mard eo muiel a e reer dekrannel muiel eus dere (a, 10^{p}). Teskad an dekrannelion muiel a noter $\mathbb{D}^{+}$, a lenner "D mui".

~ Mard eo leiel a e reer dekrannel leiel eus dere (a, 10^{p}). Teskad an dekrannelion leiel a noter $\mathbb{D}^{-}$, a lenner "D lei."

~ Mard eo p muiel pe vannel e skriver dere (a, 10^{p}) e rezh ur c'hevan daveel $a \cdot 10^{\mathrm{p}}$.

Skouer : Dere (5, 10^{2}) a skriver 500, hini (-30, 10^{3}) a skriver -30000.

~ Mard eo p leiel e skriver dere (a, 10^{p}) e rezh un niver skejel.

Skouer : Dere (21, 10^{-2}) a skriver 0,21 ha hini (-4, 10^{-3}) a skriver $-0{,}004$.

~ Teskad an dekrannelion daveel anvannel a vez notet : $\mathbb{D}^{*}$.

$$\mathbb{D}^{*} = \mathbb{D} - \{0\}.$$

• E $\mathbb{Z} \times$ P e saveler ur sammadur, hevelep ma'z eo :

$$(a,\, 10^{p}) + (b,\, 10^{p}) = (a+b,\, 10^{p}).$$

Da skouer :

$(3,\ 10^2) + (4,\ 10^2) = (7,\ 10^2)$, eleze $300 + 400 = 700$.

$(5,\ 10^{-1}) + (-6,\ 10^{-1}) = (-1,\ 10^{-1})$, eleze $0{,}5 + (-0{,}6) = -0{,}1$.

• E $\mathbb{Z} \times P$ e saveler ul liesadur, hevelep ma'z eo :

$$(a,\ 10^p) \times (b,\ 10^q) = (ab,\ 10^{p+q}).$$

Da skouer :

$(4,\ 10^2) \times (3,\ 10^{-3}) = (12,\ 10^{-1})$, eleze $400 \times 0{,}003 = 1{,}2$.

$(5,\ 10^{-1} \times (-6,\ 10^{-1})) = (-30,\ 10^{-2})$, eleze $0{,}5 \times (-0{,}6) = -0{,}3$.

• Gant ar sammadur hag al liesadur en deus $\mathbb{D}$ ul luniad a walenn gantamsavat, unanek ha kevanled.

• E $\mathbb{D}$ e saveler an daveadurioù :

$$(\alpha \leqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta \in \mathbb{D}^-) \quad \text{hag} \quad (\alpha \geqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta \in \mathbb{D}^+).$$

$\mathbb{D}$ zo peururzhiet gant an daveadur $\leqslant$. Savelañ a reer ivez gwerzh dizave un dekrannel daveel ha sternioù un dekrannel daveel.

• $\mathbb{D}^+ \cap \mathbb{D}^- = \{0\}$, $\quad \mathbb{D}^+ \cup \mathbb{D}^- = \mathbb{D}$, $\quad \mathbb{N} \subset \mathbb{D}$, $\quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

93 TESKAD SERR

• Un eeunenn D a savel div ledplaenenn en ur blaenenn ; kembodadur unan eus al ledplaenenn-se gant an eeunenn D a anver ledplaenenn serr a vevenn D.

• Parzh un eeunenn oc'h enderc'hel ur poent A, ur poent B hag an holl boentoù lec'hiet etre A ha B a anver regenn serr pennet en A ha B hag a noter [AB] pe [A, B].

• Un teskad poentoù zo serr pa endalc'h holl boentoù e vevenn. E-se e c'haller savelañ :

~ ul ledeeunenn serr,

~ ur gennad korn serr,
~ ur gantenn serr,
~ ur warenn serr
~ ur voull serr.

• E o vezañ un teskad niveroù peururzhiet gant an daveadur urzhiañ $\leqslant$, a ha b o vezañ daou niver eus E, hevelep ma'z eo $a \leqslant b$, an teskad savelet gant $x \in$ E hag $a \leqslant x \leqslant b$ a anver entremez serr pennet en a ha b pe c'hoazh entremez serr a vonnoù a ha b. Notet e vez $[a, b]$.

• Ur stern eus an niver x zo un daouac'h (a, b), hevelep ma 'z eo $x \in [a, b]$.

94 TESKAD DIGOR

• A ha B o vezañ daou boent eus un eeunenn xy, parzh an eeunenn xy oc'h enderc'hel ar poentoù all estreget A ha B, lec'hiet etre A ha B, a anver regenn digor pennet en A ha B. Notañ a reer :]AB[pe]A, B[.

• Un teskad poentoù zo digor pa na endalc'h ket poentoù e vevenn. E-se e c'haller savelañ :

~ ul ledplaenenn digor,
~ ul ledeeunenn digor,
~ ul lurell digor,
~ ur gennad korn digor,
~ ur gantenn digor,
~ ur warenn digor,
~ ur voull digor.

• E o vezañ un teskad niveroù peururzhiet gant an daveadur urzhiañ $\leqslant$, a ha b o vezañ daou niver eus E, hevelep ma'z eo $a < b$, an teskad savelet gant $x \in$ E a anver entremez digor pennet en a ha b pe c'hoazh entremez digor a vonnoù a ha b. Notet e vez $]a, b[$.

• Ur stern strizh eus an niver x zo an daouac'h (a, b), hevelep ma'z eo $x \in]a, b[$.

• An teskad savelet gant $x \in \mathbb{R}$ a vez notet ivez $]-\infty, +\infty[$, a lenner :
"entremez leianvevenn, muianvevenn".

Graet e vez eeunenn an niveroù eus an teskad-se.

95 DIGOR A-GLEIZ, SERR A-ZEHOU

• A ha B zo daou boent eus an eeunenn xy, B lec'hiet a-zehou da A. Parzh an eeunenn xy oc'h enderc'hel ar poent B hag ar poentoù lec'hiet etre A ha B anarun gant A, a anver regenn pennet en A ha B digor a-gleiz ha serr a-zehou. Notañ a reer]AB].

• E o vezañ un teskad niveroù peururzhiet gant $\leqslant$, a ha b o vezañ daou niver, hevelep ma'z eo $a < b$, an teskad savelet gant $x \in$ E hag $a < x \leqslant b$ a vez anvet entremez eus E, a bennoù (pe c'hoazh bonnoù) a ha b, digor a-gleiz ha serr a-zehou. Notañ a reer]a, b].

• A-wechoù e lavarer ez eo an daouac'h (a, b) ur stern strizh a-gleiz eus an niver x mard eo $x \in [a, b]$.

96 SERR A-GLEIZ, DIGOR A-ZEHOU

• A ha B zo daou boent eus an eeunenn xy, B lec'hiet a-zehou da A. Parzh an eeunenn xy oc'h enderc'hel ar poent A hag ar poentoù lec'hiet etre A ha B anarun gant B, a anver regenn pennet en A ha B digor a-zehou ha serr a-gleiz. Notañ a reer [AB[.

• E o vezañ un teskad niveroù peururzhiet gant $\leqslant$, a ha b o vezañ daou niver, hevelep ma'z eo $a < b$, an teskad savelet gant $x \in$ E a vez anvet entremez eus E, a bennoù (pe c'hoazh bonnoù) a ha b, serr a-gleiz ha digor a-zehou. Notañ a reer $[a, b[$.

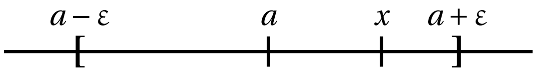
• Bezet (a, b) un daouac'h ; a-wechoù e lavarer ez eo (a, b) ur stern strizh a-zehou eus an niver x mard eo $x \in [a, b[$.

97 RIÑVAÑ ARNESADEK

• Ur gwerc'hel a zo ur werzh arnesadek eus x war-bouez ε mard eo $|x - a| \leqslant \varepsilon$ pe, pezh zo kevatal, mard eo $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$. Ar gwerc'hel ε zo un andiender war ar werzhad arnesadek. E-lec'h gwerzh arnesadek e lavarer ivez arnesâd (andiender war un arnesâd : muiant ε eus gwerzh dizave ar forc'had). Skrivañ a c'haller ivez :

$$x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon],$$

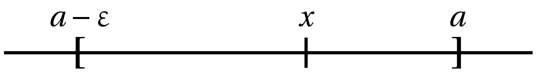
pezh a c'haller derc'hennañ war eeunenn an niveroù :



• Mard eo $a \leqslant x \leqslant a+\varepsilon$ ez eo a un isarnesâd (ur werzh isarnesadek) war-bouez ε (pe : gant un andiender ε).

Skrivañ a c'haller ivez : $x \in [a\ ,\ a+\varepsilon]$ ha derc'hennañ a c'haller :

• Mard eo $a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a$ ez eo a un uc'harnesâd (ur werzhad uc'harnesadek) war-bouez ε (pe : gant an andiender ε). Skrivañ a c'haller $x \in [a-\varepsilon, a]$ ha derc'hennañ a c'haller :



• Arnesâd dekrannel ur gwerc'hel x diwar rontaat :

Un dekrannel $a = m10^{-n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ zo un arnesâd eus x diwar rontaat mard eo $a - 5.10^{-(n+1)} \leqslant a+5.10^{-(n+1)}$. Un arnesâd gant un andiender $5.10^{-(n+1)}$ eus x eo a. Ar peurliesañ e vez roet arnesâdoù diwar rontaat en taolennoù niverel. Da skouer, mar kaver 7,6158 evit $\sqrt{58}$, hon eus $7{,}61575 \leqslant \sqrt{58} \leqslant 7{,}61585$. Anv a reer ivez a arnesâd diwar grennañ, pa grenner an niver o lezel da gouezhañ un darn eus an dekranennoù. Da skouer : evit $\sqrt{58}$ e vo kemeret 7,6 pe 7,61 pe 7,615 a zo kement a grennadoù. E se 7,6 zo ur c'hrennad ha 7,62 ur rontâd.

• Isarnesâd ur gwerc'hel x : arnesâd x bihanoc'h eget x. An niveroù -1 ha 3,13 zo isarnesâdoù eus π.

• Uc'harnesâd ur gwerc'hel x : arnesâd x brasoc'h eget x. An niveroù 10 hag 1,5 zo uc'harnesâdoù eus $\sqrt{2}$.

• Un isarnesâd dekrannel a'n urzh n (pe : war-bouez 10^{-n}) eus ar gwerc'hel x zo an dekrannel $m10^{-n}$, hevelep ma'z eo :

$$m10^{-n} \leqslant x < (m+1)10^{-n}, \quad \text{gant } n \in \mathbb{N} \quad \text{ha } m \in \mathbb{Z}.$$

• Un uc'harnesâd dekrannel a'n urzh n (pe : war-bouez 10^{-n}) eus ar gwerc'hel x zo an dekrannel $(m+1)10^{-n}$, hevelep ma'z eo :

$$m10^{-n} < x \leqslant (m+1)10^{-n}, \quad \text{gant } n \in \mathbb{N} \quad \text{ha } m \in \mathbb{Z}.$$

<u>Skouer</u> :

~ Bezet $x \in [81{,}62\ ;\ 81{,}63[$, neuze 81,62 zo un isarnesâd dekrannel a'n urzh 2 eus x.

~ Bezet $x \in]0{,}333\ ;\ 0{,}334]$, neuze 0,334 zo un uc'harnesâd dekrannel a'n urzh 3 (pe : war-bouez 10^{-3}, pe c'hoazh : gant un andiender 10^{-3}) eus x.

• Bezet $1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$. Neuze e c'haller lavarout :

~ 1,41421 zo un isarnesâd eus $\sqrt{2}$ gant un andiender 10^{-5}.

~ 1,41422 zo un uc'harnesâd eus $\sqrt{2}$ gant un andiender 10^{-5}.

~ 1,414215 zo un arnesâd eus $\sqrt{2}$ gant un andiender 5.10^{-6}.

• a o vezañ ur c'hevan daveel, n ur c'hevan naturel, mard eo x ur gwerc'hel, hevelep ma'z eo :

$$a10^{-n} + 5.10^{-n-1} \leqslant x \leqslant (a+1)10^{-n} + 5.10^{-n-1}$$

e skriver a-wechoù :

$$x \simeq (a+1)10^{-n} \quad \text{pe} \quad x \# (a+1)10^{-n},$$

a lenner “ x dambar da $(a+1)10^{-n}$ ”.

<u>Skouer</u> :

~ O vezañ ma'z eo $3{,}135 < \pi < 3{,}145$, e vo skrivet $\pi \simeq 3{,}14$.

~ $x \simeq 5{,}33$ a dalvez al liesañ $5{,}325 \leqslant x \leqslant 5{,}335$.

~ $x \simeq 14{,}250$ a dalvez al liesañ $14{,}245 \leqslant x \leqslant 14{,}255$.

~ Ur riñverez o wereañ 8 sifrenn a ro $\sqrt{2} \simeq 1,4142136$ a dalvez al liesañ :

$1,41421355 \leqslant x < 1,41421365$.

• x_0 o vezañ un arnesâd eus ur gwerc'hel x war-bouez α, pa skriver $x = x_0$ e reer ur fazi. En degouezh-se e reer fazi eus ar forc'had $x - x_0$. Ne c'haller ket savelañ ar fazi-se, hogen α zo ur muiant anezhañ. Lavarout a reer ivez ez eo ar fazi muiantet gant α : $|x - x_0| < \alpha$.

98 ENTREMEZIOÙ DAZGANNAT

• Graet e vez heuliad dazreat e-keñver ar gannadur nep heuliad a deskadoù :

$$\mathrm{A_0},\ \mathrm{A_1},\ \mathrm{A_2},\ \mathrm{A_3},\ \ldots,\ \mathrm{A_n},\ \ldots \text{ hevelep ma'z eo}$$
$$\ldots \subset \mathrm{A_n} \subset \mathrm{A_{n\text{-}1}} \subset \ldots \subset \mathrm{A_2} \subset \mathrm{A_1} \subset \mathrm{A_0}$$

Skrivañ a reer : $\mathrm{A_0} \supset \mathrm{A_1} \supset \mathrm{A_2} \supset \mathrm{A_3} \ldots \supset \mathrm{A}_{n-1} \supset \mathrm{A}_n \supset \ldots$

Skouer : An heuliad $\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \ldots$ zo un heuliad dazreat e-keñver ar gannadur, rak $\{a\} \subset \{a, b\} \subset \{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$.

• Entremezioù dazgannat a reer eus an entremezioù a zo en un heuliad entremezioù, hevelep ma'z eo pep entremez o c'henniñ an hini a-raok.

Skouer : [1; 2], [1,1 ; 1,9], [1,11 ; 1,89], [1,12 ; 1,88], [1,13 ; 1,87] zo entremezioù dazgannat.

99 DISPAKAD DEKREDEL ANVEVENN

• Savelañ a reer un dispakad dekredel , a gleiz da zehou, gant un heuliad bevennek a sifrennoù a'r reizhiad dekredel, anvet lodenn gevan an dispakad dekredel ; ur skej (pe ur pik) ; un heuliad anvevenn a sifrennoù a'r reizhiad dekredel, pep hini eus ar sifrennoù-se o vezañ anvet sifr dekrannel pe dekrannenn a'n dispakad.

Skouer : 0,333... ; 211,195195195... ; 36,45156712... ; 4,231031531 zo dispakadoù dekredel.

Evezhiadenn :

Heñvel dra e tespizer dispakad diazez p $\left(p \in \mathbb{N} - \{0,1\}\right)$ — pe, dispakad p-redel — ur c'hevan muiel x a c'hell bezañ skrivet en un doare unel $x = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$, ma'z eo an a_k-où naturelion, hevelep ma'z eo $0 \leqslant a_k \leqslant p-1$. An heuliad $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n$ bet evel-se a reer dispakad p-redel x a skriver a-wechoù $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{p}$.

Da skouer : $\overline{1101}^{2} = 13$; $\overline{13}^{10} = 13$; $\overline{21}^{6} = 13$.

Evit nep gwerc'hel $x \in [0,\ 1]$ ez eus un heuliad unel $(a_n)_{n \geqslant 1}$ a naturelion eus $[0,\ p\ -\ 1]$, hevelep ma kengerc'h ar steudad $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{a_n}{p_n}$ war-du x ; ar steudad-se zo dispakad p-redel x. Ar sammadoù darnel a'r steudad-se zo elfennoù $\mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{p}\right] \subset \mathbb{Q}$ a ro arnesâdoù kemezel x.

● Un dispakad dekredel anvevenn zo trovezhiek mar ha nemet mard eo amparet e sifrennoù gant ur sifrenn pe ur gronnad sifrennoù arreet dibenndermen. An niver derc'hennet gant ar sifrenn pe ar gronnad sifrennoù a vez graet trovezh an dispakad dekredel anezhañ.

Skouer :

~ 0,3333... zo un dispakad dekredel anvevenn trovezh 3.

~ 210,195195195... zo un dispakad anvevenn trovezh 195.

~ $\sqrt{2}$ n'en deus ket a zispakad dekredel anvevenn trovezhiek.

Evezhiadenn :

Evit skrivañ un dekrannel muiel e rezh un dispakad dekredel anvevenn ez ouzhpenner un anvevennad a vannoù da heul e lodenn rannek.

Da skouer : 4,93 a c'haller skrivañ 4,93000000... ; 0 a c'haller skrivañ 0,000...

100 TESKAD AR GWERC'HELION

• Adalek an henamzer e oa bet dizoloet skorted damkanel an niveroù kemezel ; Aristoteles, da skouer, a ziskouezas n'eus ket a niver kemezel, hevelep ma'z eo $x^2 = 2$. Evit Euklides hag ar jedoniourion eus an amzer-se a selle an niver evel ur regad pe ur muzul. Diwezhatoc'h, studi diskoulmoù an ataladoù a zisoc'has war an niveroù aljebrel hag an niveroù trehontel (17t-19t kantved). N'eo nemet e dibenn an 19t kantved e voe damkanet ha savet e pep rikted korf ar gwerc'helion diwar korf ar c'hemezelion, evit ezhommoù an dezrann.

~ Teskad an niveroù gwerc'hel — pe gwerc'helion — a vez notet $\mathbb{R}$.

~ $\mathbb{R}$ zo teskad an dispakadoù dekredel anvevenn $a_0, q_1 \ldots q_n \ldots$, hevelep ma'z eo $0 \leqslant q_n \leqslant 9$ evit nep n ha hevelep ma n'eus kevan naturel ebet k gant $q_n = 9$ evit nep $n > k$.

~ $\mathbb{R}$ a endalc'h an holl zekrannelion.

~ $\mathbb{R}$ zo peururzhiet gant an daveadur $\leqslant$.

~ Etre div elfenn anpar eus $\mathbb{R}$ ez eus un dekrannel da nebeutañ.

• Pourvezet eo $\mathbb{R}$ gant ur sammadur notet + hag ul liesadur notet × ; an daou niñvadur-se a askouezh ar sammadur hag al liesadur e $\mathbb{D}$ da $\mathbb{R}$.

• Evit nep elfenn a, b, c eus $\mathbb{R}$: $\begin{cases} (a \leqslant b) \Longrightarrow (a+c \leqslant b+c) \\ (a \geqslant 0 \text{ ha } b \geqslant 0) \Longrightarrow (ab \geqslant 0) \end{cases}$

• $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ zo ur c'horf kantamsavat peururzhiet.

• Teskad ar gwerc'helion anvannel a noter $\mathbb{R}^*$, a lenner "R sterenn".

• Teskad ar gwerc'helion muiel pe vannel a noter $\mathbb{R}^+$, a lenner "R mui".

• Teskad ar gwerc'helion leiel pe vannel a noter $\mathbb{R}^-$, a lenner "R lei".

• $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$; $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}^+$, $\mathbb{D}^+ \subset \mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}^+$; $\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{R}^-$, $\mathbb{D}^- \subset \mathbb{R}^-$, $\mathbb{Q}^- \subset \mathbb{R}^-$.

101 KORF

• Ur c'horf (K, $*$, $\perp$) zo un driac'h, K o vezañ un teskad hag $*$ ha $\perp$, daou niñvadur diabarzh o naouiñ dre ar perzhioù da heul :

Korf (K, $*$, $\perp$)

~ K zo dezhañ ul luniad a stroll abelel evit an niñvadur kentañ $*$.
~ K, hep e elfenn neptu evit $*$, zo dezhañ ul luniad a stroll evit an eil niñvadur $\perp$.
~ An eil niñvadur $\perp$ zo dasparzhat e-keñver an hini kentañ $*$.
~ Mard eo kantamsavat an eil niñvadur $\perp$ e lavarer ez eo kantamsavat ar c'horf K.

Skouer :

$\mathbb{R}$ zo ennañ ar sammadur $+$ hag al liesadur notet "$\times$" pe "$*$". $\mathbb{R}$, korf kantamsavat, en deus ar perzhioù-mañ :

	Evit an holl elfennoù eus $\mathbb{R}$
Korf	• $a(b+c) = ab+bc$ hag $(b+c)a = ba+ca$ • $a+0 = a$ hag $0+a = a$ • $a+(-a) = 0$ hag $(-a)+a = 0$ • $a+b = b+a$ • $a(bc) = (ab)c$ • $a\,.\,1 = a$ hag $1\,.\,a = a$ • Mard eo $a \neq 0$, $a(1/a) = 1$ hag $(1/a)\,.\,a = 1$ • $a+(b+c) = (a+b)+c$
Korf kantamsavat	• $a\,.\,b = b\,.\,a$

Evezhiadenn : Ur c'horf zo ur walenn unanek.

102 LEDEEUNENN

• O tesellout ur poent O war un eeunenn xy e saveler daou barzh a'n eeunenn xy anvet ledeeunenn Ox hag Oy a orin O. Evit dezgeriañ ez eo O ur poent eus al ledeeunenn Ox e lavarer ez eo serr al ledeeunenn ha notañ a reer [Ox pe [Ox). Evit dezgeriañ ez eo O ur poent ezveziat el ledeeunenn Ox e lavarer ez eo digor al ledeeunenn ha notañ a reer]Ox pe]Ox).

• An teskad savelet gant $x \in \mathbb{R}$ hag $x \leqslant a$ a noter $]-\infty,\ a]$, a lenner "entremez leianvevenn, a".

• An teskad savelet gant $x \in \mathbb{R}$ hag $x < a$ a noter $]-\infty,\ a[$, a lenner ivez "entremez leianvevenn, a".

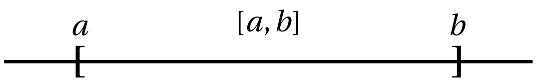
• An teskad savelet gant $x \in \mathbb{R}$ hag $x \geqslant a$ a noter $[a,\ +\infty[$, a lenner "entremez a, muianvevenn".

• An teskad savelet gant $x \in \mathbb{R}$ hag $x > a$ a noter $]a,\ +\infty[$, a lenner ivez "entremez a, muianvevenn".

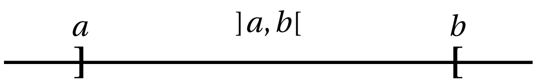
• An teskadoù $]a,\ +\infty[$ ha $]-\infty,\ a[$ a anver a-wechoù ledeeunennoù digor hag an teskadoù $[a,\ +\infty[$ ha $]-\infty,\ a]$ ledeeunennoù serr.

103 DERC'HENNADUR PARZHIOÙ $\mathbb{R}$

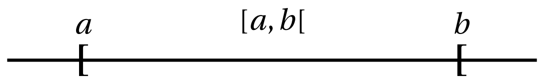
• Derc'hennadur an entremez $[a, b]$



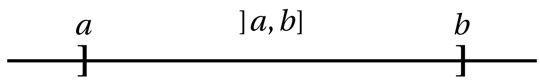
• Derc'hennadur an entremez $]a, b[$



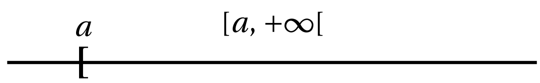
• Derc'hennadur an entremez $[a,b[$



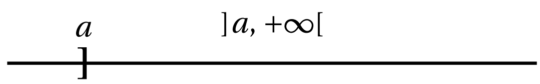
• Derc'hennadur an entremez $]a,b]$



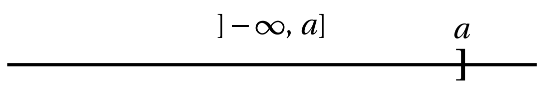
• Derc'hennadur al ledeeunenn $[a, +\infty[$



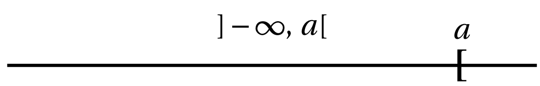
• Derc'hennadur al ledeeunenn $]a, +\infty[$



• Derc'hennadur al ledeeunenn $]-\infty, a]$



• Derc'hennadur al ledeeunenn $]-\infty, a[$



104 RANNAD

• Rannad ar gwerc'hel a dre ar gwerc'hel b anvannel zo ar gwerc'hel x, savelet gant $bx = a$. Lavarout a reer ez eo x rannad dik a dre b. Ar rannadur eo an niñvadur notet " : " a gevaraez savelañ rannad daou niver. Notañ a reer $a : b$, rannad a dre b anvannel, a lenner "a rannet dre b" pe "a rann b".

• Rannad ar gwerc'hel a dre ar gwerc'hel b anvannel a vez notet a/b, $\frac{a}{b}$, a lenner "a war b" pe ivez "a rann b". Graet e vez niverer eus a hag anver eus b.

• Evit nep gwerc'hel a ha nep gwerc'hel b anvannel ha nep gwerc'hel x :

$$(bx = a) \Longleftrightarrow \left(x = \frac{a}{b}\right).$$

• Mard eo $a \in \mathbb{R}$ ha $b \in \mathbb{R}^*$, neuze $ab^{-1} = \frac{a}{b}$ ha $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

• Rannad div gevreizhenn niverel f ha g d'an argemmenn werc'hel x zo ar gevreizhenn niverel h, mar bez anezhi, savelet en $\mathbb{R}$ dre :
$f = g \cdot h$. Rannad f ha g, mar bez anezhañ, a noter $f : g$ pe $\frac{f}{g}$, a lenner "f war g". Skrivañ a c'haller ivez $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

• Rannadur ar c'hevreizhennoù niverel zo an niñvadur a gevaraez savelañ rannad div gevreizhenn niverel. Graet e vez kevreizhenn gemezel pe rann gemezel eus rannad div gevreizhenn bolinom.

Skouer : Bezet ar c'hevreizhennoù f ha g eus $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}$ despizet dre :

$$f(x) = x^2 + 1 \ \text{ ha } \ g(x) = x^2 - 1$$

$$\text{neuze } \ \frac{f}{g}(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

105 DAOUVONAÑ

• Daouvonad ur gwerc'hel muiel pe vannel zo ar gwerc'hel muiel pe vannel x, hevelep ma'z eo $x^2 = a$, eleze karrez — pe daouvac'had — x zo par da a.

Notañ a reer $x = \sqrt{a}$, a lenner "x zo par da a bon daou". Boned a reer eus a. Skrivañ a c'haller ivez : $x = a^{\frac{1}{2}}$, a lenner "a mac'h unan war zaou", an daou-se o vezañ ar boner.

• En $\mathbb{R}$, diskoulmoù an atalad $x^2 = a$ hag $a \geqslant 0$ zo ar gwerc'helion $-\sqrt{a}$ ha $+\sqrt{a}$. E gwir e c'haller skrivañ an atalad-mañ, kevatal d'an hini kentañ : $x^2 - a = 0$ hag $a \geqslant 0$, pe c'hoazh, o periata ar gazel gentañ :

$$\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0 \text{ hag } a \geqslant 0.$$

Alese an daou ziskoulm : $-\sqrt{a}$ a vannela an eil periad ha $+\sqrt{a}$ a vannela an hini kentañ. Skrivañ a reer teskad an diskoulkmoù : $\mathrm{D} = \left\{-\sqrt{a}\ ;\ +\sqrt{a}\right\}$

• Reolennoù :

~ Evit nep gwerc'hel a ha nep gwerc'hel b muiel pe vannel :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

~ Evit nep gwerc'hel muiel pe vannel a ha nep gwerc'hel muiel anvannel b :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

106 KENFEUR

• Pevar gwerc'hel anvannel a, b, c, d, kemeret en urzh-se, a ampar ur c'henfeur mar ha nemet mard eo par keñver an daou gentañ ha keñver an daou ziwezhañ : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Un amveziad ret ha spirus (pe amplegad spirus) evit ma amparfe pevar gwerc'hel a, b, c, d, ur c'henfeur eo $ad = bc$. Termenoù nesañ (nesaoù) a reer eus b ha c, ha termenoù pellañ (pellaoù) eus a ha d.

Lavarout a reer ez ampar pevar gwerc'hel a, b, c, d, ur c'henfeur mar ha nemet mard eo par liesâd ar pellaoù da liesâd an nesaoù.

• Anvet e vez keitad kenfeuriek — pe keitad mentoniel — etre ar gwerc'helion anvannel a ha b nep gwerc'hel x hevelep ma'z eo : $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ eleze $x^2 = ab$. (Kounañ : keitad niveroniel a ha b zo : $\frac{a+b}{2}$).

• n gwerc'hel anvannel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a lavarer kenfeuriek ouzh n gwerc'hel anvannel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ mard eo $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$. Ar gwerc'hel k zo neuze ar gwezhiader kenfeuriegezh. Lavaret e vez ivez en ur yezh laoskoc'h ez eo kenfeuriek an heuliadoù niveroù $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ha $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

• n gwerc'hel anvannel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a lavarer ginfeuriek ouzh n gwerc'hel anvannel $b_1, b_2, \ldots, b_n$, mard eo $a_1 b_1 = a_2 b_2 = \cdots = a_n b_n = k$, k o vezañ un arstalenn.

107 JEDADURIOÙ A-ZIVOUT AR C'HEÑVERIOÙ

• Evit nep gwerc'hel a ha gwerc'helion diforzh b ha c anvannel, ez eo :

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

• Evit a hag a' gwerc'helion diforzh ha b ha b' gwerc'helion diforzh anvannel ez eo :

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}.$$

Lavarout a reer e tireer an daou geñver d'an anver boutin.

• Evit a hag a' gwerc'helion diforzh ha b ha b' gwerc'helion diforzh anvannel ez eo :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}.$$

• Evit a ha b gwerc'helion diforzh anvannel ez eo $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

• Evit nep gwerc'hel a ha gwerc'helion diforzh anvannel b, a', b' ez eo :

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'}.$$

108 TESKAD AN NIVEROÙ KEMEZEL

• Ober a reer niver kemezel — pe kemezel *ls.* -ion — eus nep gwerc'hel x, hevelep ma'z eo $bx = a$, a o vezañ ur c'hevan ha b ur c'hevan anvannel. Un derc'haller eus ar c'hemezel x eo $\dfrac{a}{b}$. Teskad ar c'hemezelion a noter $\mathbb{Q}$, teskad ar c'hemezelion anvannel $\mathbb{Q}^*$ (Q sterenn), teskad ar c'hemezelion muiel $\mathbb{Q}^+$ (Q mui), teskad ar c'hemezelion leiel $\mathbb{Q}^-$ (Q lei).

~ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$.

~ $\mathbb{Q}$ zo ur parzh stabil (pe ur parzh kloz) eus $\mathbb{R}$ evit ar sammadur hag al liesadur.

~ $(\mathbb{Q}, +, \times, \leqslant)$ zo ur c'horf kantamsavat peururzhiet.

• Niver ankemezel — pe ankemezel — a reer eus nep gwerc'hel ezveziat e $\mathbb{Q}$. Da skouer : π, $\sqrt{2}$ zo ankemezelion.

• Bezet $\mathscr{R}$ an daveadur daouadek savelet war $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dre :

"evit an holl gevanion a hag a' hag an holl gevanion anvannel b ha b' :

$$(a, b)\ \mathscr{R}\ (a', b') \Longleftrightarrow ab' - a'b = 0."$$

An daveadur $\mathscr{R}$ zo un daveadur kevatalder war $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, an dereoù kevatalder oc'h amparañ ar c'hemezelion, ha neuze : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \mathscr{R} = \mathbb{Q}$.

Ur c'hemezel a zo ar rann (a, b) — notet $\dfrac{a}{b}$ — un derc'haller anezhañ a vez notet ivez $\dfrac{a}{b}$. Dre ledanviñ e lavarer : ar c'hemezel $\dfrac{a}{b}$, e-lec'h ar c'hemezel derc'hallet gant ar rann $\dfrac{a}{b}$ (an anver eo a hag an niverer eo b).

<u>Skouer</u> : Ar rannoù (1, 2), (−4, −8), (6, 12), ..., $(k,\ 2k)$, gant $k \in \mathbb{Z}^*$, a zerc'hall an un niver kemezel. E notañ a c'haller $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{-4}{-8}$, $\dfrac{6}{12}$, … Lavarout a reer ez eo andire(adus) ar rann $\dfrac{a}{b}$ mar ha nemet mard eo $|a|$ ha $|b|$ naturelion estren (kentañ etrezo).

MEZONIEZH

109 TAOLENN WIRDED

• Ar boelloniezh jedoniel zo un astenn d'ar boelloniezh arouezel, o c'hoarvezout eus ar jedoniekaat anezhi, an erganadoù o vont da riñvennoù, ar poellata d'ur riñvañ, al lavar d'un areg. E-lec'h poelloniezh jedoniel e lavarer ivez mezoniezh.

• Er riñvañ erganadel

1. e roer :

~ Argemmennoù erganadel : $x,\ y,\ z,\ \ldots$;

~ daou niñvader erganadel (lavarout a reer c'hoazh kevaoter) : $\neg$ a lenner "nann", $\wedge$ a lenner "hag" ;

~ ur grommell) hag ur gilgrommell (.

2. e saveler an erganadoù hag e tibaber reoù 'zo anezho evel dezrevelloù "gwir" ; aksiomennoù ar riñvañ erganadel ez int. Mard eo $x \Longrightarrow y$ ur berradur eus $\neg(x \wedge \neg y)$ e c'haller skrivañ an aksiomennoù :

[A1] $\boldsymbol{x \Longrightarrow (x \wedge x)}$

[A2] $\boldsymbol{(x \wedge y) \Longrightarrow x}$

[A3] $\boldsymbol{(x \Longrightarrow y) \Longrightarrow \big(\neg(y \wedge z) \Longrightarrow \neg(z \wedge x)\big)}$

3. e saveler reolennoù dezren, unan hepken en degouezh-mañ, anvet *modus ponens* :

mard eo $\mathscr{A}$ hag $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ erganadoù dienadus,
neuze ez eo $\mathscr{B}$ un erganad dienadus.

• Gwerzhad wirded a reer eus elfenn an teskad {G, F}, ma'z eo G ar werzhad "gwir" ha F ar werzhad "faos". Notet e vez ivez 1 evit ar gwir ha 0 evit ar faos.

• Taolenn wirded an nac'hadur (ginadur mezoniel) :

Teskad an daou arloadur dibarek eus $\{p,\ \neg p\}$ war {G, F} despizet e-barzh an daolenn amañ dindan :

p	$\neg p$
G	F
F	G

Evezhiadenn : $\neg p$ a lenner "nann p" ha notañ a reer a-wechoù $\overline{p}$ (p usrezell) ; ¬ zo an niñvader NANN.

Skouerioù :

Erganad p	**Erganad $\overline{p}$**
$a = b$	$a \neq b$
$x \in \mathrm{A}$	$x \notin \mathrm{A}$
$\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$	$\mathrm{E} \not\subset \mathrm{F}$
$a < b$	$a \geqslant b$
$x > y$	$x \leqslant y$

• Mar saveler parzh P un teskad E dre $\mathrm{P} = \left\{x \in \mathrm{E} \;\middle|\; p(x)\right\}$ ha mar noter $\mathscr{A}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{P}$ a-zivout un elfenn α eus E, neuze ez eo an erganad nann $\mathscr{A}$: $\alpha \in \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{P}$.

• Taolenn wirded ur c'hevaoter "k" estreget an nac'hadur : teskad pevar arloadur dibarek eus $\{p, q, p \mathrm{k}\, q\}$ da $\{\mathrm{G}, \mathrm{F}\}$ a zespizer boas gant taolennoù. Amañ dindan e kaver un nebeut skouerioù.

~ Tu zo da welout an traoù en un doare all. Ur c'hevaoter daouadek diforzh "k" arloet ouzh daou erganad p ha q a c'han un erganad $\{p, q, p \mathrm{k}\, q\}$. Mar darbenner an urzh destlel (roet en daolenn amañ e-kichen) ez eo despizet dewerzhadur $p \mathrm{k}\, q$ dre ur bevarac'h (a, b, c, d), m'o deus a, b, c ha d ar werzhad 1 pe ar werzhad 0. Un doare all zo c'hoazh : sellout ar c'hevaoter evel un arloadur a zo an tarzh anezhañ teskad an daouac'hoù $\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$ hag an amkan an teskad $Gw = \{1, 0\}$. E se ez eo ur c'hevaoter daouadek un arloadur $f : Gw \times Gw \longrightarrow Gw$.

Urzh destlel

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

HAG
(kenglenadur pe kenskejadur mezoniel) derc'hennet dre **.**, ∩ pe ∧

p	q	$p \wedge q$
G	G	G
G	F	F
F	G	F
F	F	F

PE
(kembodadur mezoniel pe sammadur mezoniel pe disglenadur enkaelat) notet ∨, ∪, +

p	q	$p \vee q$
G	G	G
G	F	G
F	G	G
F	F	F

NO
(ezkaeladur pe disglenadur ezkaelat) derc'hennet dre ⊕, ⩖, pe ≠

p	q	$p \oplus q$
G	G	F
G	F	G
F	G	G
F	F	F

Kevemplegadur
mezoniel (kevatalder mezoniel) derc'hennet dre ⟺ pe ≡

p	q	$p \Leftrightarrow q$
G	G	G
G	F	F
F	G	F
F	F	G

NAG
derc'hennet dre serzhell Sheffer | an digembez (pe nac'hadur pebeilat)
$(p|q = \neg p(p \wedge q)$

p	q	$p\|q$
G	G	F
G	F	G
F	G	G
F	F	G

NANO
$\neg p(p \oplus q)$

p	q	$\overline{p \oplus q}$
G	G	G
G	F	F
F	G	F
F	F	G

Emplegadur mezoniel (gannadur mezoniel) derc'hennet dre $\Longrightarrow$ pe $\supset$	**NAPE** derc'hennet gant arouez Peirce an uenac'hadur : $\uparrow$. $p \uparrow q = \neg(p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$
G	G	G
G	F	F
F	G	G
F	F	G

p	q	$p \uparrow q$
G	G	F
G	F	F
F	G	F
F	F	G

Evezhiadenn : A-walc'h eo eriñvañ an arloadurioù f evit kavout 16 arloadur. E se ez eus 16 niñvader daouadek, o tougen war div argemmenn (anvet en degouezh : div niñvuzenn).

110 DIERVADOÙ KARNAUGH

● Diervad Karnaugh zo derc'hennadur kevregat un daolenn wirded. Erouezañ a ra e stumm un daolenn reizhkorn rannet e tirennoù, ma'z eo niver hollel an tirennoù par da $2n$, n o vezañ niver an argemmennoù.

Skouerioù : Taolennoù Karnaugh

a) un argemmenn

$\overline{A}$	$\overline{A}$
A	A

b) div argemmenn

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A}\cdot B$
A	$A\cdot\overline{B}$	$A\cdot B$

c) teir argemmenn

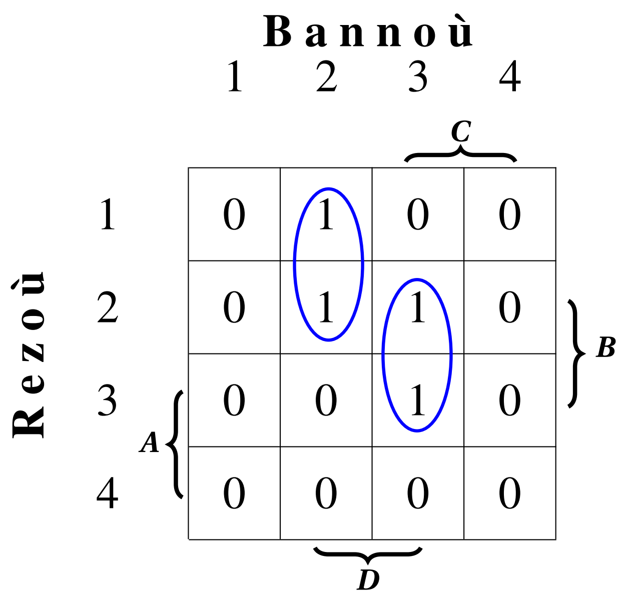
	$\overline{B}$	$\overline{B}$	B	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
A	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$A\cdot\overline{B}\cdot C$	$A\cdot B\cdot C$	$A\cdot B\cdot\overline{C}$
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$

<u>Evezhiadenn</u> : Mat eo merzhout e kemm div direnn amezek dre stad un argemmenn hepken, o welout an daolenn evel ur granenn a-zremm pe a-zerc'h, ma emañ ivez an tirennoù krec'h a-stok ouzh ar re draoñ hag an tirennoù dehou a-stok ouzh an tirennoù kleiz. Derc'hennadur kevregat ar c'hevreizhennoù mezoniel a gevaraez gwiriañ delakadennoù aljebr Boole, ergrafañ mezlunioù hag izekaat niver dorioù mezoniel un amred o werc'hennañ ar gevreizhenn vezoniel.

<u>Skouer</u> : Bezet ur gevreizhenn vezoniel :

$$F = A\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$$

Leuniomp an daolenn Karnaugh diwar atalad boulean ar gevreizhenn. Notañ ez eo dav lakaat gwerzhad vezoniel (0 pe 1) ar gevreizhenn e pep tirenn a'n daolenn. Kavout a reer :



Tirennoù kefin ar rezoù 1 ha 2 eus ar bann 2 a glot ouzh an termenoù $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D$ hag $\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D$ eus an atalad boulean F. Eeunaat a reer an daou dermen-se evel-henn :

$$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D(\overline{B}+B)=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D$$

En un doare heñvel, tirennoù kefin al linennoù 2 ha 3 eus ar bann 3 a glot ouzh an termenoù $\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D$ hag $A\cdot B\cdot C\cdot D$ eus an atalad boulean F. Eeunaat a reer :

$$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+A\cdot B\cdot C\cdot D=B\cdot C\cdot D\cdot(\overline{A}+A)=B\cdot C\cdot D.$$

E se e c'haller skrivañ an (boulean eeunaet : $F=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D+B\cdot C\cdot D$.

An daolenn Karnaugh amañ diaraok a ziskouez penaos eeunaat an atalad boulean roet, dre strollañ an tirennoù lakaet a-wel war al lun. Pa stroller div direnn e tireer an daou dermen o klotañ outo d'un termen hepken. An argemmenn o kemmañ gwerzhad en div direnn a steuz. Setu penaos e ro an diervad amañ diaraok rezh eeunaet an atalad : daou dermen n'eus ken o vezañ ma'z eus div zol.

111 TESKAD SAVELET DRE AN ENTAL

• Savelañ a reer un teskad dre an ental pa roer ur perzh p boutin da elfennoù E, perzh p n'o deus ket an ergorennoù ezveziat en E. Notañ a reer an teskad E : $\{x \mid p(x)\}$, a lenner "teskad an elfennoù x o deus ar perzh p" ; x a anver elfenn c'henadel E, p a anver perzh naouus d'an elfennoù eus E.

• Parzh un teskad E amparet gant elfennoù E dezho ar perzh naouus p a vez notet : $\{x,\ x\in \mathrm{E},\ p(x)\}$ pe $\{x,\ x\in \mathrm{E} \mid p(x)\}$ pe $\{x \mid x\in \mathrm{E},\ p(x)\}$ pe $\{x\in \mathrm{E} \mid p(x)\}$, a lenner "teskad an x-où, hevelep ma'z int enbeziat en E ha dezho ar perzh p" (evel reizh e c'hell bezañ elfennoù estreget reoù E o kaout ar perzh p).

• Un erganad (pe c'hoazh dezrevell) zo gwir *no* faos, eleze ne c'hell ket bezañ gwir ha faos war un dro. Mard eo savelet un teskad P dre $\{x\in \mathrm{E} \mid p(x)\}$ e talvez an erganad "an elfenn α eus E he deus ar perzh p" kement hag $\alpha\in P$.

<u>Skouer</u> : Mard eo P teskad an naturelion hebar, neuze ez eo gwir an erganad $2\in \mathrm{P}$, tra ma'z eo faos an erganad $3\in \mathrm{P}$.

112 DISGLENADUR ENKAELAT

• Kembodadur mezoniel, sammadur mezoniel pe c'hoazh kevreizhenn vezoniel PE a reer ivez eus an disglenadur enkaelat. E se e vez notet $\cup$, pe $+$ pe $\vee$.

• An erganad $p+q+r+\ldots$ en deus ar werzhad 1 en degouezh ma'z eo gwerzhad unan eus an argemmennoù par da 1, da nebeutañ. Gwerzhad ar sammadur mezoniel zo par da 0 en degouezh ma'z eo par da 0 gwerzhadoù an holl argemmennoù.

• An erganad $p \vee \overline{p}$ zo bepred gwir. Lavarout a reer ez eo un arunderc'had.

• Mar saveler ar parzhioù P ha Q eus un teskad E dre $\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\}$ ha $\mathrm{Q} = \{x \in \mathrm{E} \mid q(x)\}$ ha mar noter $\mathscr{A}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{P}$, $\mathscr{B}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{Q}$ a-zivout un elfenn α eus E, neuze ez eo an erganad $\mathscr{A} \vee \mathscr{B} : \alpha \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$. Alese an anv a gembodadur mezoniel.

113 DISGLENADUR EZKAELAT

• Ezkaeladur, dazeilad, pe c'hoazh kevreizhenn vezoniel NO a reer ivez eus an disglenadur ezkaelat. Notet e vez $\oplus$, pe $\veebar$, pe $\neq$.

• An erganad $p \oplus q$ en deus ar werzhad 1 en degouezh ma'z eo par da 1 gwerzhad unan eus an argemmennoù hepken hag ar werzhad 0 en holl zegouezhioù all.

• An erganad $p \oplus q$ a dalvez $(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$.

• Mar saveler ar parzhioù P ha Q eus un teskad E dre $\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\}$ ha $\mathrm{Q} = \{x \in \mathrm{E} \mid q(x)\}$ ha mar noter $\mathscr{A}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{P}$, B an erganad $\alpha \in \mathrm{Q}$ a-zivout un elfenn α eus E, neuze ez eo an erganad $\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}$:

$$\alpha \in \mathrm{P} \triangle \mathrm{Q}.$$

114 EMPLEGADUR MEZONIEL

• Merzhout ez eo faos an erganad $p \Longrightarrow q$ en degouezh ma'z eo faos p, tra ma'z eo gwir q. Aozerion 'zo a skriv $p \supset q$, a lenner "p empleg q". Lavarout a reer ivez ez eo $\Longrightarrow$ ar gevreizhenn vezoniel anvet gannadur.

• En degouezh ma'z eo gwir an erganad $p \Longrightarrow q$:

~ Evit ma ve gwir q ez eo spirus ma ve gwir p. Lavarout a reer ez eo p un amveziad spirus evit ma ve gwir q.

Skouer :

Un amveziad spirus evit ma ve un niver rannadus dre 5 eo ma echufe skrivad dekredel an niver gant ur mann (spirout a ra, met ned eo ket ret : an niveroù oc'h echuiñ gant ur 5 zo rannadus dre 5 ivez).

~ Evit ma ve gwir p ez eo ret ma ve gwir q, ha lavaret e vez ez eo q un amveziad ret, pe un amplegad, evit ma ve gwir p.

Skouer :

Un amplegad evit ma ve kentañ ur c'hevan anpar da 2 eo ma ve ampar ; ned eo ket spirus an amplegad, anat : an niver ampar 9 ned eo ket kentañ.

Evezhiadenn :

Notañ mat ez eo an **e**mplegadur un niñvadur war ziv argemmenn (pe zaou erganad) o reiñ un erganad disoc'h, tra ma'z eo an **a**mplegadur un daveadur etre daou erganad.

• An erganad $q \Longrightarrow p$ a vez graet anezhañ emplegadur keveskemm an erganad $p \Longrightarrow q$.

• An erganad $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ a vez graet anezhañ gourzhlec'hiedenn an erganad $p \Longrightarrow q$.

• Mar saveler ar parzhioù P ha Q eus un teskad E dre $\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\}$ ha $\mathrm{Q} = \{x \in \mathrm{E} \mid q(x)\}$ ha mar noter $\mathscr{A}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{P}$, $\mathscr{B}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{Q}$ a-zivout un elfenn α eus E, neuze ez eo an erganad $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$: $\alpha \in (\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{P}) \cup \mathrm{Q}$.

115 KEVATALDER MEZONIEL

• Graet e vez kevatalder mezoniel (pe kevemplegadur mezoniel) an erganadoù p ha q eus an erganad faos en degouezh ma'z eo faos unan hepken eus an erganadoù p ha q, ha gwir en degouezhioù all. Notañ a reer boas : $p \Longleftrightarrow q$, a lenner "p kevempleg q" pe "p kevatal da q".

• An erganad $p \Longleftrightarrow q$ a dalvez $(p \Longrightarrow q) \ \wedge \ (q \Longrightarrow p)$.

• Mar saveler ar parzhioù P ha Q eus un teskad E dre $\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\}$ ha $\mathrm{Q} = \{x \in \mathrm{E} \mid q(x)\}$ ha mar noter $\mathscr{A}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{P}$, $\mathscr{B}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{Q}$ a-zivout un elfenn α eus E, neuze ez eo an erganad $\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}$:

$$\alpha \in \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{P} \triangle \mathrm{Q}).$$

116 KENGLENADUR

• Graet e vez kenglenadur (pe kenskejadur mezoniel) an erganadoù p ha q eus an erganad gwir en degouezh ma'z eo gwir p ha q war un dro, faos en holl zegouezhioù all. Notañ a reer $p \wedge q$, a lenner "p ha q".

• Digembez eo daou erganad p ha q a zo faos o c'henglenadur. Da skouer : digembez eo p ha $\overline{p}$.

• Mar saveler ar parzhioù P ha Q eus un teskad E dre $\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\}$ ha $\mathrm{Q} = \{x \in \mathrm{E} \mid q(x)\}$ ha mar noter $\mathscr{A}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{P}$, $\mathscr{B}$ an erganad $\alpha \in \mathrm{Q}$ a-zivout un elfenn α eus E, neuze ez eo an erganad $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$:

$$\alpha \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}.$$

117 NAC'HADUR

$\overline{\overline{p}}$		p
$\overline{p \wedge q}$	**a dalvez**	$\overline{p} \vee \overline{q}$
$\overline{p \vee q}$		$\overline{p} \wedge \overline{q}$
$\overline{p \Rightarrow q}$		$p \wedge \overline{q}$

$\overline{p \Longleftrightarrow q}$
$\neg\left(\forall x \in \mathrm{E},\ p(x)\right)$
$\neg\left(\exists x \in \mathrm{E},\ p(x)\right)$

a dalvez

$p \veebar q$
$\exists x \in \mathrm{E},\ \overline{p}(x)$
$\forall x \in \mathrm{E},\ \overline{p}(x)$

Evezhiadenn : Amañ e c'haller degas un arouez traloat e-lec'h "a dalvez", da skouer $\leftrightarrow$. Despizadur an daveadur notet $\leftrightarrow$ o vezañ neuze : P $\leftrightarrow$ Q a dalvez ez eo an erganad (P $\Longleftrightarrow$ Q) un arunderc'had. Merzhout ez eo $\leftrightarrow$ arouez un daveadur ha $\Longleftrightarrow$ arouez ur c'hevaoter, un niñvader. Ha neoazh ez eo P $\leftrightarrow$ Q ha (P $\Longleftrightarrow$ Q) erganadoù o daou.

118 KEMENTADERIOÙ

• Mar saveler parzh P un teskad E dre P $\{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\}$, an daveadur savelet dre P = E a vez notet $\forall x \in \mathrm{E},\ p(x)$, a lenner "ne vern an elfenn x enbeziat en E, $p(x)$", pe "evit pep elfenn $x,\ p(x)$", pe c'hoazh : "holl elfennoù x eus E, $p(x)$", eleze ez eo gwir an erganad $x \in \mathrm{P}$ evit pep elfenn x eus E.

~ An arouez $\forall$ eo hini un niñvader unadek anvet kementader hollerdalat (ar perzh p a sell ouzh holl erdalad E), pe c'hoazh hollerdalader.

• Mar saveler parzh P un teskad E dre $\{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\}$, an daveadur savelet dre P $\neq \emptyset$ a vez notet $\exists x \in \mathrm{E},\ p(x)$, a lenner "Bout zo un x da nebeutañ, hevelep ma'z eo $p(x)$", pezh a dalvez ez eo gwir an erganad $x \in \mathrm{P}$ evit un elfenn x eus an teskad E da nebeutañ.

~ An arouez $\exists$ eo hini un niñvader unadek anvet kementader darnerdalat (ar perzh p a sell ouzh un darn eus erdalad E), pe c'hoazh darnerdalader. A-wechoù e lavarer ivez kementader dibarek.

• Mar saveler ar parzhioù P ha Q eus un teskad E dre $\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\}$ ha $\mathrm{Q} = \{x \in \mathrm{E} \mid q(x)\}$, evit dezgeriañ $\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$ e skriver $\forall x \in \mathrm{E},\ p(x) \Rightarrow q(x)$, pezh a dalvez ivez $\left(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{P}\right) \cup \mathrm{Q} = \mathrm{E}$.

<u>Evezhiadenn</u> : Gwelet hon eus e c'haller savelañ ur c'hendelvadur etre $\left(\mathscr{P}(E),\ \cap,\ \cup,\ \complement_{\mathrm{E}}\right)$, ma 'z eo $\complement_{\mathrm{E}}$ an arloadur $\mathrm{A} \mapsto \complement_{\mathrm{E}}^{\mathrm{A}}$, hag $(\mathscr{A},\ \wedge,\ \vee,\ \neg)$, ma'z eo $\mathscr{A}$ rannad teskad an erganadoù dre an daveadur kevatalder mezoniel. An div bevarac'h-se a ampar ul luniadur anvet **aljebr Boole**. Alese ar c'heñver etre an arouezioù $\cap$ ha $\cup$ diouzh un tu ha $\wedge$ ha $\vee$ diouzh an tu all. Ouzh ar riñvenn $\mathrm{P} \subset \mathrm{Q}$ e klot $p \Rightarrow q$, notet a-wechoù $p \supset q$. Dav merzhout ez eo brasoc'h ental P eget ental Q, tra ma'z eo bihanoc'h erdal P eget erdal Q.

• Mar saveler ar parzhioù P ha Q eus un teskad E dre $\mathrm{P} = \left\{x \in \mathrm{E} \mid p(x)\right\}$ ha $\mathrm{Q} = \left\{x \in \mathrm{E} \mid q(x)\right\}$, evit dezgeriañ $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ e skriver $\forall x \in \mathrm{E},\ p(x) \Longleftrightarrow q(x)$, pezh a dalvez ivez $\complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{P} \triangle \mathrm{Q}) = \mathrm{E}$.

119 EMPLEGADUR JEDONIEL

• Emplegadur jedoniel pe trereadur, pe c'hoazh dezreadur, a reer eus an daveadur etre daou erganad p ha q despizet evel-henn :

$$p \text{ zo gwir ha } p \Longrightarrow q \text{ zo gwir.}$$

An daveadur-se etre p ha q a vez notet :

> $p \vdash q$, a lenner : "treren a reer q eus p","dezren a reer q eus p", "p trere q", "q zo un treread eus p", "mard eo gwir 'p', neuze ez eo gwir q".

• An daveadur savelet dre $p \vdash q$ a vez anvet delakadenn ivez. Darbennad an delakadenn eo p ha dezread an delakadenn eo q.

• Trereadur keveskemm pe keveskemmenn $p \vdash q$ eo an trereadur $q \vdash p$.

• Trereadur ginus pe ginuzenn $p \vdash q$ eo an trereadur $\overline{p} \vdash \overline{q}$.

• Trereadur gourzhlec'hiet pe gourzhlec'hiedenn $p \vdash q$ eo an trereadur $\overline{q} \vdash \overline{p}$.

120 KEVATALDER JEDONIEL

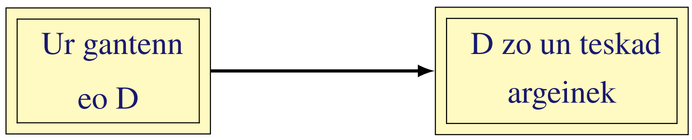
• An daveadur etre an erganadoù p ha q notet $p \vdash\!\dashv q$ a dalvez $(p \vdash q)$ ha $(q \vdash p)$. $p \vdash\!\dashv q$ a lenner : “p zo kevatal da q”, pe “p kevempleg q”, pe “gwir eo p mar ha nemet mard eo gwir q”, pe c’hoazh “q zo un amveziad ret ha spirus (pe, un amplegad spirus) evit p”.

121 FRAMMLUN, TREOLLUN

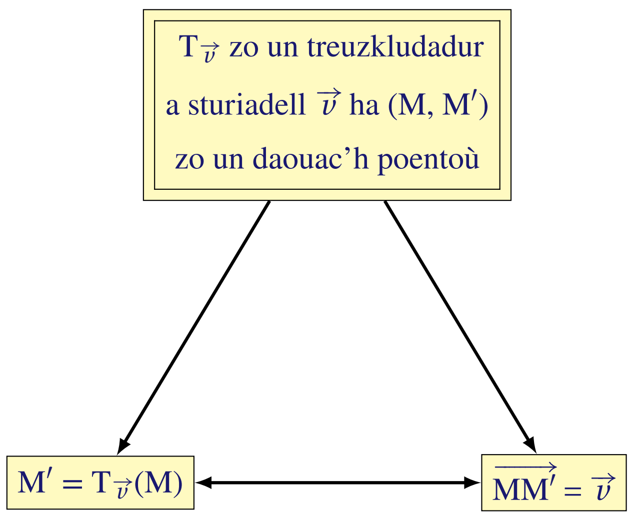
• Ur frammlun zo un diervad o lakaat a-wel framm un dezrevell, un dezreadur, un treol (treollun a vez graet kentoc’h en degouezh-mañ).

<u>Skoueriou</u> :

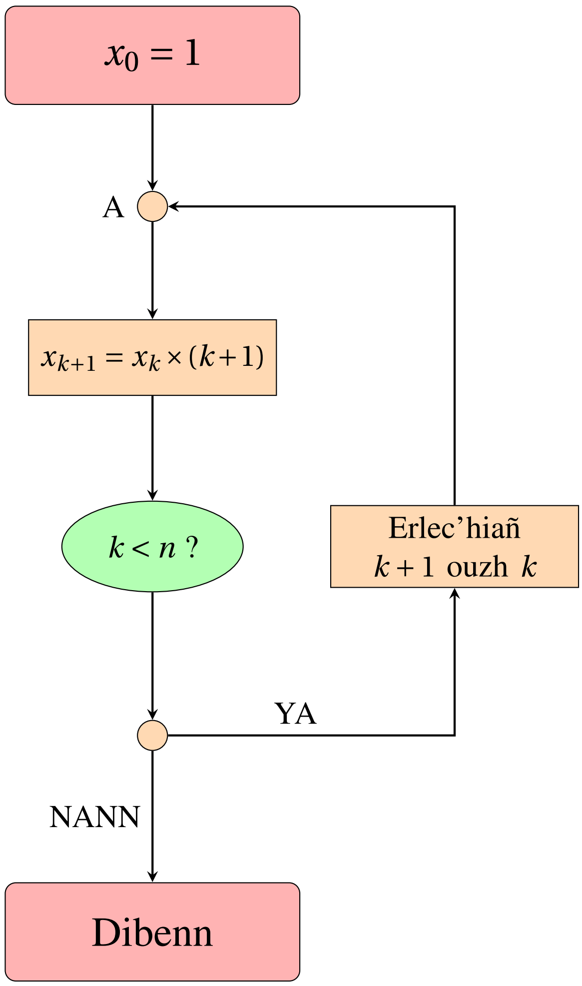
~ Frammlun un emplegadur :



~ Frammlun ur c’hevatalder :



~ Treollun evit jedadur n ! . Teurel evezh ouzh an dol arredeiñ :



DAVEADUR, ARLOADUR, KEVREIZHENN

122 DAVEADUR ASPLEGAT, DAVEADUR GOURZHASPLEGAT

• Un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ zo asplegat en un teskad E mar ha nemet mard eo nep daouac'h (x,x) eus E × E enbeziat e graf $\mathscr{R}$. Dre zespizadur, un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ asplegat en un teskad E zo un daveadur $\mathscr{R}$ en E, hevelep ma'z eo $x\mathscr{R}x$ evit nep elfenn $x$eus E.

<u>Skoueriоù</u> :

~ Asplegat eo an daveadur savelet dre "*bihanoc'h pe bar ouzh*" en $\mathbb{R}$.

~ Asplegat eo an daveadur savelet dre "*kenstur da*" e teskad eeunennoù ar blaenenn.

• Un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en un teskad E ned eo ket asplegat (anasplegat eo) mar ha nemet mard eus eus un daouac'h (x,x) eus E × E da nebeutañ ezveziat e graf $\mathscr{R}$.

<u>Skouer</u> : Ned eo ket asplegat an daveadur savelet dre "*ranner eus*" en $\mathbb{N}$, rak 0 ned eo ket ranner 0.

• Gourzhasplegat eo nep daveadur $\mathscr{R}$ en un teskad E mar ha nemet ma n'eus daouac'h ebet (x,x) eus E × E enbeziat e graf $\mathscr{R}$. Dre zespizadur, un daveadur daouadek gourzhasplegat $\mathscr{R}$ en un teskad E zo un daveadur $\mathscr{R}$ en E, hevelep ma n'eo ket $x\mathscr{R}x$ evit pep elfenn eus E.

<u>Skouer</u> : Gourzhasplegat eo an daveadur savelet dre "*anpar da*" e teskad ar gwerc'helion.

123 DAVEADUR KEMPARZHEK

• Kemparzhek eo nep daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en un teskad E mar ha nemet mard eo an daouac'h keveskemm (y,x) enbeziat en $\mathscr{R}$, evit nep daouac'h (x,y) graf R an daveadur $\mathscr{R}$. Dre zespizadur, un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ kemparzhek en un teskad E zo un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en E, hevelep ma'z eo, evit an holl elfennoù x ha y eus E, $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$.

Skoueriou̇ :

~ Kemparzhek eo an daveadur savelet dre “*bezañ par da*” en $\mathbb{R}$.

~ Kemparzhek eo an daveadur “*kevarzh da*” e teskad an daouboentou̇ eus ar blaenenn.

• Un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en un teskad E ned eo ket kemparzhek (ankemparzhek eo) mar ha nemet mard eus elfennou̇ x ha y eus E, hevelep ma’z eo $(x, y) \in$ R ha $(y, x) \notin$ R, R o vezañ graf $\mathscr{R}$. Dre zespizadur, un daveadur daouadek ankemparzhek en un teskad E zo un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en E, hevelep ma n’eus ket $x \mathscr{R} y \Rightarrow y \mathscr{R} x$ evit un daouac’h bennak (x, y) eus Eă × ăE.

Skouer : Ankemparzhek eo an daveadur savelet en $\mathbb{N}$ dre “*lieskement ha*”.

124 DAVEADUR TRAZEAT

• Trazeat eo nep daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en un teskad E mar ha nemet mard eo evit elfennou̇ diforzh x, y, z eus E :

$$\big((x, y) \in \mathrm{R} \text{ ha } (y, z) \in \mathrm{R}\big) \Longrightarrow \big((x, z) \in \mathrm{R}\big),$$

R o vezañ graf $\mathscr{R}$. Dre zespizadur, un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ trazeat en un teskad E zo un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en E, hevelep ma’z eo :

$$(x \mathscr{R} y \text{ ha } y \mathscr{R} z) \Rightarrow x \mathscr{R} z$$

evit elfennou̇ x, y, z diforzh eus E.

Skoueriou̇ :

~ Trazeat eo an daveadur savelet dre “*gann*” e $\mathscr{P}$(E).

~ Trazeat eo an daveadur savelet dre “*par da*” e $\mathbb{Z}$.

• Un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en un teskad E ned eo ket trazeat mar ha nemet mard eus elfennou̇ x, y, z eus E, hevelep ma’z eo $\big((x, y) \in \mathrm{R}$ ha $(y, z) \in \mathrm{R}\big)$, hag $(x, y) \notin$ R, R o vezañ graf $\mathscr{R}$. Dre zespizadur, un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ antrazeat en un teskad E zo un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en E, hevelep ma n’eo ket $(x \mathscr{R} y$ ha $y \mathscr{R} z) \Rightarrow x \mathscr{R} z$, evit un driac’h bennak (x, y, z) eus E × E × E.

Skouer : Antrazeat eo an daveadur savelet dre “*kenserzh da*” e teskad eeunennou̇ ar blaenenn.

• Kammarver notadur a-zivout daveadurioù trazeat 'zo : $\mathscr{R}$ o vezañ un daveadur trazeat en un teskad E, a, b, c o vezañ elfennoù eus E, mard eo $a\mathscr{R}b$ ha $b\mathscr{R}c$, neuze ez eus ivez $a\mathscr{R}c$. Evit dezgeriañ ar perzh-se e skriver a-wechoù $a\mathscr{R}b\mathscr{R}c$.

125 DAVEADUR GOURZHKEMPARZHEK

• Gourzhkemparzhek eo nep daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en un teskad E mar ha nemet mard eo evit elfennoù diforzh anpar x, y eus E $(x, y) \in \mathrm{R} \Rightarrow (y, x) \notin \mathrm{R}$, R o vezañ graf $\mathscr{R}$. Dre zespizadur, un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ gourzhkemparzhek en un teskad E zo un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en E, hevelep ma'z eo evit an holl elfennoù x ha y eus E $(x\mathscr{R}y$ ha $y\mathscr{R}x) \Rightarrow (x = y)$.

<u>Skouerioù</u> :

~ Gourzhkemparzhek eo an daveadur savelet dre "*ranner eus*" en $\mathbb{N}$.

~ Gourzhkemparzhek eo an daveadur savelet dre "*bihanoc'h eget*" en $\mathbb{R}$.

• Un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en un teskad E ned eo ket gourzhkemparzhek (angourzhkemparzhek eo) mar ha nemet mard eus elfennoù anpar x ha y eus E, hevelep ma'z eo $(x, y) \in \mathrm{R}$ ha $(y, x) \in \mathrm{R}$. Dre zespizadur, un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ angourzhkemparzhek en un teskad E zo un daveadur daouadek $\mathscr{R}$ en E, hevelep ma n'eo ket evit un daouac'h bennak (x, y) eus Eă × ăE $(x\mathscr{R}y$ ha $y\mathscr{R}x) \Rightarrow (x = y)$.

<u>Skouer</u> :

~Angourzhkemparzhek eo an daveadur savelet dre "*kenroud da*" e teskad sturiadelloù ar blaenenn.

126 DAVEADUR URZHIAÑ STRIZH

• Un daveadur urzhiañ strizh en un teskad E eo $\mathscr{R}$ mmard eo gourzhasplegat ha trazeat en E . Gourzhkemparzhek hag ankemparzhek eo war un dro ivez. E se ez eo dezverket an daveadur urzhiañ strizh $\mathscr{R}$ en teskad E dre :

Evit elfennoù diforzh a, b, c eus E	1. $\neg(a\mathcal{R}\,a)$ 2 $a\mathcal{R}\,b \Rightarrow \neg(b\mathcal{R}\,a)$ 3. $(a\mathcal{R}\,b$ ha $b\mathcal{R}\,c) \Rightarrow (a\mathcal{R}\,c)$

Skouer :

An daveadur “*bihanoc'h eget*” zo un daveadur urzhiañ strizh en $\mathbb{N}$.

Evit elfennoù diforzh u, v, w eus $\mathbb{N}$	1. $\neg(u < v)$ 2 $u < v \Rightarrow \neg(v < u)$ 3. $(u < v$ ha $v < w) \Rightarrow (u < w)$

Evezhiadenn :

Un daveadur urzhiañ strizh a noter a-wechoù $\prec$. Evit dezgeriañ ez eo ereet div elfenn a ha b eus un teskad dre un daveadur urzhiañ strizh e vez notet $a \prec b$.

127 DAVEADUR URZHIAÑ

● Un daveadur urzhiañ (ledan) en un teskad E eo $\mathcal{R}$ mar ha nemet mard eo $\mathcal{R}$ un daveadur en E war un dro asplegat, gourzhkemparzhek ha trazeat. E se ez eo dezverket an daveadur urzhiañ $\mathcal{R}$ en teskad E dre :

Evit elfennoù diforzh a, b, c eus E	1. $a\mathcal{R}\,a$ 2 $(a\mathcal{R}\,b$ ha $b\mathcal{R}\,a) \Rightarrow (a = b)$ 3. $(a\mathcal{R}\,b$ ha $b\mathcal{R}\,c) \Rightarrow (a\mathcal{R}\,c)$

Skoueriù :

~ Ar gannadur ledan zo un daveadur urzhiañ e teskad parzhioù un teskad E :

Evit elfennoù diforzh A, B, C eus $\mathscr{P}$E	1. $A \subset B$ 2. $(A \subset B \text{ ha } B \subset A) \Rightarrow (A = B)$ 3. $(A \subset B \text{ ha } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$

~ An daveadur “*bihanoc’h pe bar ouzh*” zo un daveadur urzhiañ en $\mathbb{N}$:

Evit elfennoù diforzh x, y, z eus $\mathbb{N}$	1. $x \leqslant x$ 2. $(x \leqslant y \text{ ha } y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$ 3. $(x \leqslant y \text{ ha } y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$

• Un daveadur urzhiañ a noter a-wechoù $\preccurlyeq$. Evit dezgeriañ ez eo ereet div elfenn a ha b dre un daveadur urzhiañ e noter a-wechoù a $a \preccurlyeq b$, a lenner “*a a-raok b*”. Un teskad dezhañ un daveadur urzhiañ a anver teskad urzhiet.

128 DAVEADUR KEVATALDER

• Un daveadur kevatalder en un teskad E eo $\mathscr{R}$ mar ha nemet mard eo $\mathscr{R}$ un daveadur en E war un dro asplegat, kemparzhek ha trazeat. E se ez eo dezverket an daveadur kevatalder $\mathscr{R}$ en teskad E dre :

Evit elfennoù diforzh a, b, c eus E	1. $a \mathscr{R} a$ 2. $(a \mathscr{R} b) \Rightarrow (b \mathscr{R} a)$ 3. $(a \mathscr{R} b \text{ ha } b \mathscr{R} c) \Rightarrow (a \mathscr{R} c)$

Skoueriou :

~ An daveadur savelet dre “diforc’h x ha y zo ul lieskement da 3” zo un daveadur kevatalder e $\mathbb{Z}$:

Evit elfennoù diforzh x, y, z eus $\mathbb{Z}$	1. $x - x = 3 \times 0$ 2. $(x - y = 3k) \Rightarrow (y - x = 3(-k))$ 3. $(x - y = 3k')$ hag $(y - z = 3k'')$ $\Rightarrow x - z = 3(k' + k'')$ gant $k \in \mathbb{Z},\ k' \in \mathbb{Z},\ k'' \in \mathbb{Z}$

~ An daveadur savelet dre "*kenstur da*" e teskad eeunennoù ar blaenenn P zo un daveadur kevatalder :

Evit elfennoù diforzh d, d', d'' eus P	1. $d \mathbin{/\!/} d'$ 2. $(d \mathbin{/\!/} d') \Rightarrow (d' \mathbin{/\!/} d)$ 3. $(d \mathbin{/\!/} d'$ hag $d' \mathbin{/\!/} d'') \Rightarrow (d \mathbin{/\!/} d'')$

• Evit dezgeriañ ez eo div elfenn a ha b eus un teskad E ereet dre un daveadur kevatalder $\mathscr{R}$ en E e lavarer :

~ a zo kevatal da b dre $\mathscr{R}$,

~ a ha b zo kevatal dre $\mathscr{R}$.

Notañ a reer a-wechoù :

~ $a \sim b \pmod{\mathscr{R}}$,

~ $a \equiv b \pmod{\mathscr{R}}$, a lenner "*a kevatal da b*" modulo $\mathscr{R}$.

<u>Evezhiadenn</u> : Lavaret e vez ivez ez eo daou werc'hel x ha y kewez modulo $\alpha \in \mathbb{R}$, mard eus eus $k \in \mathbb{Z}$, hevelep ma 'z eo $x - y = k\alpha$. An daveadur kewez etre daou niver zo un daveadur kevatalder. Anv a reer ivez en degouezh-se a "*dere kewez*".

129 DERE KEVATALDER, TESKAD RANNAD

• Teskad an elfennoù x eus E ereet ouzh a dre un daveadur kevatalder $\mathscr{R}$ a anver dere kevatalder an elfenn a evit an daveadur kevatalder $\mathscr{R}$ en E pe, berroc'h, dere kevatalder a modulo $\mathscr{R}$. Notañ a reer dere a mod $\mathscr{R}$: $\mathrm{Cl}(x)$, $\dot{x}$, $\overline{x}$. Nep elfenn eus un dere kevatalder a vez anvet derc'haller an dere. Skrivañ a reer :

$$\dot{a} = \dot{b} \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{\mathscr{R}}.$$

• Teskad rannad un teskad E dre un daveadur kevatalder $\mathscr{R}$ en E a reer eus teskad dereoù kevatalder E evit $\mathscr{R}$. Teskad rannad E dre $\mathscr{R}$ a noter $\mathrm{E}/\mathscr{R}$, a lenner "E dre $\mathscr{R}$".

<u>Skouer</u> :

E = $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ha $\mathscr{R}$ an daveadur "*zo dezhañ an un dilerc'h er rannadur dre 3*". Neuze $\mathrm{E}/\mathscr{R} = \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$.

130 TESKAD LIESKEMENTOÙ KEVAN

• Bezet a ur c'hevan naturel anvannel. Teskad lieskementoù kevan naturel a a vez notet $a\mathbb{N}$. Neuze : $a\,\mathbb{N} = \{0, a, 2a, 3a, \dots\}$.

<u>Skouer</u> : Teskad an naturelion hebar zo : $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \ \dots\}$.

• Bezet a ur c'hevan naturel anvannel. Teskad lieskementoù kevan daveel a a vez notet $a\mathbb{Z}$. Neuze : $a\mathbb{Z} = \{\dots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \dots\}$.

<u>Skouer</u> : $3\mathbb{Z} = \{\dots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$.

• Bezet a ur c'hevan naturel anvannel. Teskad an dereoù kevatalder evit an daveadur $\mathscr{R}$ savelet e $\mathbb{Z}$ dre :

$$x \mathscr{R} y \Longleftrightarrow x - y \in a\mathbb{Z}$$

a noter $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$. Neuze $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dots, \dot{\overline{a-1}}\}$.

<u>Skouer</u> : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$.

131 ELFENNOÙ KEVERATADUS

• Div elfenn a ha b eus un teskad E zo keveratadus dre un daveadur urzhiañ en E notet $\preccurlyeq$ mar ha nemet mard eo $a \preccurlyeq b$ pe $b \preccurlyeq a$.

Skoueriou :

~ Daou werc'hel zo keveratadus dre $\leqslant$.

~ Ar parzhioù $\{a\}$ ha $\{b, c\}$ eus $\mathrm{E} = \{a, b, c, d\}$ ned int ket keveratadus dre ar gannadur e $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

• Un daveadur urzhiañ notet $\preccurlyeq$ en un teskad E zo un daveadur peururzhiañ en E mar ha nemet mard eo keveratadus an elfennoù a ha b dre $\preccurlyeq$ evit nep daouac'h (a, b) eus $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$. En degouezh-se e vez lavaret ez eo E un teskad peururzhiet dre $\preccurlyeq$.

Skouer :

$\mathbb{Z}$ zo peururzhiet dre an daveadur "*bihanoc'h pe bar ouzh*" ($\leqslant$).

• Un daveadur urzhiañ notet $\preccurlyeq$ en un teskad E zo un daveadur darnurzhiañ en E mar ha nemet mard eus un daouac'h (a, b) eus $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, hevelep ma n'eo ket keveratadus a ha b dre $\preccurlyeq$. En degouezh-se e lavarer ez eo E un teskad darnurzhiet dre $\preccurlyeq$.

Skouer :

Darnurzhiet eo $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ dre ar gannadur ledan. $\mathbb{N}^*$ zo darnurzhiet dre an daveadur "*a rann rik*".

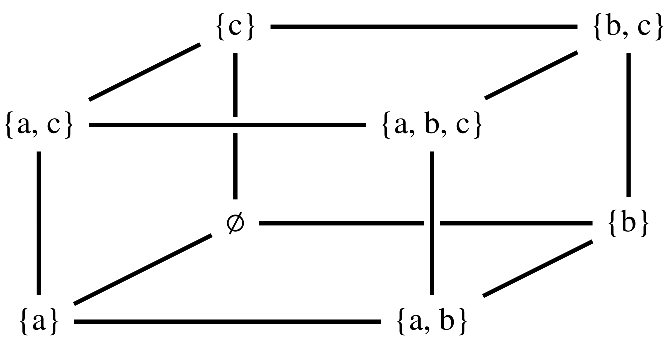
132 TREILH

• Treilh a reer eus un diervad o terc'hennañ elfennoù un teskad urzhiet gant un daveadur urzhiañ. E se, un dreilh zo un teskad urzhiet E, hevelep ma'z eus, evit nep parzh $\{x, y\}$ eus E ennañ div elfenn, un usvonn (notet $x \vee y$) hag un isvonn (notet $x \wedge y$). Da skouer, urzhiet gant ar gannadur, teskad $\mathscr{P}(\mathrm{X})$ parzhioù un teskad X zo un dreilh, hevelep ma'z eo $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ hag $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

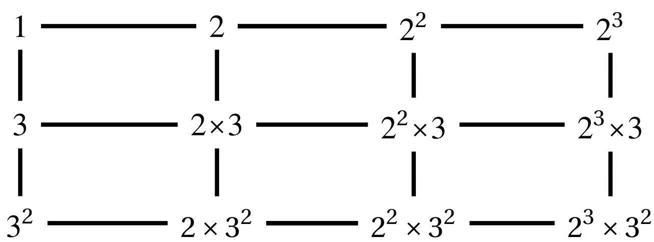
Skoueriou̇ :

~ Treilh parzhiou̇ un teskad E = {a, b}

~ Treilh parzhiou̇ un teskad E = {a, b, c}



~ Treilh rannerioù un niver



133 STABILDED (klozded)

• Bezet un teskad E ennañ un niñvadur $*$ hag ur parzh E' eus E. Mard eo, evit nep elfenn x ha nep elfenn y eus E', $x * y$ elfenn eus E' ivez, e vez lavaret : E' zo ur parzh stabil (lavaret e vez ivez : ur parzh kloz) eus E evit an niñvadur $*$.

Parzh stabil	eus an teskad	evit
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$ pe $\mathbb{D}$ pe $\mathbb{Q}$ pe $\mathbb{R}$	Ar sammadur. Al liesadur.
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$ pe $\mathbb{Q}$ pe $\mathbb{R}$	Ar sammadur. Al liesadur. Al lamadur.
$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$ pe $\mathbb{R}$	Ar sammadur. Al liesadur. Al lamadur.
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	Ar sammadur. Al liesadur. Al lamadur.
Teskad sturiadelloù un eeunenn eus ar blaenenn P	Teskad sturiadelloù ar blaenenn P	Ar sammadur sturiadel. Liesadur ur sturiadell dre ur gwerc'hel.
Teskad treuzkludadurioù un eeunenn eus ar blaenenn P	Teskad an treuzkludadurioù eus ar blaenenn P	Kediadur an treuzkludadurioù.

134 ELFENN REZ

• Rez eo a un elfenn eus un teskad E evit un niñvadur diabarzh en E notet $*$ mar ha nemet mard eus, evit elfennoù diforzh x ha y eus E,

$$(a * x = a * y) \Rightarrow (x = y) \text{ ha } (x * a = y * a) \Rightarrow (x = y)$$

Evezhiadenn : Lavarout a reer ivez ez eeunaer dre a, pe e resaer dre a. Lavarout a reer ivez ez eo a un elfenn eeunadus.

Skoueriò :

~ Rez eo nep elfenn a eus $\mathbb{R}$ evit ar sammadur, rak evit an holl elfennoù x ha y eus $\mathbb{R}$, nep elfenn a eus $\mathbb{R}$ zo hevelep ma'z eo :

$$(a + x = a + y) \Rightarrow (x = y) \text{ ha } (x + a = y + a) \Rightarrow (x = y).$$

~ Rez eo nep elfenn a eus $\mathbb{R}^*$ evit al liesadur, rak evit an holl elfennoù x ha y eus $\mathbb{R}^*$, nep elfenn a eus $\mathbb{R}^*$ zo hevelep ma'z eo :

$$(a \cdot x = a \cdot y) \Rightarrow (x = y) \text{ ha } (x \cdot a = y \cdot a) \Rightarrow (x = y).$$

• Mar bez anezhi, elfenn neptu un teskad E evit un niñvadur diabarzh en E zo un elfenn rez eus E evit an niñvadur-se.

• Mar bez anezhi, elfenn c'hougemerus un teskad E evit un niñvadur diabarzh $*$ en E ned eo ket un elfenn rez eus E evit $*$: elfenn anrez E evit $*$ eo.

Skoueriò :

~ E zo un elfenn anrez eus $\mathscr{P}$(E) evit ar c'hembodadur e $\mathscr{P}$(E).

~ $\emptyset$ zo un elfenn anrez eus $\mathscr{P}$(E) evit ar c'henskejadur e $\mathscr{P}$(E).

~ 0 zo un elfenn anrez eus $\mathbb{R}$ evit al liesadur en $\mathbb{R}$.

135 ELFENN GEZTREVAC'H

• Keztrevac'h eo x un elfenn eus un teskad E savelet ennañ un niñvadur diabarzh $*$ mar ha nemet mard eo $x * x = x$.

• Elfenn neptu un teskad E evit un niñvadur diabarzh $*$ zo un elfenn geztrevac'h en E gant an niñvadur $*$.

• Nep elfenn c'hougemerus eus un teskad E evit un niñvadur diabarzh $*$ zo un elfenn geztrevac'h en E gant an niñvadur $*$.

Skoueriou :

Elfenn geztrevac'h	en teskad	savelet ennañ
0	$\mathbb{N}$	Ar sammadur.
1	$\mathbb{N}$	Al liesadur.
nep elfenn	$\mathscr{P}(E)$	Ar c'henskejadur.
nep elfenn	$\mathscr{P}(E)$	Ar c'hembodadur.
$\emptyset$	$\mathscr{P}(E)$	An diforc'h.
$\emptyset$	$\mathscr{P}(E)$	An diforc'h kemparzhek.
Id_E	Ar c'hesaezhadurioù eus E war E	Ar c'hediadur.

136 ELFENN ANARGEMMAT, ARLOADUR ARUNIÑ (ARUNADUR)

• Un elfenn x eus un teskad zo un elfenn anargemmat dre un arloadur f eus E da E mar ha nemet mard eo $f(x) = x$.

~ E o vezañ un teskad poentoù, nep elfenn anargemmat dre un arloadur f eus E da E a vez graet poent daouel evit f anezhañ.

Skouer :

~ Bezet an arloadur f eus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ savelet dre $f(x) = x^2$. Anargemmat eo 1 dre f, rak $f(1) = 1$.

~ Kreiz ur c'hemparzh kreizel zo un poent daouel evit ar c'hemparzh-se.

• An arloadur aruniñ pe arunadur en un teskad E zo an arloadur eus E da E a gevred ouzh nep elfenn x eus E an elfenn x he unan. Notet e vez $\mathrm{Id_E}$ pe $\mathrm{I_E}$ pe c'hoazh 1_E . Da neuze, evit nep $x \in \mathrm{E}$, ez eus $\mathrm{I_E}(x) = x$.

Skouer : An treuzkludadur a sturiadell $\overrightarrow{0}$ zo an arloadur aruniñ er blaenenn.

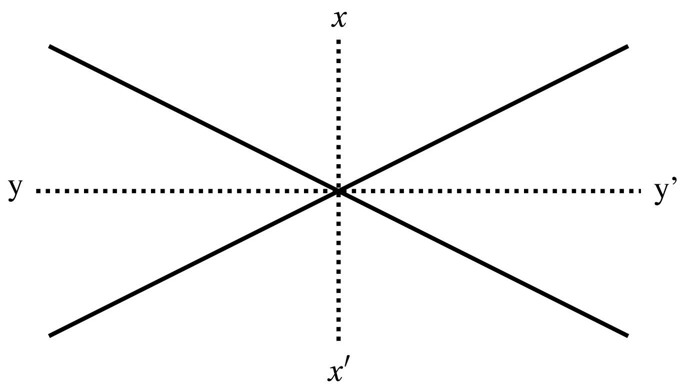
• Un teskad poentoù E eus ar blaenenn P zo anargemmat poent ha poent evit un arloadur f eus P e P mar ha nemet mard eo nep poent eus E daouel evit f.

• Un teskad poentoù E eus ar blaenenn P zo anargemmat a-vloc'h evit un arloadur f eus P e P mar ha nemet mar en deus nep poent M eus E da zelvad dre f ur poent M′ eus E, diforc'h diouzh M (gant nemedennoù diouzh ret).

Skouerioù :

~ Ahel ur c'hemparzh diaskouer zo un eeunenn anargemmat poent ha poent dre ar c'hemparzh-se.

~ Kembodadur div eeunenn zo anargemmat a-vloc'h dre ur c'hemparzh diaskouer dezhañ da ahel kreizkornenn unan eus ar gennadoù korn savelet gant an div eeunenn-se (xx' pe yy').



• Anvet e vez kreiz kemparzh un teskad poentoù E nep poent ω, hevelep ma'z eo E anargemmat dre ur c'hemparzh a greiz ω. Da skouer : kreiz ur c'helc'h zo e greiz kemparzh.

• Anvet e vez ahel kemparzh un teskad poentoù E nep eeunenn Δ, hevelep ma'z eo E anargemmat dre ur c'hemparzh diaskouer a ahel Δ.

Skouer : Un treuzkiz diforzh eus ur c'helc'h zo un ahel kemparzh evit ar c'helc'h.

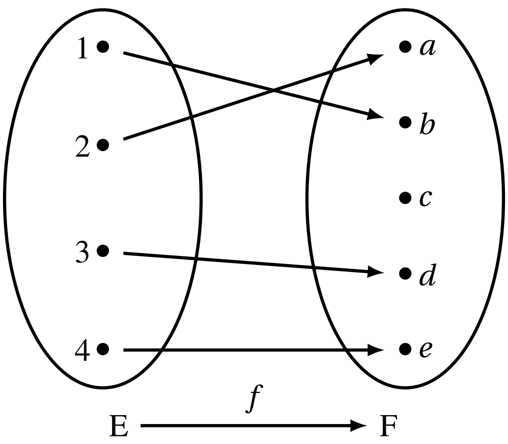
137 ENSAEZHADUR

• Un arloadur ensaezhañ (pe un arloadur ensaezhat, un ensaezhadur) eus an teskad E en teskad F zo un arloadur f eus E da F, hevelep ma'z eo nep elfenn eus F delvad dre f eus un elfenn eus E d'ar muiañ. E se, evit an elfennoù diforzh x ha y eus E :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E},\ (x \neq y) \Longrightarrow f(x) \neq f(y),$$

pezh zo kevatal da : $f(x) = f(y) \Longrightarrow (x = y)$.

Skouer :



$\forall y \in \mathrm{F}$, an atalad $f(x) = y$ en deus un diskoulm d'ar muiañ. Da skouer : $f(x) = c$, n'en deus diskoulm ebet.

• Ned eo ket ensaezhat f un arloadur eus E da F mar ha nemet mard eus eus elfennoù x ha y eus E, hevelep ma'z eo :

$$\exists x \in \mathrm{E},\ \exists y \in \mathrm{E},\ (x \neq y) \quad \text{ha } f(x) = f(y).$$

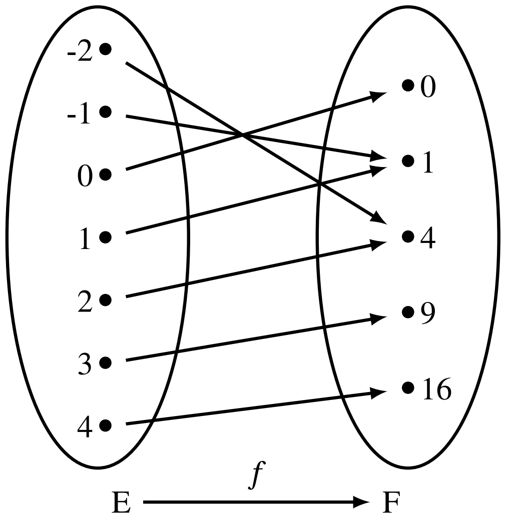
Skouer : Bezet f an arloadur eus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, hevelep ma'z eo $f(x) = x^2$. O vezañ ma'z eo $-2 \neq +2$ ha $f(-2) = f(+2)$, ned eo ket f un arloadur ensaezhat eus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

138 ARSAEZHADUR

• Un arloadur arsaezhañ (pe un arloadur arsaezhat, un arsaezhadur) eus un teskad E war un teskad F zo un arloadur f eus E da F, hevelep ma'z eo nep elfenn eus F delvad dre f eus un elfenn eus E da nebeutañ.

E gerioù all, un arsaezhadur f eus E war F zo un arloadur eus E da F, hevelep m'en deus an atalad $f(x) = z$ evit nep elfenn z eus F un diskoulm da nebeutañ en E. Pe c'hoazh : un arsaezhadur f eus E da F zo un arloadur f eus E da F, hevelep ma'z eo $f\langle E\rangle = F$.

Skouer : $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ha $F = \{0, 1, 4, 9, 16\}$.



Roet $f(x) = x^2$, neuze :

$f(-2) = 4,\ f(-1) = 1,$
$f(0) = 0,\ f(1) = 1,$
$f(2) = 4,\ f(3) = 9,\ f(4) = 16$

Alese $f\langle E\rangle = \{0, 1, 4, 9, 16\}$.

O vezañ ma'z eo $f\langle E\rangle = F$, f zo un arloadur arsaezhat eus E war F.

Lavaret e vez ez eo f un arloadur arsaezhat mard eus eus ur c'hentorad da nebeutañ evit nep elfenn eus F :

$$(\forall y \in F)\ (\exists x \in E)\ (f(x) = y)$$

• Ned eo ket arsaezhat f, un arloadur eus E da F mar ha nemet mard eus eus un elfenn z eus F, hevelep ma n'eus diskoulm ebet en E d'an atalad $f(x) = z$. Pe c'hoazh, un arloadur f eus E da F ned eo ket arsaezhat mar ha nemet mard eo $f\langle E\rangle \neq F$.

Skouer : Bezet $E = \{-1, 1, 0, 3\}$ ha $F = \{0, 1, 3, 4, 9\}$. Roet $f(x) = x^2$, o vezañ ma n'eus diskoulm ebet en E d'an atalad $f(x) = 3$, neuze ned eo ket f un arsaezhadur eus E war F.

Evezhiadenn : Kesaezhat eo nep arloadur f eus E da F mar ha nemet mard eo ensaezhat hag arsaezhat war un dro. Nep elfenn eus F zo dezhi ur c'hentorad hepken en E. Ur c'hesaezhadur eo f neuze.

139 KEMBEZ

• $\mathscr{R}$ zo un daveadur kembez gant un niñvadur diabarzh $*$ en un teskad E mar ha nemet mard eo $\mathscr{R}$ un daveadur daouadek en teskad E, hevelep ma'z eo, evit elfennoù x, y hag a diforzh eus E :

$$x \mathscr{R} y \Rightarrow (a*x) \mathscr{R} (a*y) \text{ pe } x \mathscr{R} y \Rightarrow (x*a) \mathscr{R} (y*a).$$

Skouer : An daveadur $\leqslant$ zo kembez gant ar sammadur en $\mathscr{R}$, rak $\leqslant$ zo un daveadur daouadek en $\mathscr{R}$, hevelep ma'z eo, evit elfennoù diforzh x, y, a eus $\mathbb{R}$, $\left(x \leqslant y\right) \Rightarrow \left(x+a \leqslant y+a\right)$.

• $\mathscr{R}$ zo un daveadur kembez gant un niñvadur diavaez en un teskad E notet $\perp$ ha dezhañ niñvaderioù en un teskad Ω mar ha nemet mard eo $\mathscr{R}$ un daveadur daouadek en teskad E, hevelep ma'z eo, evit elfennoù diforzh x ha y eus E ha nep elfenn a eus Ω :

$$\left(x \mathscr{R} y\right) \Longrightarrow (a \perp x) \mathscr{R} \left(a \perp y\right).$$

Skouer : An daveadur $\leqslant$ zo kembez gant al liesadur en $\mathbb{R}$ dre ur gwerc'hel muiel strizh, rak $\leqslant$ zo un daveadur daouadek en $\mathbb{R}$, hevelep ma'z eo evit elfennoù diforzh x ha y eus $\mathbb{R}$, evit nep niñvader a eus $\mathbb{R}^+$:

$$\left(x \leqslant y\right) \Longrightarrow \left(ax \leqslant ay\right).$$

140 KESAEZHADUR HA KENDELVADUR

• E zo un teskad dezhañ un niñvadur diabarzh notet $*$; F zo un teskad dezhañ un niñvadur diabarzh notet $\top$; f zo un arloadur eus E da F.

An arloadur f zo ur c'hendelvadur eus $(\mathrm{E}, *)$ war $(\mathrm{F}, \top)$ mar ha nemet mard eo f ur c'hesaezhadur eus E war F, hevelep ma'z eo, evit elfennoù diforzh x ha$y$ eus E, $f(x*y) = f(x) \top f(y)$. Lavaret e vez neuze ez eo kendelvek $(\mathrm{E}, *)$ ha $(\mathrm{F}, \top)$ pe ez eo $(\mathrm{E}, *)$ kendelvek gant $(\mathrm{F}, \top)$.

Skoueriοù :

~ Desellout a reomp teskad P mac'hadoù kevan 10. Bezet f ar c'hesaezhadur eus $\mathbb{Z}$ war P savelet dre : $f(x) = 10^x$. Evit elfennoù diforzh x ha y eus $\mathbb{Z}$ ez eus $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, rak $10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$.

Kendelvek eo neuze$(\mathbb{Z},+)$ ha $(\mathrm{P},\cdot)$ dre f.

~ Bezet φ ar c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}^+$ war $\mathbb{R}^+$ savelet dre : $\varphi(x)=\sqrt{x}$.
Evit elfennoù diforzh α ha β eus $\mathbb{R}^+$ ez eus $\varphi(\alpha\cdot\beta)=\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$, rak $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.
Kendelvek eo neuze $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ ha $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ dre φ.

~ Bezet $\mathcal{V}$ teskad sturiadelloù ar blaenenn ha $\mathcal{T}$ teskad treuzkludadurioù ar blaenenn. Bezet h ar c'hesaezhadur eus $\mathcal{V}$ war $\mathcal{T}$ savelet dre : $h\left(\overrightarrow{u}\right)=t_{\overrightarrow{u}}$. Evit elfennoù diforzh $\overrightarrow{u}$ ha $\overrightarrow{v}$ eus $\mathcal{V}$ ez eus $h\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=h\left(\overrightarrow{v}\right)\circ h\left(\overrightarrow{u}\right)$, rak $t_{\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}}=t_{\overrightarrow{v}}\circ t_{\overrightarrow{u}}$. Kendelvek eo neuze $(\mathcal{V},+)$ ha $(\mathcal{T},\circ)$ dre h.

141 ATROADUR

● Nep arloadur f eus E da E, hevelep ma'z eo $f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ a vez graet arloadur atroat en E anezhañ pe atroadur en E. E gerioù all ez eus un arloadur keveskemm da f, hevelep ma'z eo $f^{-1}=f$.

Skoueriòù :

~ $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}\,[\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}(x)]=x$, un atroadur eo neuze an arunadur en E.

~ An arloadur f eus $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$ savelet dre $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en deus da arloadur keveskemm f^{-1} savelet dre $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$. O vezañ ma'z eo $f^{-1}=f$, neuze ez eo $f$un atroadur en $\mathbb{R}^*$.

~ Ur c'hemparzh kreizel eus ar blaenenn er blaenenn hag ur c'hemparzh diaskouer eus ar blaenenn er blaenenn zo arloadurioù atroat er blaenenn.

142 ARGEMMOÙ KEVREIZHENN

● Feur argemmañ (pe feur kreskiñ) ur gevreizhenn niverel f d'an argemmenn werc'hel x, etre daou werc'hel anpar x_1 ha x_2 eus un entremez m'emañ savelet f, eo ar gwerc'hel : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Skouer : Bezet $f(x)=-3x+1,\ x_1\in\mathbb{R}$. Feur argemmañ f etre x_1 ha x_2 zo :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=-3$$

Evezhiadenn : -3 zo gwezhiader roud an eeunenn he atalad $f(x)$.

• Despizadur all : Feur argemmañ un gevreizhenn f savelet war un entremez $[a, b]$ eus $\mathbb{R}$ en ur poent x_0 eus an entremez $]a,b[$ eo ar gevreizhenn niverel T savelet evit nep h, hevelep ma'z eo :

$$x_0+h\in]a,b[,\ \mathrm{T}(h)=\frac{1}{h}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big).$$

• Bezet ur gevreizhenn f savelet war un entremez I. Lavaret e vez ez eo f kengresk (pe war gresk) war I mard eo evit x_1 ha x_2 anpar eus I :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant 0.$$

• Lavaret e vez ez eo f kengresk strizh (pe war gresk strizh) war I mard eo evit x_1 ha x_2 anpar eus I : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$. Un arloadur kengresk hag ensaezhat zo kengresk strizh hag a-geveskemm, an arloadurioù kengresk strizh zo an arloadurioù ensaezhat ha kengresk (p'emañ peururzhiet an teskad tarzh).

• Bezet ur gevreizhenn f savelet war un entremez I. Lavaret e vez ez eo f gingresk (pe war zigresk) war I mard eo, evit x_1 ha x_2 anpar eus I :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant 0.$$

• Lavaret e vez ez eo f gingresk strizh (pe war zigresk strizh) war I mard eo evit x_1 ha x_2 anpar eus I : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$.

Un arloadur gingresk hag ensaezhat zo gingresk strizh hag a-geveskemm, an arloadurioù gingresk strizh zo an arloadurioù ensaezhat ha gingresk (p'emañ peururzhiet an teskad tarzh).

• Un arloadur eus un teskad urzhiet E war-du un teskad urzhiet F a vez lavaret unton mard eo war gresk pe war zigresk. Anv a reer eus untonez ar gevreizhenn.

• Un arloadur eus un teskad urzhiet E war-du un teskad urzhiet F a vez lavaret unton strizh mard eo war gresk strizh pe war zigresk strizh.

143 MONOM

• An anv a gevreizhenn vonom d'un argemmenn werc'hel x, pe arloadur monom un argemmenn werc'hel x, a roer da nep kevreizhenn niverel f d'an argemmenn x, savelet evit nep gwerc'hel x dre $f(x) = x^n$ ma'z eo a ur werc'hel roet ha n ur c'hevan naturel roet.

• Monom un argemmenn x, pe monom x, a reer eus delvad ar gwerc'hel x dre ar gevreizhenn vonom f ha notet eo ax^n. Derez ar monom eo n, gwezhiader ar monom eo a.

Skouer : $5x^2$ zo ur monom x a wezhiader 5 hag a zerez 2.

• Daou vonom an un argemmenn x a un derez a reer monomoù heñvel anezho. Sammad daou vonom heñvel zo ur monom heñvel.

Skouer : $2x^5 + (-7x^5) = -5x^5$.

• En un doare hollek : Bezet $\mathbb{K}$ ur c'horf kantamsavat ; lavarout a reer ez eo f un arloadur : $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ ur gevreizhenn vonom da n argemmenn mard eus eus $a \in \mathbb{K}$ ha $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, hevelep ma'z eo, evit nep $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $f(x) = a\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{a_i}$.

144 POLINOM

• Ur gevreizhenn bolinom (pe un arloadur polinom) d'un argemmenn werc'hel x, a zerez n zo ur gevreizhenn niverel f d'an argemmenn werc'hel x, savelet evit nep x gwerc'hel dre :

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ ma'z eo $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ hag $a_n \neq 0$ gwerc'helion roet ha n ur c'hevan naturel roet.

• Ur polinom pe ur gevreizhenn bolinom d'un argemmenn x zo delvad ur gwerc'hel x dre ar gevreizhenn bolinom f, ha notet e vez :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0.$$

Pep monom $a_p x^p$ ma'z eo $p \in \mathbb{N}$ ha $p \leqslant n$ a anver termen ar polinom ; p a reer derez an termen $a_p x^p$ anezhañ ; x zo an argemmenn ; a_p a vez anvet gwezhiader an termen a zerez p. Derez ar polinom zo derez ar monom brasañ derez. E se, nep polinom eus ar rezh $ax + b$ ma'z eo a ha b gwerc'helion anvannel a reer binom anezhañ ha trinom eus nep polinom eus ar rezh $ax^2 + bx + c$, gant a, b ha c gwerc'helion anvannel.

• Urzhiet hervez ar mac'hoù war zigresk eo ar polinom a zo ennañ an termen a zerez $p+1$ diouzhtu dirak an termen a zerez p.

• Urzhiet hervez ar mac'hoù war gresk eo ar polinom a zo ennañ an termen a zerez $p+1$ diouzhtu war-lerc'h an termen a zerez p.

• Daou bolinom a zerez n zo par mard eo par holl wezhiaderioù o zermenoù kenderez. Da skouer :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0.$$

mar ha nemet mard eo en ur ser :

$$(a_n = b_n) \wedge (a_{n-1} = b_{n-1}) \wedge \cdots \wedge (a_1 = b_1) \wedge (a_0 = b_0).$$

145 LINENNEGEZH

• Ur gevreizhenn (pe un arloadur) linennek eus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ zo ur gevreizhenn bolinom f a zerez 1 d'an argemmenn x, hevelep ma'z eo $f(x) = ax$, a o vezañ ur gwerc'hel roet anvet gwezhiader ar gevreizhenn linennek f.

• Ur gevreizhenn linennek zo dezhi ar perzhioù-mañ da heul :

~ Evit nep daouac'h (x, x') eus $\mathbb{R}^2$, $f(x+x') = f(x) + f(x')$.

~ Evit nep daouac'h (λ, x) eus $\mathbb{R}^2$, $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

• Bezet ur gevreizhenn niverel f d'an argemmenn werc'hel x. Mard eo $n < x < n+1$ ha $n \in \mathbb{N}$ ha mar erlec'hier ouzh f ar gevreizhenn g savelet dre $g(x) = ax+b$, hevelep ma'z eo $g(n) = f(n)$ ha $g(n+1) = f(n+1)$, e saveler un arnesâd eus $f(x)$ dre :

$$\frac{f(x) - f(n)}{x - n} = a$$

An arnesâd-se eus $f(x)$ a anver etreletodad linennek. Ar gevreizhenn etreletodiñ (an etreletodadur) eo g ha $f(n+1) - f(n)$ eo ar forc'had taolenn.

• Kedaozañ (kedaoz g., kedaozadur) linennek div sturiadell a reer eus an niñvadur diabarzh o reiñ kedaozad linennek div sturiadell $\vec{u}$ ha $\vec{v}$, eleze $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ ma'z eo α ha β daou werc'hel. Da skouer : $2\vec{i} - 3\vec{j}$ zo kedaozad linennek ar sturiadelloù $\vec{i}$ ha $\vec{j}$.

<u>Ent hollekoc'h</u> : Bezet E un egor sturiadel war ur c'horf kantamsavat $\mathbb{K}$, $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ n sturiadell eus E ; lavarout a reer ez eo ar sturiadell $\vec{x}$ eus E kedaozad linennek eus ar sturiadelloù $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ mar ha nemet mard eus eus n elfenn eus $\mathbb{K}$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, hevelep ma'z eo :

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \cdots + \lambda_n\vec{a_n}.$$

Skrivañ a reer ivez : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i}$

Teskad ar sturiadelloù kedaozadoù linennek eus $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ zo un isegor sturiadel eus E ganet gant ar sturiadelloù $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$.

146 KEVREIZHENN GEOUENN

• Ur gevreizhenn geouenn eus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ zo ur gevreizhenn niverel f d'an argemmenn werc'hel x, hevelep ma'z eo $f(x) = ax+b$ ma'z eo a ha b gwerc'helion roet anvet gwezhiaderioù ar gevreizhenn geouenn f.

• Keouenn a entremezioù eo ur gevreizhenn f d'an argemmenn werc'hel x, hevelep ma'z eo :

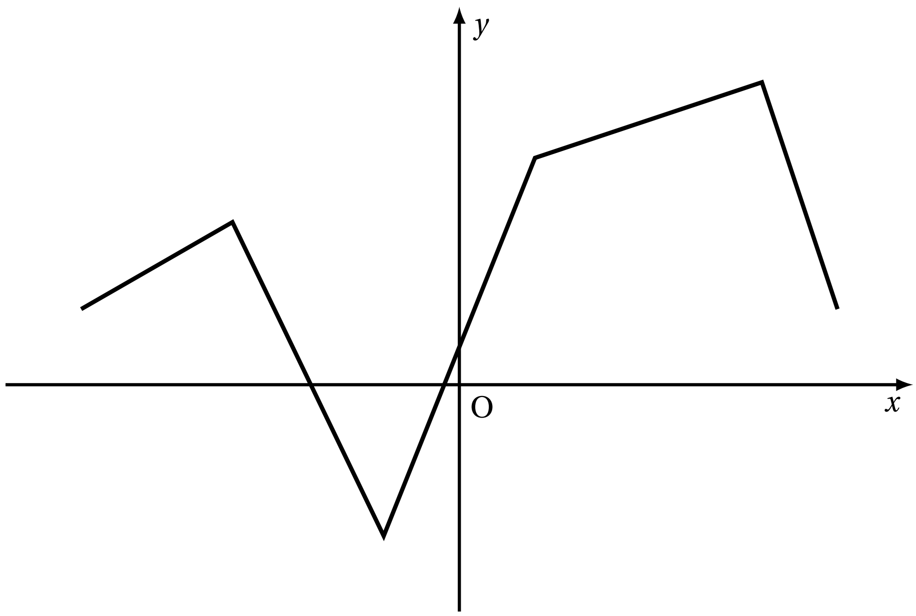
~ evit $x \leqslant a,\ f(x) = mx + p$,

~ evit $x \in [a, b],\ f(x) = nx + q$ ha $ma + p = na + q$,

~ evit $x \in [b,\ c],\ f(x) = rx + s$ ha $nb + q = rb + s$,

~ evit $x \geqslant c,\ f(x) = tx + u$ ha $rc + s = tc + u$.

Derc'hennadur kevregat ur gevreizhenn geouenn a entremezioù :



• Ent hollek : bezet E ha F daou egor keouenn kevredet ouzh (keouenn ouzh, keouenn e-keñver) an egorioù sturiadel $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ ha $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ war ar c'horf $\mathbb{K}$. Un arloadur $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ a lavarer keouenn mard eus eus un arloadur linennek $f\ :\ \overrightarrow{\mathrm{E}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{F}}$ (unel eo neuze), hevelep ma'z eo evit nep poent M eus E hag evit nep sturiadell $\overrightarrow{v}$ eus E, $u\big(\mathrm{M} + \overrightarrow{v}\big) = u(\mathrm{M}) + f(\overrightarrow{v})$. Da skouer : an arloadurioù keouenn eus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ eo an arloadurioù er rezh $x \longmapsto ax + b$. Linennek ez int mar ha nemet mard eo $b = 0$.

• Bezet $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ un egor sturiadel war ur c'horf $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ da skouer) ; mar niñv feleun ha trazeat $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ war un teskad E evit un dezv diavaez notet :

$$(\mathrm{M}, \overrightarrow{u}) \mapsto \mathrm{M} + \overrightarrow{u},$$

e lavarer ez eo E un egor keouenn kevredet ouzh an egor sturiadel $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

Evit nep daouac'h (M, N) a boentoù eus E ez eus ur sturiadell unel $\vec{u} \in \vec{\mathrm{E}}$, hevelep ma'z eo $\mathrm{N} = \mathrm{M} + \vec{u}$; ar sturiadell $\vec{u}$-se a noter c'hoazh $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$. Ur poent O eus E o vezañ festet, an arloadur $\mathrm{M} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ zo ur c'hesaezhadur eus E war $\vec{\mathrm{E}}$. Nep egor sturiadel $\vec{\mathrm{E}}$ a c'hell bezañ sellet evel un egor keouenn war $\vec{\mathrm{E}}$, o tesellout ar sammadur savelet war an egor sturiadel $\vec{\mathrm{E}}$ evel un dezv diavaez.

<u>Evezhiadenn</u> :

~ Graet e vez ment an egor keouenn E eus ment an egor sturiadel $\vec{\mathrm{E}}$ kevredet. Mard eo $\dim \vec{\mathrm{E}} = 1$ ez eo E un eeunenn geouenn ; mard eo $\dim \vec{\mathrm{E}} = 2$ ez eo E ur blaenenn geouenn.

~ An egor sturiadel $\vec{\mathrm{E}}$ a anver roud an egor keouenn E.

• Un eeunenn geouenn D zo un teskad E dezhañ ur familh $\mathscr{F}$ a gesaezhadurioù eus E war $\mathbb{R}$, hevelep m'hon eus : evit nep elfenn f eus $\mathscr{F}$ hag evit nep daouac'h (a, b) eus $\mathbb{R}^2$, an arloadur g savelet dre $g(\mathrm{M}) = af(\mathrm{M}) + b$ zo elfenn eus $\mathscr{F}$ ivez. A-geveskemm, mard eo f_1 ha f_2 elfennoù eus E ez eus eus un daouac'h (α, β) eus $\mathbb{R}^2$, hevelep ma'z eo $f_2(\mathrm{M}) = \alpha f_1(\mathrm{M}) + \beta$. An teskad E a anver skor an eeunenn geouenn D. Un elfenn M eus E a anver poent an eeunenn geouenn D.

• Un eeunenn euklidel D zo un teskad E dezhañ ur familh $\mathscr{F}$ a gesaezhadurioù eus E war $\mathbb{R}$, hevelep ma'z eo :

~ Evit nep elfenn f eus $\mathscr{F}$ hag evit nep arstalenn werc'hel b, an arloadurioù g ha h savelet dre $g(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}) + b$ ha $h(\mathrm{M}) = -f(\mathrm{M}) + b$ zo enbeziat ivez en $\mathscr{F}$.

A-geveskemm, mard eo f_1 ha f_2 elfennoù eus $\mathscr{F}$, neuze ez eus eus ur gwerc'hel α hevelep ma'z eo $f_2(\mathrm{M}) = f_1(\mathrm{M}) + \alpha$ pe a hent all ur gwerc'hel β hevelep ma'z eo :

$$f_2(\mathrm{M}) = -f_1(\mathrm{M}) + \beta.$$

An teskad E a vez anvet skor an eeunenn euklidel. Un elfenn M eus E a vez graet poent an eeunenn euklidel anezhi.

ATALADOÙ

147 ATALAD UN DIANAVENN

• Roet daou arloadur f ha g eus un teskad E etrezek un teskad F, an dezrevell $f(x) = g(x)$ a-zivout un elfenn bennak x eus E a vez anvet atalad un dianavenn x en E.

~ $f(x)$ zo kazel gentañ an atalad.

~ $g(x)$ zo eil kazel an atalad.

Nep elfenn x_0 eus E hevelep ma'z eo $f(x_0) = g(x_0)$ zo un diskoulm eus an atalad. Diskoulmañ an atalad eo savelañ teskad diskoulmoù an atalad, eleze teskad an elfennoù eus E o wiriañ an dezrevell amañ diaraok.

<u>Evezhiadenn</u> : En ur stroll $(G, *)$, an atalad $a * x = b$ zo dezhañ un diskoulm unel $x = b * a^{-1}$, a^{-1} o vezañ elfenn gemparzhek a.

• O vezañ div gevreizhenn niverel f ha g d'an argemmenn werc'hel x, o div savelet war ur parzh E eus $\mathbb{R}$, an dezrevell $f(x) = g(x)$ a-zivout nep elfenn x eus E a vez anvet atalad niverel un dianavenn x.

~ Savelva an atalad a reer eus E.

~ Kentañ kazel an atalad a reer eus $f(x)$.

~ Eil kazel an atalad a reer eus $g(x)$.

Nep elfenn x_0 eus E hevelep ma'z eo $f(x_0) = g(x_0)$ zo un diskoulm eus an atalad (lavarout a reer ivez : gwrizienn an atalad). Diskoulmañ un atalad niverel en un teskad niveroù anvet bondeskad (teskad dave) eo savelañ parzh ar bondeskad a ampar teskad diskoulmoù an atalad.

• Daou atalad zo kevatal mar o deus an un savelva hag an un teskad diskoulmoù en un bondeskad E. Evit dezgeriañ ez eo kevatal an ataladoù $f(x) = g(x)$ ha $F(x) = G(x)$ e noter evit nep elfenn x eus E :

$$\big(f(x) = g(x) \Longleftrightarrow F(x) = G(x)\big).$$

Skouer : E $\mathbb{Z}$, $(x^2+4)(x-1)$ ha $x-1=0$ zo kevatal, rak o savelva zo $\mathbb{Z}$ ha teskad o diskoulmoù zo $\{1\}$.

• Mard eo teskad diskoulmoù un atalad an teskad goullo e lavarer a-wechoù ez eo dic'hallus an atalad.

Skouer : $x^2+5=0$ n'en deus diskoulm ebet en $\mathbb{R}$.

• Mard eo teskad diskoulmoù un atalad ar bondeskad e unan e lavarer a-wechoù ez eo andidermenet an atalad.

Skouer : $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ zo $\mathbb{R}$ e deskad diskoulmoù.

148 ATALAD NIVEREL KENTAÑ DEREZ UN DIANAVENN

• Un atalad kentañ derez un dianavenn x zo un atalad niverel a c'haller diren d'ar rezh $ax+b=0$ ma'z eo a ha b niveroù roet anvet gwezhiaderioù an atalad.

• An holl zespizadurioù a-zivout an ataladoù niverel un dianavenn a c'hell bezañ dedalvezet d'an ataladoù niverel kentañ derez un dianavenn.

• Diskoulmañ en $\mathbb{R}$ un atalad niverel kentañ derez un dianavenn $ax+b=0$:

~ Evit nep a ha nep b eus $\mathbb{R}$ $(ax+b=0) \Longleftrightarrow (ax=-b)$.

~ Evit nep a anvannel $(ax+b=0) \Longleftrightarrow \left(x=-\dfrac{b}{a}\right)$.

~ Evit a mannel ha b anvannel $(ax+b=0) \Longleftrightarrow (0x=-b)$. An dezrevell $(0x=-b)$zo bepred faos en $\mathbb{R}$ en degouezh-mañ.

~ Evit a mannel ha b mannel $(ax+b=0) \Longleftrightarrow (0x=0)$. An dezrevell $(0x=0)$ zo bepred gwir en $\mathbb{R}$ en degouezh-mañ.

Krennomp en un daolenn :

a ha b zo gwerc'helion hevelep ma'z eo	$ax+b=0$ zo dezhañ an teskad diskoulmoù D en $\mathbb{R}$
$a \neq 0$	$\mathrm{D}=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
$a=0$ ha $b \neq 0$	$\mathrm{D}=\emptyset$
$a=0$ ha $b=0$	$\mathrm{D}=\mathbb{R}$

149 DIATALADOÙ NIVEREL

• Roet div gevreizhenn f ha g d'an argemmenn werc'hel x, o div savelet war ur parzh eus $\mathbb{R}$, an dezrevell $f(x) < g(x)$ (pe an dezrevell $f(x) > g(x)$) a-zivout nep elfenn x eus E a vez anvet diatalad niverel un dianavenn x.

~ Savelva an diatalad a reer eus E.

~ Kentañ kazel an diatalad a reer eus $f(x)$.

~ Eil kazel an diatalad a reer eus $g(x)$.

Nep elfenn x_0 eus E hevelep ma'z eo : $f(x_0) < g(x_0)$ zo un diskoulm eus an diatalad : $f(x) < g(x)$. Nep elfenn x_0 eus E hevelep ma'z eo $f(x_0) > g(x_0)$ zo un diskoulm eus an diatalad $f(x) > g(x)$. Diskoulmañ un diatalad niverel en un teskad niveroù anvet bondeskad (teskad dave) eo savelañ parzh ar bondeskad a ampar teskad diskoulmoù an diatalad, eleze teskad an elfennoù eus E o wiriañ an dezrevell amañ diaraok.

• Kevatal eo daou ziatalad mar o deus an un savelva hag an un teskad diskoulmoù en un bondeskad E. Evit dezgeriañ ez eo kevatal an diataladoù $f(x) < g(x)$ ha $\mathrm{F}(x) > \mathrm{G}(x)$ e noter evit nep elfenn x eus E :

$$\big(f(x) < g(x)\big) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{F}(x) > \mathrm{G}(x)\big).$$

<u>Skouer</u> : E $\mathbb{Z}$ $-5(x^2+1)(x+1) < 0$ ha $x+1 > 0$ zo kevatal, rak o savelva zo $\mathbb{Z}$ hag o zeskad diskoulmoù zo $]-1,+\infty[$.

• Mard eo teskad diskoulmoù un diatalad an teskad goullo e lavarer a-wechoù ez eo dic'hallus an diatalad.

<u>Skouer</u> : $x^2 + 5 < 0$ n'en deus diskoulm ebet en $\mathbb{R}$.

• Mard eo teskad diskoulmoù un diatalad ar bondeskad e unan e lavarer a-wechoù ez eo andidermenet an atalad.

<u>Skouer</u> : $4x^4 + 6x^2 + 9 > 0$ zo $\mathbb{R}$ e deskad diskoulmoù.

• Kenglenadur lies diatalad a vez anvet diataladoù diaser pe reizhiad diataladoù.

<u>Skouer</u> : $x - 1 < 0$ ha $x + 1 > 0$ zo ur reizhiad diataladoù, dezhañ an entremez $]-1, +1[$ da deskad diskoulmoù en $\mathbb{R}$.

150 DIATALADOÙ NIVEREL KENTAÑ DEREZ UN DIANAVENN

• Un diatalad kentañ derez un dianavenn x zo un diatalad niverel a c'haller diren d'unan eus ar rezhoù $ax + b < 0$ pe $ax + b > 0$ ma'z eo a ha b niveroù roet anvet gwezhiaderioù an diatalad.

• An holl zespizaduriòù a-zivout an diataladoù niverel un dianavenn a c'hell bezañ dedalvezet d'an diataladoù niverel kentañ derez un dianavenn.

• Diskoulmañ en $\mathbb{R}$ un diatalad niverel kentañ derez un dianavenn

$$ax + b > 0 :$$

~ Evit nep a ha nep b eus $\mathbb{R}$ $(ax + b > 0) \Longleftrightarrow (ax > -b)$

~ Evit nep a muiel anvannel $(ax + b > 0) \Longleftrightarrow \left(x > -\dfrac{b}{a}\right)$

~ Evit nep a leiel anvannel $(ax + b > 0) \Longleftrightarrow \left(x < -\dfrac{b}{a}\right)$

~ Evit a mannel ha nep b leiel pe anvannel $(ax + b > 0) \Longleftrightarrow (0x > -b)$. An dezrevell $(0x > -b)$ zo bepred faos en $\mathbb{R}$ en degouezh-mañ.

~ Evit a mannel ha nep b muiel anvannel $(ax + b > 0) \Longleftrightarrow (0x > -b)$. An dezrevell $(0x > -b)$ zo bepred gwir en $\mathbb{R}$ en degouezh-mañ.

Krennomp en un daolenn :

a ha b zo gwerc'helion hevelep ma'z eo	$ax+b>0$ zo dezhañ an teskad diskoulmoù D en $\mathbb{R}$
$a>0$	$\mathrm{D}=\left]-\dfrac{b}{a},+\infty\right[$
$a<0$	$\mathrm{D}=\left]-\infty,-\dfrac{b}{a}\right[$
$a=0$ ha $b\leqslant 0$	$\mathrm{D}=\varnothing$
$a=0$ ha $b>0$	$\mathrm{D}=\mathbb{R}$

151 TAOLENN AROUEZIOÙ

• Lavarout a reer en deus ur gwerc'hel muiel strizh an arouez $+$.

• Lavarout a reer en deus ur gwerc'hel leiel strizh an arouez $-$.

• Daou niver muiel strizh pe leiel strizh a vez lavaret kenarouez. Un niver muiel strizh hag un niver leiel strizh a vez lavaret gourzharouez.

• Muiel eo liesâd pe rannad daou niver kenarouez. Leiel eo liesâd pe rannad daou niver gourzharouez. An daou erganad diwezhañ-mañ a anavezer dindan an anvad *reolenn an arouezioù*.

• Ur gevreizhenn f eus $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}$ o vezañ roet, evit studiañ arouez $f(x)$ a-geñver gant gwerzhioù ar gwerc'hel x e laz digenaozañ $f(x)$ e rezh ul liesâd pe ur rannad polinomoù kentañ derez en x. Da heul e studier arouez pep polinom kentañ derez hag un daolenn a saver gant an arouezioù. Diwar se e tezreer arouez $f(x)$ war an daolenn dre zedalvezout reolenn an arouezioù.

<u>Skoueriοù</u> :

~ $f(x)=(1-x)(3+x)$. Setu amañ dindan taolenn arouezioù $f(x)$:

x		-3		1	
$1-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
$3+x$	$-$	0	$+$	|	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

~ $g(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$. Setu amañ dindan taolenn arouezioù

x		-5		2	
$x+5$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	||	$+$

Merzhout ned eo ket savelet g evit $x=2$, alese an div varrenn.

152 TAOLENN ARGEMMOÙ UR GEVREIZHENN NIVEREL D'UN ARGEMMENN WERC'HEL

• Un daolenn argemmoù zo un daolenn ma erouezer argemmoù ur gevreizhenn niverel f d'an argemmenn werc'hel x, goude bezañ studiet arouez feur kreskiñ f (pe arouez he diarroudenn), a-zalc'h ouzh gwerzhadoù x eus he savelva. Diskouezet e vez ez eo ur gevreizhenn war gresk war un entremez gant ar bir $\nearrow$ ha war zigresk war un entremez gant ar bir $\searrow$.

<u>Skouerioù</u> :

~ Bezet f savelet dre $f(x)=5x$ war $]-\infty,+\infty[$. Evit daou werc'hel diforzh anpar x_1 ha x_2 ez eo ar feur argemmañ :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=5,$$

eleze muiel ha kengresk eo ar gevreizhenn war $]-\infty,+\infty[$ (an diarroudenn $f'(x)=5$ zo muiel ivez). Setu taolenn argemmoù f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ pe $f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

~ Bezet h savelet dre $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ war $]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$.

Evit daou werc'hel diforzh anpar x_1 ha x_2 eus ar savelva ez eo ar feur argemmañ :

$$\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_1^2}}{x_2-x_1}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_2^2x_1^2(x_2-x_1)}=\frac{(x_1-x_2)(x_2+x_1)}{x_2^2x_1^2(x_2-x_1)}=-\frac{x_2+x_1}{x_2^2x_1^2}$$

Taolenn argemmoù h a zezreer (An diarroudenn $h'(x)=-2x^{-3}$ a rofe an hevelep disoc'h) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}$ pe $h'(x)$	+	‖	−
$h(x)$	0 ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

153 ATALAD DIV ZIANAVENN

• Delvad un daouac'h (x, y) dre un arloadur f eus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ a noter $f(x, y)$, a lenner [εf iks je].

• O vezañ daou arloadur f ha g $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, an dezrevell $f(x, y) = g(x, y)$ a-zivout un daouac'h diforzh (x, y) eus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a vez anvet atalad niverel div zianavenn x ha y. $f(x, y)$ a vez anvet kentañ kazel an atalad ha $g(x, y)$ a vez anvet eil kazel an atalad. Nep daouac'h (x_0, y_0) eus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, hevelep ma'z eo $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$, o wiriañ an dezrevell usveneget, a vez graet daouac'h diskoulm pe diskoulm an atalad anezhi.

• Daou atalad div zianavenn zo kevatal en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mmar o deus an un teskad diskoulmoù en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

<u>Skouer</u> : $2x+2y=6$ ha $x+y=3$ zo daou atalad kevatal en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

154 REIZHIAD ATALADOÙ, REIZHIAD DIATALADOÙ

• f, g, f', g' o vezañ peder c'hevreizhenn eus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, ar c'henglenadur $f(x, y) = g(x, y)$ ha $f'(x, y) = g'(x, y)$ a-zivout un daouac'h diforzh (x, y) eus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a vez anvet reizhiad daou atalad niverel div zianavenn x ha y. Notañ a reer ar reizhiad-se :

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y) \\ f'(x, y) = g'(x, y) \end{cases}$$

• f, g, f', g' o vezañ peder c'hevreizhenn eus $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, ar c'henglenadur $f(x) < g(x)$ ha $f'(x) < g'(x)$ a-zivout un elfenn diforzh x eus $\mathbb{R}$ a vez anvet reizhiad daou ziatalad niverel un dianavenn x. Notañ a reer ar reizhiad-se :

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f'(x) < g'(x) \end{cases}$$

• f, g, f', g' o vezañ peder c'hevreizhenn eus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, ar c'henglenadur $f(x,y) < g(x,y)$ ha $f'(x,y) < g'(x,y)$ a-zivout un daouac'h diforzh (x,y) eus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a vez anvet reizhiad daou ziatalad niverel div zianavenn x ha y. Notañ a reer ar reizhiad-se :

$$\begin{cases} f(x,y) < g(x,y) \\ f'(x,y) < g'(x,y) \end{cases}$$

155 ATALAD KENTAÑ DEREZ DIV ZIANAVENN

• Diren a reer un atalad kentañ derez div zianavenn d'ar rezh $ax+by+c=0$ ma'z eo a, b, c niveroù gwerc'hel roet anvet gwezhiaderioù an atalad.

Skouer : $-2x = y+3$ a zireer d'ar rezh $2x+y+3=0$ zo un atalad kentañ derez div zianavenn.

• Ur reizhiad daou atalad kentañ derez div zianavenn x ha y a zireer d'ar rezh :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

ma'z eo $a, b,\ c,,\ b',\ c'$ gwerc'helion roet anvet gwezhiaderioù an ataladoù.

Skouer : $\begin{cases} 2x+5y+c=17 \\ ax-y=-2 \end{cases}$

156 DIDERMENANT

• Un didermenant zo ur rezi karrezek notet $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, ma'z eo $a, b,\ c,\ d$ pevar gwerc'hel.

Skrivañ a reer $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Skouer : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4-2\times3=-2$

• Didermenant ur reizhiad daou atalad kentañ derez div zianavenn :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \quad \text{gant } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

• Didermenant an daouac'h sturiadelloù :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \text{ ha } \vec{v}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} \text{ gant } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}. \text{ Notañ a reer : } \det(\vec{u}, \vec{v})$$

157 ATALAD EIL DEREZ

• An atalad $ax^2+bx+c=0$ ma'z eo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ hag $a \neq 0$ a reer atalad eil derez anezhañ.

Ar gwerc'hel $\Delta = b^2 - 4ac$ a anver disparzhant.

1. Mard eo $\Delta \geqslant 0$, an atalad zo dezhañ div wrizienn werc'hel anpar :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ha} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Mard eo $\Delta < 0$, n'eus gwrizienn werc'hel ebet d'an atalad. En degouezh ma'z eo $\Delta < 0$ en deus an atalad div wrizienn derc'hel :

$$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ha} \quad x_2 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

(Mard eo a, b, c kemplezhion en deus an atalad bepred div wrizienn gemplezh).

STURIADELLOÙ, MENTONIEZH DEZRANNEL

158 AKSIOMENNOÙ AN EEUNENN HAG AR BLAENENN

E-maez a bep kendestenn n'en deus ar ger "eeunenn" ster jedoniel resis ebet, evel "poent" pe "plaenenn" a du 'rall. Er c'hlasoù elfennel (kentañ derez) e vez degaset ar Ventoniezh dre studi teskadoù poentoù, anvet eeunennoù, plaenennoù, egor. An aksiomennoù darbennet evit an teskadoù-se a ampar un delvan jedoniel a zo treuztaol perzhioù alvezel 'zo. Diwar an damkaniezh savet en doare-se e tigejer an ergorenn jedoniel sturiadell ha da heul e tespizer an egor sturiadel hag e luniadur. Dezren ha dezrann perzhioù an egorioù sturiadel a gevaraez, dre un astreiñ war an teskadoù orin, o studiañ donoc'h. Anat e teu da vezañ neuze ez eo pinvidikoc'h ar c'heal a egor sturiadel eget pezh a veze rakweladus gant e orin mentoniel ha kalz pelloc'h ez a amgant e zedalvezadurioù eget studi an egor alvezel "boutin". Diwar luniadur an egor sturiadel e tespizer hini an egor keouenn ouzh an egor sturiadel a reer poentoù eus e elfennoù. Da neuze, an teskadoù poentoù eus ar ventoniezh voutin zo egorioù keouenn dibarek. En ul lankad kentañ e loc'himp diwar an aksiomennoù oc'h eren an termenoù kentañ "poent", "eeunenn", "plaenenn", ha divrazet e vo en un eil lankad ar c'herzhed hollekoc'h ha frouezhusoc'h o vont eus an egor sturiadel davet an egorioù keouenn, kartezel, mentel.

• Ar blaenenn zo un teskad notet P a zo e elfennoù poentoù ; un eeunenn eus ar blaenenn zo un isteskad eus ar blaenenn-se.

• Un eeunenn zo un teskad poentoù, hevelep ma ne dremen nemet un eeunenn dre zaou boent. Lavaret e vez e savel daou boent A ha B un eeunenn notet (AB). A ha B zo a-eeun pe areeun.

• Evit nep eeunenn Δ eus ar blaenenn P ez eus ur familh F_Δ a arloadurioù kesaezhat eus Δ war $\mathbb{R}$ dezhi ar perzh-mañ : Evit nep dealf (O, E) eus Δ ez eus un arloadur eus ar familh F_Δ, hag unan hepken, notet f_O^E, hevelep ma'z eo $f_O^E(O) = 0$ ha $f_O^E(E) = 1$. Dereziadur a reer eus f_O^E.

1) f_O^E zo ur c'hesaezhadur eus Δ war $\mathbb{R}$. Neuze, an eeunenn Δ a endalc'h un anvevennad poentoù.

2) An arloadur φ o lakaat da glotañ nep dealf (O, E) ouzh an arloadur f_O^E zo ur c'hesaezhadur eus teskad dealfoù Δ war F_Δ.

• Bez' ez eus dereziadurioù un eeunenn Δ, hevelep ma'z eo rannad muzulioù aljebrel daou zaouboent dizalc'h diouzh an dereziadurioù-se. Un eeunenn dezhi seurt dereziadurioù a vez anvet eeunenn geouenn.

• Bez' ez eus dereziadurioù un eeunenn Δ, hevelep ma'z eo ar pellder etre daou boent diforzh eus Δ dizalc'h diouzh an dereziadurioù-se. Un eeunenn dezhi seurt dereziadurioù a vez anvet eeunenn euklidel.

• Ur blaenenn P zo un teskad poentoù, hevelep (e-touez traoù all) :

~ ma'z eus un eeunenn D o tremen dre zaou boent A ha B eus P,

~ ma'z eus ur poent M eus P da nebeutañ ezveziat e D,

~ ma'z eus un eeunenn D' hepken, endalc'het e P, o tremen dre M hag anarun gant D.

Lavarout a c'haller : ur blaenenn zo un teskad poentoù, hevelep ma ne dremen nemet ur blaenenn dre tri foent n'int ket a-eeun. Da neuze, tri foent anareeun a savel ur blaenenn. Notañ a reer (ABC) ar blaenenn savelet gant tri foent A, B, C anareeun.

• E se, ur blaenenn P zo un teskad a elfennoù anvet poentoù ha gwiriañ a ra P an div aksiomenn dehaez da heul :

1) Bez' ez eus ur familh eeunennoù angoullo, isteskadoù (parzhioù) eus P, ha poentoù P n'emaint ket holl war un eeunenn hepken.

2) Evit daou boent roet eus P ez eus un eeunenn hag unan hepken enni an daou boent-se.

Gwiriañ a ra P ivez aksiomenn Euklides.

• Diwar ar c'healioù a blaenenn hag a eeunenn geouenn e vo despizet ar blaenenn geouenn : bez' ez eo nep plaenenn a zo he eeunennoù eeunennoù keouenn hag o wiriañ aksiomenn Tales. Graet e vez mentoniezh keouenn plaen eus studi perzhioù ar blaenenn geouenn.

• Diwar ar c'healioù a serzhder hag a eeunenn euklidel e vo despizet ar blaenenn euklidel.

Graet e vez plaenenn euklidel eus ur blaenenn geouenn, hevelep ma'z eo :

~ savelet e teskad roudoù P an daveadur "kenserzh da", pep eeunenn eus P o vezañ un eeunenn euklidel,

~ evit daou ahel diforzh a hag a' eus P, ar c'heñverioù serzhvannañ $c(a, a')$ ha $c(a', a)$ zo par.

159 DEALF AN EEUNENN

• Graet e vez dealf un eeunenn D eus nep daouboent kewer (A, B), hevelep ma'z eo ar poentoù A ha B enbeziat e D.

• Dereziadur g un eeunenn D o vezañ roet e vez anvet dealf an dereziadur g pe dealf an eeunenn D kevredet ouzh an dereziadur g an daouac'h poentoù (O, I), hevelep ma'z eo : $g(\mathrm{O}) = 0$ ha $g(I) = 1$.

~ O a vez graet orin an dealf anezhañ pe poent mann pe alf. An daouac'h (D, O) a reer eeunenn alfet anezhi.

~ I a anver poent unan.

~ $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ a anver sturiadell unanenn.

• $\overrightarrow{i}$ o vezañ ur sturiadell unanenn anvannel eus teskad $\mathcal{V}$ sturiadelloù un eeunenn D, O o vezañ ur poent fest eus D e vez graet dealf kartezel an eeunenn D eus an daouac'h $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}\right)$. Sturiadell diazez (pe diazez) a reer eus $\overrightarrow{i}$ hag orin an dealf eus O.

• Ahel a reer eus nep eeunenn dezhi un dealf. Skor an ahel eo an eeunenn. Orin an ahel a reer neuze eus orin an dealf. E-lec'h ahel e lavarer ivez eeunenn durc'haet.

• Dealf reolel un eeunenn euklidel D a vez graet eus nep dealf (O, I) eus D, hevelep ma'z eo : $\mathrm{d}(\mathrm{O}, \mathrm{I}) = 1$.

• Dealf reolel un eeunenn euklidel D a vez graet eus nep dealf $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}\right)$ eus D, hevelep ma'z eo $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1$.

• Un dealf eus un eeunenn D o vezañ roet, ur c'hemmañ dealf a'n eeunenn D a reer mar kemerer :

~ pe un dealf nevez eus D dezhañ un orin anarun gant orin an dealf kentañ (kemmañ orin).

~ pe un dealf nevez eus D dezhañ ur poent unan anarun gant poent unan an dealf kentañ (kemmañ poent unan, kemmañ unanenn, kemmañ sturiadell unanenn, kemmañ dereziadur).

~ pe an daou war un dro.

Evezhiadenn : Arselliñ a c'haller an div aksiomenn-mañ da heul :

1) Evit nep eeunenn Δ eus ar blaenenn P ez eus ur familh F_Δ a arloadurioù kesaezhat eus Δ war $\mathbb{R}$ dezhi ar perzh-mañ : evit nep dealf (O, E) eus Δ ez eus un arloadur eus ar familh F_Δ, hag unan hepken, notet f_O^E, hevelep ma'z eo $f_O^E(O) = 0$ ha $f_O^E(E) = 1$.

a) f_O^E zo ur c'hesaezhadur eus Δ war $\mathbb{R}$. Neuze, an eeunenn Δ a endalc'h un anvevennad poentoù.

b) An arloadur φ o lakaat da glotañ nep dealf (O, E) ouzh an arloadur f_O^E zo ur c'hesaezhadur eus teskad dealfoù Δ war F_Δ.

c) Ledenn ur poent M eus an eeunenn Δ en dealf (O, E) a vez graet eus $f_O^E(M)$. Lavarout a reer e taveer Δ d'an dealf (O, E) pe ez eo daveet Δ d'an dealf (O, E).

2) (O, E) ha (O', E') o vezañ daou zealf eus un eeunenn Δ ez eus daou werc'hel α ha β, hevelep ma'z eo gwiriet an daveadur $x' = \alpha x + \beta$, x o vezañ ledenn nep poent M en dealf (O, E) ha x' e ledenn en dealf (O', E').

~ An div aksiomenn diwezhañ amañ a-us a bourvez nep eeunenn Δ eus ar blaenenn gant ul luniadur anvet luniadur keouenn an eeunenn Δ. β zo ledenn O en dealf (O', E') hag unel eo. α zo muzul aljebrel an daouboent (O, E) en dealf (O', E') hag unel eo ivez.

~ An daveadur $x' = \alpha x + \beta$ a savel ledenn x' ar poent M en dealf (O', E') evel kevreizhenn geouenn da ledenn x ar poent M en dealf (O, E). Bez' ez eo an *daveadur kemmañ dealf*.

160 KENSTURDER

• Div eeunenn genstur a'r blaenenn zo div eeunenn disparti pe arun. Notañ a reer : $d \parallel d'$. Evit an holl eeunennoù d ha d' a'r blaenenn :

$$(d \parallel d') \Longleftrightarrow (d \cap d' = \varnothing \text{ pe } d = d').$$

• Div blaenenn genstur zo div blaenenn disparti pe arun. Notañ a reer $(\mathrm{P}) /\!\!/ (\mathrm{P}')$. Evit an holl blaenennoù (P) ha (P′) a'n egor :

$$\big((\mathrm{P}) /\!\!/ (\mathrm{P}')\big) \Longleftrightarrow \big((\mathrm{P}) \cap (\mathrm{P}') = \emptyset \text{ pe } (\mathrm{P}) = (\mathrm{P}')\big)$$

Aksiomenn Euklides :

Un eeunenn d diforzh hag ur poent A ezveziat e d o vezañ roet en ur blaenenn (P) ez eus un eeunenn d' eus (P) hag unan hepken o tremen dre A ha hep kenboent gant d.

• E teskad an eeunennoù eus ar blaenenn ez eo ar c'hensturder un daveadur kevatalder, roud un eeunenn d eus (P) o vezañ dere kevatalder an eeunenn d eus (P) evit an daveadur kensturder.

• Div eeunenn genstur zo div eeunenn elfennoù eus an un dere kevatalder, eleze eus an un roud. E se ez eo kenroud an div eeunenn.

• Lavarout emañ kenstur strizh div eeunenn a'r blaenenn zo kement ha lavarout ez int disparti.

• Lavarout emañ div eeunenn a'r blaenenn kenstur ledan (pe kenstur, hep adanv doareañ) zo kement ha lavarout ez int disparti pe arun. E se ez eo nep eeunenn kenstur dezhi he unan.

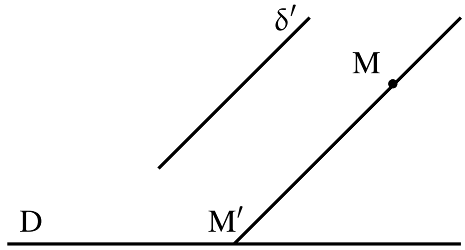
• Evit dezgeriañ o deus daou ahel skoroù kenstur e lavarer ez int kenroud.

Sed despizadur un ahel eus un egor keouenn gwerc'hel :

Triac'h $(\mathrm{O}, \mathrm{D}, \overrightarrow{\mathrm{V}})$ ma'z eo D un eeunenn geouenn, O ur poent eus D ha $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ ur sturiadell roud eus D. An arloadur eus D war $\mathbb{R}$, o kevrediñ M ouzh ar gwerc'hel x hevelep ma'z eo $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{\mathrm{V}}$, zo ur c'hesaezhadur. Ar gwerc'hel x a vez graet anezhi ledenn M war an ahel.

161 BANNADUR POENTEL HAG AKSIOMENN AR BANNADOÙ

• Ar bannadur poentel diouzh ar roud δ' war un eeunenn D ezveziat e δ', pe ar bannadur poentel kenstur da D' a roud δ' war an eeunenn D zo an arloadur arsaezhat p eus ar blaenenn P war D notet $M' = p(M)$, ma'z eo M' elfenn genskej D gant an eeunenn a roud δ' o tremen dre M. Delvad ur poent M dre ur bannadur poentel war un eeunenn D a anver bannad ar poent M war D. An eeunenn o tremen dre ar c'hentorad M hag e zelvad M' dre ar bannadur poentel a anver bannerenn ar poent M. An doareenn "poentel" a lamer, pa na vez forc'hellegezh ebet.



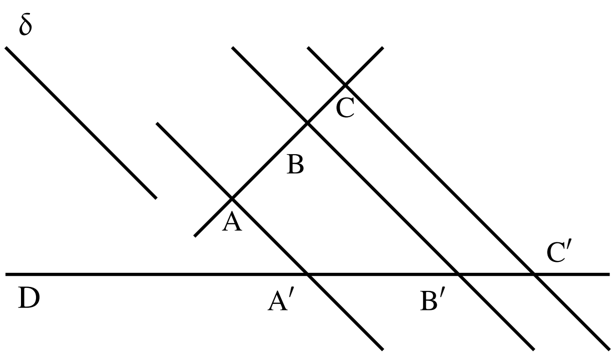
• Teskad ar poentoù M a'r blaenenn P anargemmat dre ar bannadur poentel war un eeunenn D diouzh ur roud δ' zo an eeunenn D.

~ Gwelet hon eus er ¶ 159 penaos e saveler ul luniadur keouenn evit nep eeunenn D eus P. An aksiomenn-mañ da heul, o reiñ tu da gevrediñ luniadurioù eeunennoù ar blaenenn P, a savel ul luniadur anvet luniadur keouenn ar blaenenn P.

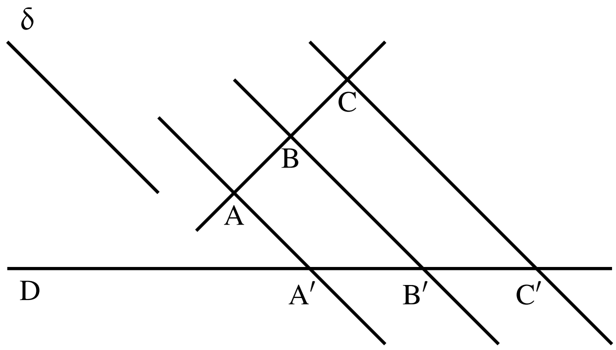
• *Aksiomenn ar bannadoù* :

A, B, C o vezañ tri foent eus ar blaenenn P hag o delvadoù ketep dre ar bannadur poentel diouzh ur roud δ war un eeunenn D o vezañ A', B', C', e c'haller skrivañ an emplegadurioù-mañ da heul :

a) B etre A ha C $\Rightarrow$ B' etre A' ha C'

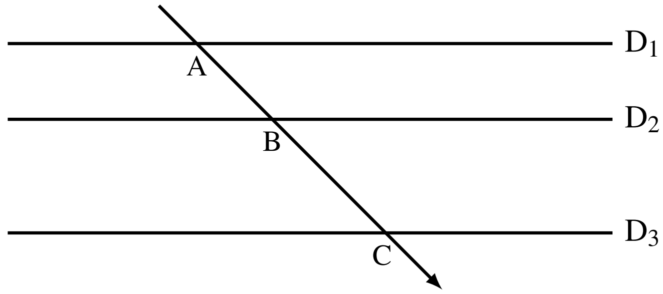


b) B kreiz $(A, C) \Rightarrow B'$ kreiz (A', C')



162 DELAKADENN TALES

• En ur blaenenn, mard emañ un ahel a-skej war deir eeunenn genstur D_1, D_2 ha D_3 en A, B ha C ez eo ar c'heñver $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ dizalc'h diouzh an ahel dibabet.

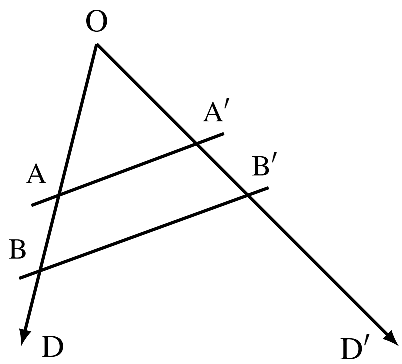


Doareoù all da zezrevellañ an delakadenn zo, da skouer : kenfeuriek eo muzulioù aljebrel ar regennoù eeun savelet gant div eeunenn genstur D ha D' war div skejenn :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$

pe

$$\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA} \text{ hag } \overrightarrow{OB'} = \alpha\overrightarrow{OA'}$$



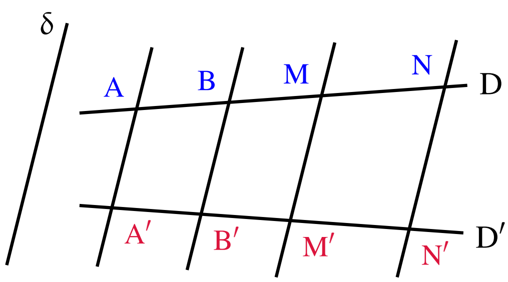
Evezhiadenn :

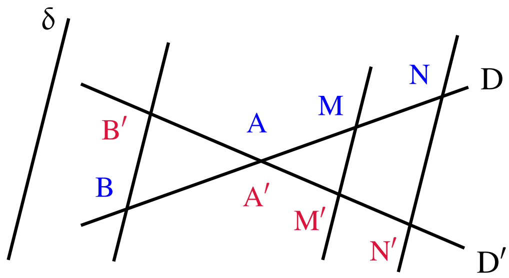
Eus aksiomenn ar bannadoù e c'haller dezren delakadenn Tales.

A-geveskemm, mar darbenner delakadenn Tales — evel a reer alies en deskadurezh eil derez — da aksiomenn e c'haller dezren dezrevell aksiomenn ar bannadoù (a zo neuze un delakadenn). Kevatal eo neuze an div zezrevell.

• Keñver bannañ : roet ur bannadur anarstalek p eus un ahel Δ war un ahel Δ' ez eus ur gwerc'hel k anvet keñver bannañ eus an ahel Δ war an ahel Δ', hevelep ma'z eo evit nep daouac'h poentoù M ha N eus Δ : $\overline{p(\mathrm{M})p(\mathrm{N})} = k\overline{\mathrm{MN}}$. An dezrevell diwezhañ-mañ a reer aksiomenn Tales anezhi, p'he lakaer da gentread. Da zianlenad : bezet ur bannadur anarstalek eus un eeunenn D war un eeunenn D$'$. Evit an holl boentoù diforc'h A, B, M, N eus D hag evit o bannadoù ketep A$'$, B$'$, M$'$, N$'$, ez eus :

$$\frac{\overline{\mathrm{M'N'}}}{\overline{\mathrm{MN}}} = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$





163 DAOUBOENTOÙ KEVARZH

• Daouboent a'n eeunenn D a reer eus nep daouac'h poentoù eus D × D.

• Daouboent a'r blaenenn P a reer eus nep daouac'h poentoù eus P × P.

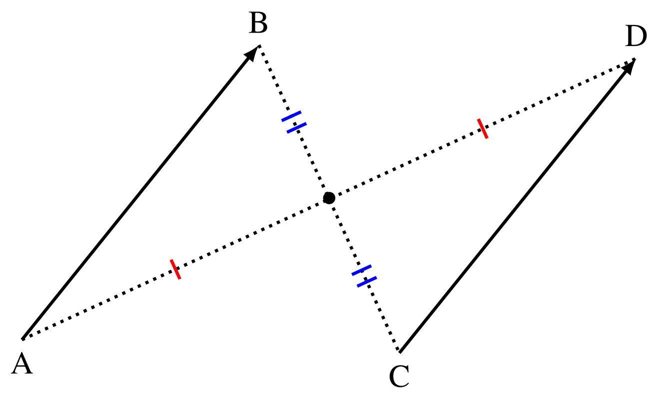
• Evit nep daouboent (A,B) ez eo A an orin ha B dibenn an daouboent.

• A-wechoù e reer daouboent mannel eus nep daouboent a zo e orin en arun gant e zibenn ; hevelep daouboent a zerc'henner da skouer (M,M).

• Daouboentoù kenheuilh a reer a-wechoù eus daou zaouboent evel :

$$(\mathrm{M},\mathrm{N}) \text{ ha } (\mathrm{N},\mathrm{P}).$$

• En un egor keouenn, daou zaouboent (A,B) ha (C,D) zo kevarzh mar ha nemet mard eo kengreiz ar regennoù [AD] ha [BC].



~ Daou zaouboent (A,B) ha (C,D) zo kevarzh pe (A,B) zo kevarzh da (C,D) mmard eus eus un treuzkludadur poentel t, hevelep ma'z eo :

$$t(A) = B \text{ ha } t(C) = D.$$

~ Notañ a reer a-wechoù : $(A,B) \sim (C,D)$.

164 STURIADELL

• En un egor keouenn (eeunenn, plaenenn, egor) ez ampar an daveadur "kevarzh da", pe daveadur kevarzhder, un daveadur kevatalder war deskad an daouboentoù. An dereoù kevatalder zo ar sturiadelloù, a lavarer kevredet ouzh an egor keouenn. En ur yezh laoskoc'h e lavarer : sturiadelloù an eeunenn, sturiadelloù ar blaenenn, sturiadelloù an egor.

• E se ez eo ur sturiadell dere kevatalder unan eus daouboentoù an egor keouenn (eeunenn, plaenenn, ...). Ur sturiadell zo derc'hallet gant unan diforzh eus he elfennoù, anvet daouboent derc'haller. Notañ a reer da skouer $\overrightarrow{AB}$ ar sturiadell, dere kevatalder an daouboent (A,B).

• Evit dezgeriañ e terc'hall daou zaouboent an un sturiadell e skriver :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

• Mard eo $A \neq B$ e reer roud ar sturiadell $\overrightarrow{AB}$ eus roud an eeunenn AB.

• Dere kevatalder nep daouboent (A,A) a anver sturiadell vann(el), a noter $\overrightarrow{0}$. Skrivañ a reer $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

• War deskad $\mathcal{V}$ ar sturiadelloù kevredet ouzh an egor keouenn (eeunenn, plaenenn, egor) e saveler :

~ Ar sammadur sturiadel, niñvadur diabarzh notet $\oplus$ pe + evit eeunaat,

~ liesadur ur sturiadell dre ur gwerc'hel, niñvadur diavaez war deskad an niñvaderioù (pe teskad ar skeuliadelloù) $\mathbb{R}$, notet $\cdot$,

~ an daou niñvadur $\cdot$ ha + dezho ar perzhioù-mañ da heul evit ar sturiadelloù $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ diforzh eus $\mathcal{V}$ hag ar gwerc'helion α, β diforzh :

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ \vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}\\
2.\ \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}\ \text{ ha }\ \vec{0}+\vec{u}=\vec{u}\\
3.\ \vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}\ \text{ ha }\ \left(-\vec{u}\right)+\vec{u}=\vec{0}\\
4.\ \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}
\end{array}\right\}\left(\mathcal{V},+\right)\text{ zo ur stroll kantamsavat.}$$

5. $\alpha\cdot\left(\beta\cdot\vec{u}\right)=\left(\alpha\beta\right)\cdot\vec{u}$
6. $\left(\alpha+\beta\right)\cdot\vec{u}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{u}$
7. $\alpha\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\alpha\cdot\vec{u}+\alpha\cdot\vec{v}$
8. $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$ (1 o vezañ elfenn neptu $\mathbb{R}$).

Lavarout a reer neuze ez eo an driac'h $(\mathcal{V},+,\cdot)$ un egor sturiadel war gorf ar gwerc'helion pe, un $\mathbb{R}$-egor sturiadel.

165 MUZUL ALJEBREL

• Muzul aljebrel an daouboent (A,B) eus un eeunenn D evit un dereziadur g a'n eeunenn-se pe, muzul aljebrel ar sturiadell $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ eus un eeunenn D evit un dereziadur g a'n eeunenn-se, a reer eus ar gwerc'hel $g(\mathrm{B})-g(\mathrm{A})$, eleze an diforc'h etre ledenn an dibenn ha ledenn an orin. Notañ a reer $\overline{\mathrm{AB}}$, a lenner "muzul aljebrel AB" pe "AB usrezell".

• E se, en un dereziadur a orin O eus an eeunenn D, skrivet e vez :

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}.$$

Mard eo ledenn B par da b ha ledenn A par da a e jeder $\overline{\mathrm{AB}}=b-a$.

Evezhiadenn :

~ $\overline{BA} = -\overline{AB}$ hag ivez $\overline{AB} = 0 \Longleftrightarrow A = B$.

~ (O,E) ha (O',E') o vezañ daou zealf eus D ez eus ur gwerc'hel α anvannel, hevelep ma'z eo $(\overline{AB})' = \alpha\overline{AB}$ evit nep daouboent (A,B) eus D, $\overline{AB}$ o vezañ e vuzul aljebrel en dealf (O,E) ha $(\overline{AB})$' en dealf (O',E').

~ Keñver $\overline{AB}/\overline{CD}$ muzulioù aljebrel an daou zaouboent (A,B) ha (C,D) eus D zo dizalc'h diouzh an dealf arveret da savelañ $\overline{AB}$ ha $\overline{CD}$.

• Bezet $\left(O, \vec{i}\right)$ un dealf eus D, x_1 ha x_2 ledennoù A ha B en dealf-se, neuze ez eus : $\overline{AB} = x_2 - x_1$. Muzul aljebrel (A,B) zo e dalc'h dibab ar sturiadell unanenn $\vec{i}$, diazez an egor sturiadel unvent kevredet ouzh an eeunenn geouenn D.

166 DAVEADUR CHASLES, SAMMADUR STURIADEL

• A, B, C o vezañ tri foent diforzh eus un eeunenn Δ e c'haller skrivañ e n'eus forzh petore dealf eus Δ : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ pe $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

• E se, evit an holl boentoù A, B, C eus un eeunenn daveet d'un dealf (O,I), e c'haller skrivañ : $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Evit A ha B diforzh :

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

• Evit A, B, C eus un egor keouenn ez eus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ha $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Evit A ha B diforzh : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

167 TROMMGREIZ

• Bezet E un egor keouenn gwerc'hel kevredet ouzh un egor sturiadel $\vec{E}$ hag ennañ un teskad n poent $A_1, A_2, \dots, A_n$ digemm ha deverket dezho ar gwezhiaderioù gwerc'hel ketep $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Graet e vez reizhiad poentoù daspouezet eus teskad an daouac'hoù :

$$(A_1,\lambda_1), (A_2,\lambda_2), \dots, (A_n,\lambda_n).$$

Ar poent O eus an egor o vezañ festet, bezet ar sammad sturiadel :

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}) = \lambda_1\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}$$

E se, ouzh pep poent O eus E e kevreder ur sturiadell eus $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ a noter $\overrightarrow{\mathrm{V}}(\mathrm{O})$. An arloadur eus E da $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ a saveler dre :

$$\mathrm{O} \longmapsto \overrightarrow{\mathrm{V}}(\mathrm{O}) \quad \text{ha } \overrightarrow{\mathrm{V}}(\mathrm{O}) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{OA}_i})$$

a reer kevreizhenn sturiadel Leibniz anezhañ.

• Bezet $\overrightarrow{\mathrm{V}}(\mathrm{O}')$ delvad O' dre gevreizhenn Leibniz. Hervez daveadur Chasles ez eus :

$$\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}_i} = \lambda_i\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{O}} + \lambda_i\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$$

ha dre sammata :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{O}} + \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right)$$

a) Mard eo sammad ar gwezhiaderioù par da vann e teu :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right).$$

Neuze ez eo ar sturiadell sammad ur sturiadell fest dizalc'h diouzh ar poent O dibabet en E.

b) Ma n'eo ket sammad ar gwezhiaderioù par da vann e teu :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{O}} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}.$$

Bezet $\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{G}'} = \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{O}} + \overrightarrow{\mathrm{OG}}$, hag alese $\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{G}'} = \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{G}}$, a dalvez ez eo G ha G' en arun.

Dezread :

O vezañ roet ar poentoù A_1, A_2, …, A_n eus E deverket dezho ar gwezhiaderioù gwerc'hel ketep $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a zo o sammad anvannel, ur poent unel G en E ez eus hevelep ma'z eo :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right),$$

ne vern pe boent O a ve dibabet en E. Ar poent G-se a reer anezhañ trommgreiz ar reizhiad poentoù daspouezet :

$$\{(A_1, \lambda_1),\ (A_2, \lambda_2),\ \ldots,\ (A_n, \lambda_n)\}.$$

Hag o vezañ ma'z eo G dizalc'h diouzh an orin dibabet e c'haller festañ an orin-se e G. Da neuze e teu :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{0}.$$

An despizadur-se ne engwerc'h nemet ar reizhiad poentoù dave.

• En degouezh ma'z eo par ar gwezhiaderioù $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ da λ e teu :

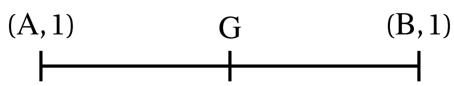
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda \overrightarrow{GA_i}\right) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

G a reer neuze *keittrommgreiz* anezhañ.

Da skouer :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

G zo kreiz ar regenn $[A, B]$.



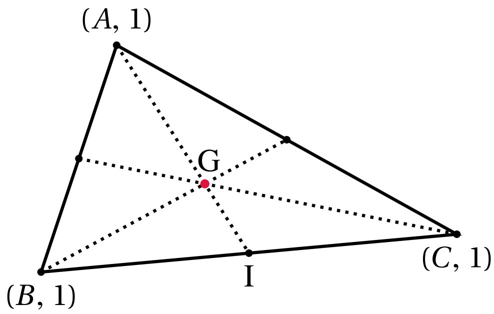
$$x_G = \frac{x_A + x_B}{2}$$

ha

$$\overline{GA} + \overline{GB} = 0$$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

G zo kreiz kerc'hell an tric'horn ABC.
Evit nep poent O a'r blaenenn (A, B, C) :
$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.



(A, I) zo ar greiztuenn tennet eus ar beg A da greiz an tu ragenep (diouzh ar beg A, pe ouzh an tu BC). Kengej eo an teir c'hreiztuenn er c'hreiz kerc'hell, loet en 2/3 eus ar regenn greiztuenn diouzh ar beg.

• Perzhioù an trommgreiz : Bezet en E egor keouenn gwerc'hel ar poent G trommgreiz ar reizhiad poentoù :

$$\{(A_1, \lambda_1),\ (A_2, \lambda_2),\ \ldots,\ (A_n, \lambda_n)\}\ \text{ gant }\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ \ldots\ + \lambda_n \neq 0.$$

Evodiñ a ra ar perzhioù-mañ da heul eus despizadur G hag eus despizadur luniadur an egor sturiadel :

- ~ *Kantamsavadezh* : G zo dizalc'h diouzh urzh ar poentoù $A_1,\ A_2,\ \ldots\ ,\ A_n$.
- ~ *Ungenezhded* : G a chom digemm mar liesaer an holl wezhiaderioù dre an un gwerc'hel anvannel.
- ~ *Strollatadezh* : G a chom digemm ouzh p poent $A_1,\ A_2,\ \ldots\ ,\ A_p$ o zrommgreiz G' deverket dezhañ sammad ar gwezhiaderioù ketep $\lambda_1 + \lambda_2 + \ \ldots\ + \lambda_p$ (anvannel).

• O vezañ roet $n+1$ poent $A_0,\ A_1,\ \ldots\ ,\ A_n$ eus E a vent n, dizalc'h ent keouenn (eleze o c'henel an egor E, ar familh $\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ o vezañ neuze ur familh sturiadelloù dizalc'h ent linennek), evit nep poent M eus E ez eus ul liesac'h unel $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ a skeuliadelloù, hevelep ma'z eo :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1 \quad \text{ha} \quad \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Ar gwerc'helion $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots\ ,\ \alpha_n$ a vez graet daveennoù trommgreizel M en dealf keouenn $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ anezho.

E gerioù all :

trommgreiz (A_0, α_0), (A_1, α_1), (A_2, α_2), $\dots$, (A_n, α_n) eo M.

Skouerioù :

~ Bezet un eeunenn geouenn hag (A, B) un dealf keouenn anezhi. An daouac'h unel (a, b), hevelep ma'z eo $a + b = 1$ ha hevelep ma'z eo M trommgreiz ar reizhiad $\{(A, a), (B, b)\}$, eleze : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$, a vez anvet daouac'h reolel a zaveennoù trommgreizel eus M e-keñver an dealf keouenn (A, B).

~ Heñvel dra en un egor keouenn divvent pe teirment :

ar bevarac'h (A, B, C, D) a boentoù ankemplaen zo un dealf keouenn eus an egor keouenn teirment. Ar bevarac'h unel (a, b, c, d), hevelep ma'z eo :

$$a + b + c + d = 1$$

ha hevelep ma'z eo M trommgreiz ar reizhiad :

$\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$ a vez anvet pevarac'h reolel a zaveennoù trommgreizel eus M e-keñver an dealf keouenn.

Evezhiadenn :

~ Nep poent eus an egor keouenn teirment a zezverker dre ur bevarac'h reolel a zaveennoù trommgreizel. O vezañ ma'z eo ereet ar peder daveenn dre $a + b + c + d = 1$ ouzh ar poent M ez eus en devoud teir daveenn dizalc'h.

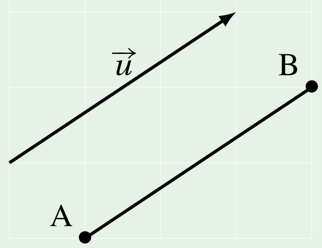
~ Evit k gwerc'hel diforzh anvannel, an daouac'h $(k\alpha, k\beta)$ a savel an un poent hag an daouac'h (α, β). An daouac'h kentañ ned eo ket reolel, tra ma'z eo an eil gant $\alpha + \beta = 1$.

168 DERC'HENNADUR UR STURIADELL

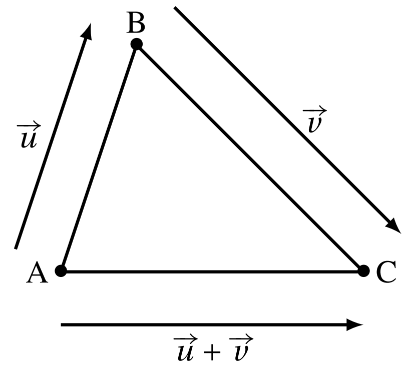
Derc'hennadur $\vec{u}$:

Ar sturiadell $\vec{u}$ zo dere kevatalder an daou-boent (A, B) evit an daveadur kevarzhder.

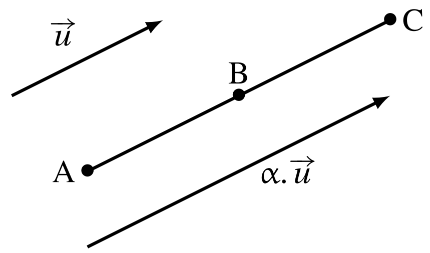
(A, B) zo un derc'haller eus $\vec{u}$.



<table>
<tr>
<td>
Derc’hennadur $\vec{u}+\vec{v}$

(A,B) zo un derc’haller eus $\vec{u}$,
(B,C) zo un derc’haller eus $\vec{v}$,
(A,C) zo un derc’haller eus $\vec{u}+\vec{v}$.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Derc’hennadur $\alpha.\vec{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$:

(A,B) zo un derc’haller eus $\vec{u}$.
A, B, C zo poentoù a-eeun, hevelep ma’z eo $\overline{AC} = \alpha\overline{AB}$.
(A,C) zo un derc’haller eus $\alpha.\vec{u}$.
</td>
<td>


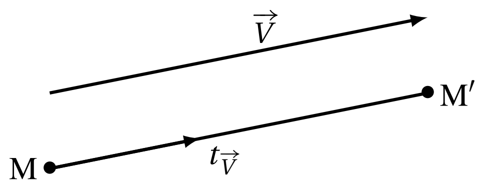
</td>
</tr>
</table>

169 TREUZKLUDADUR

• Bezet E un egor keouenn kevredet ouzh $\vec{E}$ egor sturiadel war $\mathbb{R}$. Ur sturiadell $\vec{V}$ eus $\vec{E}$ o vezañ festet e vez anvet treuzkludadur poentel (pe treuzkludadur, tra ken) a sturiadell roud $\vec{V}$ an arloadur eus E da E, notet $t_{\vec{V}}$, a gevred ouzh nep poent M eus E ar poent M′ eus E, hevelep ma’z eo

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{V}. \quad \forall M,\ M \in E,\ t_{\vec{V}}(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{V}.$$

• Nep treuzkludadur zo savelet dre ur poent festet ha delvad ar poent-se.



• <u>Perzhioù</u> :

~ Nep treuzkludadur zo un arloadur keouenn. E gwir, evit A ha M diforzh eus E hag o delvadoù $t_{\vec{V}}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ ha $t_{\vec{V}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$:

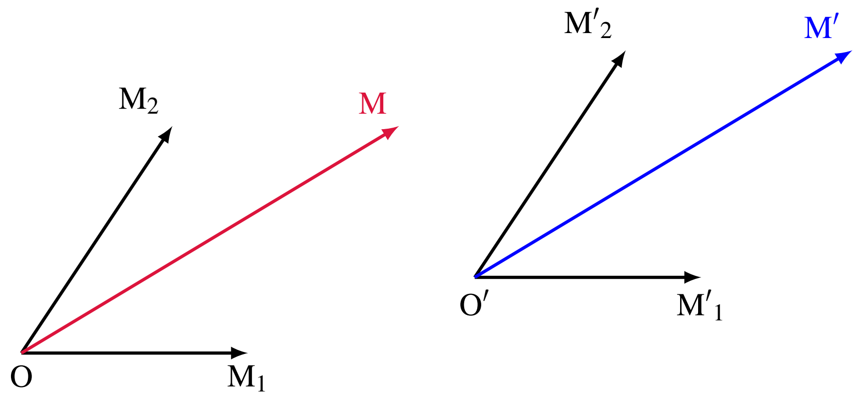
$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = \vec{\mathrm{V}} \text{ ha } \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{\mathrm{V}}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AA}'} = \overrightarrow{\mathrm{MM}'}.$$

Hag oc'h ouzhpennañ $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{M}}$ d'an div gazel : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{M}'}$. Bez' ez eus neuze un arloadur linennek en $\vec{\mathrm{E}}$ kevredet ouzh an treuzkludadur $t_{\vec{V}}$ eus E : an arloadur aruniñ. E se ez eo $t_{\vec{V}}$ un arloadur keouenn eus E.

~ Nep treuzkludadur zo kesaezhat.

~ N'eus ket a boentoù anargemmat ha neuze ned eo ket an treuzkludadur poentel un arloadur linennek en E.

~ An treuzkludadur a sturiadell $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ zo ur c'hendelvadur eus an egor sturiadel (E,O) war an egor sturiadel (E,O').



~ Teskad treuzkludadurioù un egor keouenn, gant kediadur an arloadurioù, zo ur stroll kantamsavat, kendelvek da stroll sammadel an egor sturiadel kevredet outañ.

170 DEALF AR BLAENENN

• Roet div eeunenn D ha Δ kenskej en ur poent O hepken dezho an dealfoù ketep (O,I) hag (O,J) e reer dealf keouenn ar blaenenn eus an driac'h $(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{J})$.

~ An eeunenn D dezhi an dealf (O,I) zo ahel al ledennoù.

~ An eeunenn Δ dezhi an dealf (O,J) zo ahel an hedennoù

~ An daou ahel-se a reer ahelioù an daveennoù anezho.

~ O zo orin an dealf.

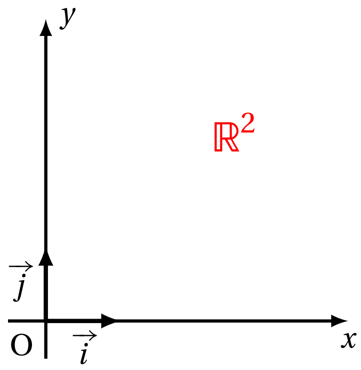
• O o vezañ ur poent festet er blaenenn, $\vec{i}$ ha $\vec{j}$ o vezañ div sturiadell ankenroud (eleze dizalc'h ent linennek) eus teskad $\mathcal{V}$ sturiadelloù ar blaenenn, anvet e vez dealf kartezel ar blaenenn an driac'h $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

~ O zo orin an dealf.

~ An ahel $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$ zo ahel al ledennoù.

~ An ahel $\left(\mathrm{O}, \vec{j}\right)$ zo ahel an hedennoù.

~ An daouac'h $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, a vez graet diazez ar blaenenn anezhi.



• Un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ eus ar blaenenn euklidel a vez anvet dealf reolel mmar o deus ar sturiadelloù diazez ar reolad 1.

• Un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ eus ar blaenenn euklidel a vez anvet dealf diaskouer mmard eo diaskouer ar sturiadelloù diazez.

• Un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ eus ar blaenenn euklidel a vez anvet dealf reizhreolel mmard eo diaskouer ar sturiadelloù diazez, dezho ar reolad 1. Diazez reizhreolel eo $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ neuze.

171 KEDRANN, DAVEENN

• An driac'h $(\mathrm{O}, \mathrm{D}, \vec{\mathrm{V}})$ ma'z eo D un eeunenn geouenn, O ur poent eus D ha $\vec{\mathrm{V}}$ ur sturiadell roud eus D, a vez graet ahel eus un egor keouenn gwerc'hel anezhi. An arloadur eus D war $\mathbb{R}$ a gevred ouzh M ar gwerc'hel x, hevelep ma'z eo $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\mathrm{V}}$, zo ur c'hesaezhadur. Ar gwerc'hel x zo ledenn M war an ahel.

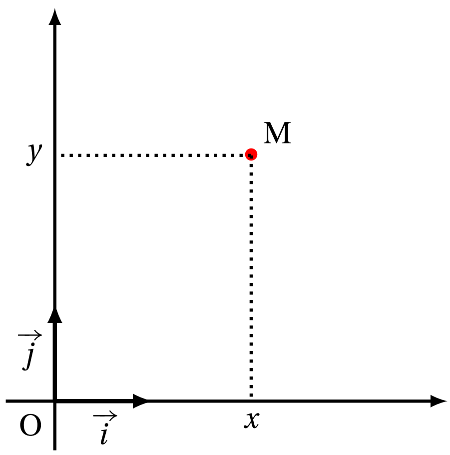
• Bezet $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$ dealf kartezel un eeunenn D a'r blaenenn ; evit nep poent M eus D e c'haller skrivañ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{i}$ ($\overline{\mathrm{OM}} = x$ unel). Ar gwerc'hel x zo ledenn M en dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$, pe c'hoazh daveenn gartezel M war an eeunenn D. Skrivañ a reer M(x).

• O vezañ roet un eeunenn D dezhi un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$ hag ur sturiadell $\vec{u}$ eus D, ar gwerc'hel a, hevelep ma'z eo $\vec{u} = a\,\vec{i}$, a vez graet kedrann skeuliadel ar sturiadell $\vec{u}$ anezhañ. Notañ a reer : $\vec{u}\,(a)$.

• Graet e vez kedrannoù skeuliadel ur sturiadell $\vec{u}$ en diazez $(\vec{i}, \vec{j})$ a'r blaenenn eus ar gwerc'helion a ha b, hevelep ma'z eo : $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$.

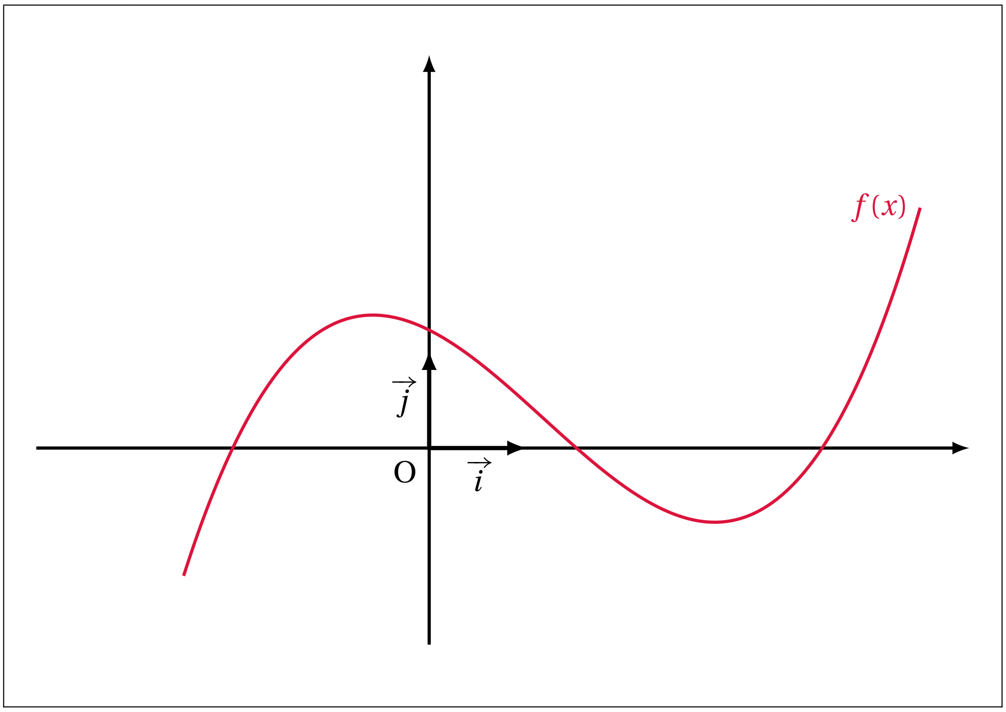
Notañ a reer : $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, gant un oged bann.

• Un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ a'r blaenenn o vezañ roet, daveennoù (kartezel) ar poent M a'r blaenenn a reer eus ar gwerc'helion x ha y, hevelep ma'z eo $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Al ledenn eo x hag an hedenn eo y. Notañ a reer M (x, y). Bez' ez eus ur c'hesaezhadur eus ar blaenenn P war $\mathbb{R}^2$ a gevred ouzh nep M an daouac'h (x, y).



• En egor teirment e vo skrivet : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, z o vezañ anvet savenn ar poent M.

• Bezet f ur gevreizhenn niverel savelet war ur parzh D eus $\mathbb{R}$. Ar blaenenn P o vezañ daveet d'un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ e reer derc'hennadur kevregat (pe kevregad) f e P eus teskad derc'hennadoù ar poentoù $(x, f(x))$. Lavarout a reer : kevregañ f pe derc'hennañ f.



172 ATALAD KARTEZEL UR GROMMENN

• Atalad kartezel ur grommenn blaen e-keñver un dealf kartezel $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ a reer eus un daveadur $f(x, y) = 0$ a ro un amplegad spirus evit ma ve ar poent a zavennoù kartezel (x, y) war ar grommenn.

• <u>Atalad un eeunenn</u> : $ax + by + c = 0$ ma'z eo a, b, c gwerc'helion roet, hep ma ve a ha b mannel en ur ser.

~ Ur sturiadell roud zo $\vec{d}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$, $-\dfrac{a}{b}$ o vezañ anvet gwezhiader roud an eeunenn.

~ An atalad a c'haller rezhiennañ : $y = mx + p$, m ha p o vezañ daou werc'hel roet ; $m = -\dfrac{a}{b}$ zo ar gwezhiader roud ha $p = -\dfrac{c}{a}$ zo hedenn an eeunenn en orin (a-wechoù e lavarer ez eo m naou an eeunenn pa vez daveet ar blaenenn d'un dealf reizhreolel).

~ Mard eo M ha N daou boent diforc'h eus un eeunenn D ha mard eo α ur gwerc'hel anvannel, nep sturiadell $\alpha\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ a vez anvet sturiadell roud an eeunenn D. Kedrannoù skeuliadel sturiadell roud un eeunenn a reer arventennoù roud eus an kez eeunenn.

• <u>Atalad ur barabolenn</u> :

Ur barabolenn zo teskad Γ poentoù a'r blaenenn, hevelep ma'z eus un dealf reizhreolel ma c'haller skrivañ an atalad kartezel :

$$y = ax^2 \ (a \neq 0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

~ Dre gemmañ dealf e c'hell nep atalad :

$y = ax^2+bx+c$ pe $x = ay^2+by+c$ $(a \neq 0)$ bezañ rezhiennet evel (1) ha bezañ derc'hennet gant ur barabolenn.

~ Bezet $f(x) = ax^2 + bx + c$, gant $a \neq 0$. Lakaomp $f(x)$ er rezh destlel :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right],$$

pe gant an disparzhant $\Delta = b^2 - 4ac$: $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

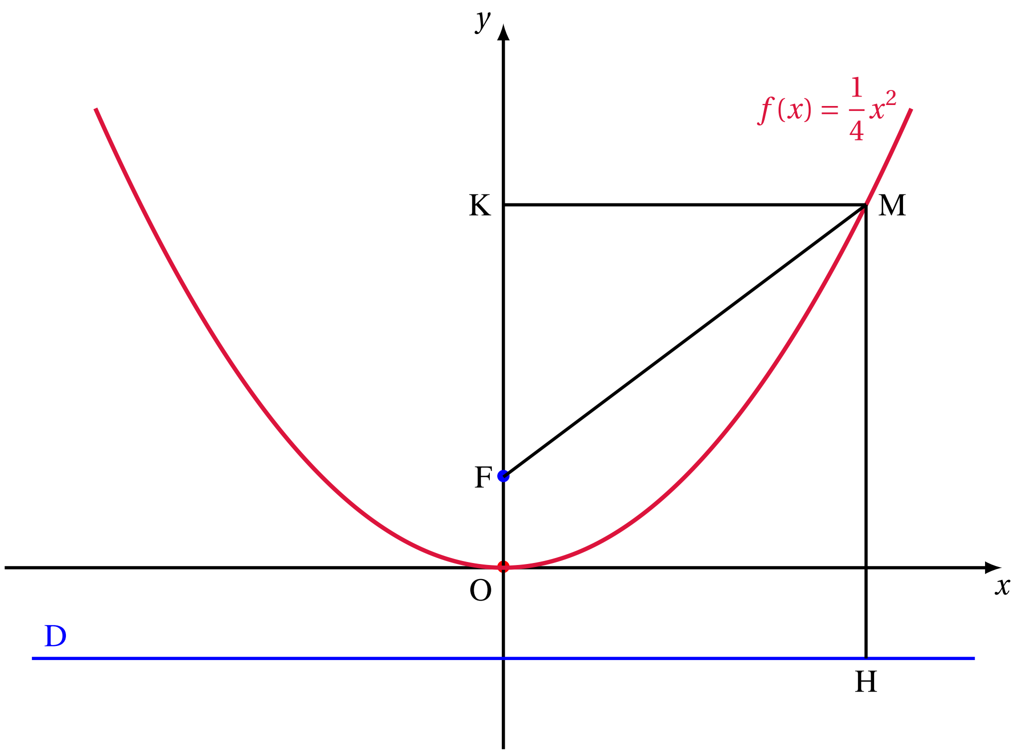
Diwar ar rezh destlel-se e weler ez eo amparet ar c'hementad etre ar sonnelloù gant un argemmenn hag un arstalenn. Ar gevreizhenn f a dizh un eizhaegenn lec'hel (uc'hegenn pe izegenn) evit ar werzhad $-\dfrac{b}{2a}$ roet d'an argemmenn x. Argevegezh ar barabolenn zo e dalc'h arouez ar gwezhiader a. Amañ dindan taolenn argemmoù f hervez arouez a :

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$



Teskad ar poentoù M eus ar blaenenn keitpell diouzh ur poent F ha diouzh un eeunenn D (F $\notin$ D) zo ur barabolenn. Mard eo H serzhvannad M war D, ez eus :

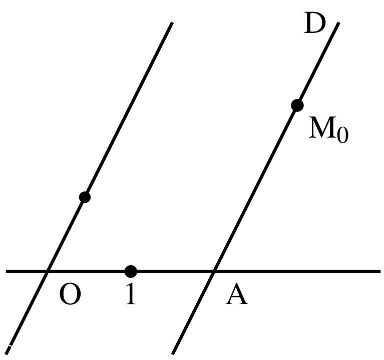
$$\mathrm{MF} = \mathrm{MH} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = 1.$$

Lavarout a reer ez eo ar barabolenn ur gernelenn a ezkreizadezh 1. Sti ar barabolenn a reer eus F ha levierenn ar barabolenn eo an eeunenn D. Ar pellder eus F da D zo arventenn p ar barabolenn hag en un dealf reizhreolel $p = \dfrac{1}{2|a|}$ mard eo $y = ax^2$ atalad ar barabolenn. Ar serzhenn war D o tremen dre F zo ahel kemparzh ar barabolenn, anvet ahel ar barabolenn hag ar poent O eo krouzell ar barabolenn.

173 DISKOULM KEVREGAT UN ATALAD EIL DEREZ DIV ARGEMMENN

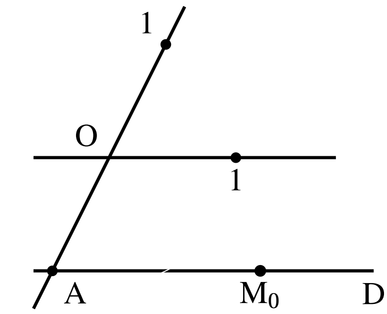
• En ur blaenenn daveet d'un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, diskoulmañ an atalad niverel div argemmenn x ha y $ax + by + c = 0$ dre an hentenn gevregat zo didermenañ parzh ar blaenenn, teskad ar poentoù $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, hevelep ma'z eo : $ax_0 + by_0 + c = 0$. Al liesañ e kaver un eeunenn.

Diskoulm kevregat an atalad $x = 2$



Bezet A $(2, 0)$ ur poent eus an teskad ha $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, hevelep ma'z eo :
$x_0 = 2$. Neuze : $\overrightarrow{\mathrm{AM}_0} = (x_0 - 2)\,\vec{i} + y_0\,\vec{j}$, alese $\overrightarrow{\mathrm{AM}_0} = y_0\,\vec{j}$ zo an amplegad spirus evit ma ve ar poent M_0 en teskad klasket. Teskad ar poentoù M_0 zo an eeunenn D enni ar poent A ha dezhi $\vec{j}$ da sturiadell roud.

Diskoulm kevregat an atalad $y = -1$

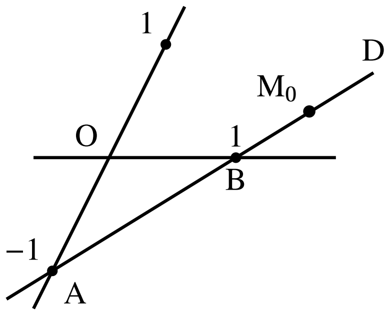


Bezet A $(0, -1)$ ur poent eus an teskad ha $M_0(x_0, y_0)$, hevelep ma'z eo :

$$y_0 = -1.\ \overrightarrow{AM_0} = x_0\,\vec{i} + (y_0 + 1)\,\vec{j}.$$

alese $\overrightarrow{AM_0} = x_0\,\vec{i}$ zo an amplegad spirus evit ma ve ar poent M_0 en teskad klasket. Teskad ar poentoù M_0 zo an eeunenn D enni ar poent A ha dezhi $\vec{i}$ da sturiadell roud.

Diskoulm kevregat an atalad $-x + y + 1 = 0$



Bezet A $(0, -1)$ ha B $(1, 0)$ daou poent eus an teskad ha $M_0(x_0, y_0)$ ur poent, hevelep ma'z eo :

$$-x_0 + y_0 + 1 = 0$$

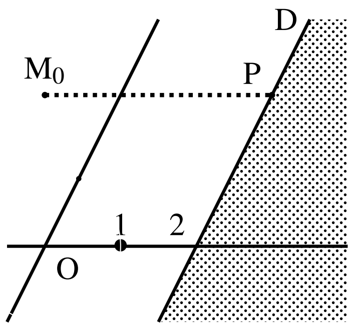
$$\overrightarrow{AM_0} = x_0\,\vec{i} + (y_0 + 1)\,\vec{j}$$

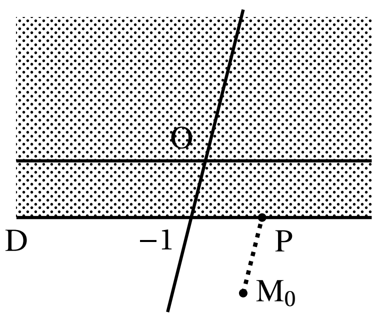
$$\text{pe}\quad \overrightarrow{AM_0} = x_0\,\vec{i} + x_0\,\vec{j}.$$

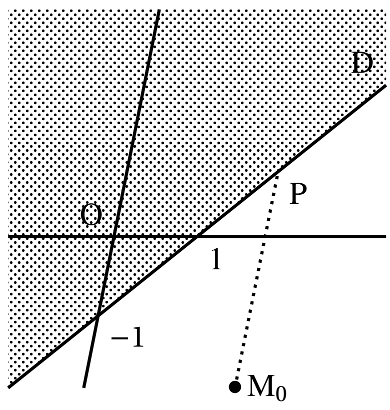
O vezañ ma'z eo $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ e teu $\overrightarrow{AM_0} = x_0\overrightarrow{AB}$ a zo un amplegad spirus evit ma ve M_0 en teskad klasket. Teskad ar poentoù M_0 zo an eeunenn (AB).

174 DISKOULM KEVREGAT UN DIATALAD KENTAÑ DEREZ DIV ARGEMMENN

• En ur blaenenn daveet d'un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, diskoulmañ an diatalad niverel div argemmenn x ha y $ax + by + c < 0$ dre an hentenn gevregat zo didermenañ parzh ar blaenenn, teskad ar poentoù $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, hevelep ma'z eo $ax_0 + by_0 + c < 0$. Al liesañ e kaver ul ledplaenenn.

<table>
<tr><th colspan="2">Diskoulm kevregat an diatalad $x < 2$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Bezet D an eeunenn atalad $x = 2$ ha $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, hevelep ma'z eo $x_0 < 2$.
Bezet ur poent P eus D a hedenn y_0.
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}_0} = (x_0 - 2)\,\vec{i}$$
Teskad ar poentoù M_0 zo al ledplaenenn digor a vevenn D oc'h enderc'hel O.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Diskoulm kevregat an diatalad $y < -1$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Bezet D an eeunenn atalad $y = -1$ ha $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, hevelep ma'z eo $y_0 < -1$.
Bezet P ur poent eus D a hedenn x_0 :
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}_0} = (y_0 + 1)\,\vec{j}\,.$$
Teskad ar poentoù M_0 zo al ledplaenenn digor a vevenn D, na endalc'h ket O.</td></tr>
</table>

Diskoulm kevregat an diatalad $-x+y+1<0$	
	Bezet D an eeunen atalad $-x+y+1=0$ ha $M_0(x_0,y_0)$, hevelep ma'z eo $-x_0+y_0+1<0$. Bezet ur poent P eus D a hedenn x_0. $\overrightarrow{PM_0}=(-x_0+y_0+1)\,\vec{j}$ Teskad ar poentoù M_0 zo al ledplaenenn digor a vevenn D na endalc'h ket O.

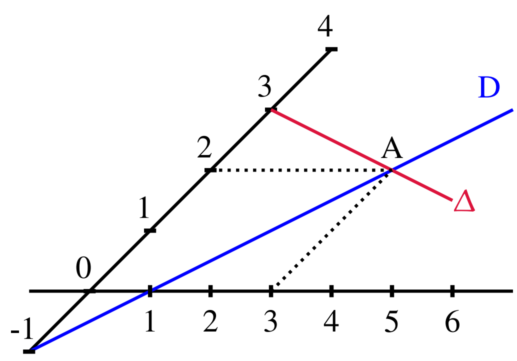
175 DISKOULMAÑ UR REIZHIAD DAOU ATALAD KENTAÑ DEREZ DIV ARGEMMENN

• En ur blaenenn daveet d'un dealf $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, diskoulm kevregat ar reizhiad ataladoù keouenn (kentañ derez) div argemmenn :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

zo didermenañ parzh ar blaenenn, teskad ar poentoù $M_0(x_0,y_0)$, hevelep ma'z eo $ax_0+by_0+c=0$ ha $a'x_0+b'y_0+c'=0$. An diskoulm a c'hell bezañ un undañv, un eeunenn, pe an teskad goullo.

<u>Skouer</u> :



$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Teskad diskoulmoù ar reizhiad zo an undañv $A(3,2)$: $T_d=\{(3,2)\}$

• Klozadur :

Bezet ar reizhiad $(\mathscr{R})$: $\begin{cases} ax+by+c=0 & \text{gant } a\neq 0 \text{ pe } b\neq 0 \\ a'x+b'y+c'=0 & \text{ha } a'\neq 0 \text{ pe } b'\neq 0 \end{cases}$

~ Mard eo $ab'-ba'\neq 0$, neuze $(\mathscr{R})$ zo dezhi un diskoulm unel ;

~ Mard eo $ab'-ba'=0$, neuze

◊ mard eo $cb'-bc'\neq 0$, neuze $\mathrm{T}_d=\emptyset$;

◊ mard eo $cb'-bc'=0$, neuze :

Evit $b\neq 0$, $\mathrm{T}_d=\left\{(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=k \quad \text{ha } y=\dfrac{-ak-c}{b}\right\}$

Evit $a\neq 0$, $\mathrm{T}_d=\left\{(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=\dfrac{-bk-c}{a} \quad \text{ha } y=k\right\}$

• Hentenn diskoulmañ dre erlec'hiañ : dre erlec'hiañ ouzh un argemmenn en unan eus an daou atalad he gwerzhad a-gevreizh d'an argemmenn all diwar an eil atalad e tisoc'her war un atalad un dianavenn.

• Hentenn diskoulmañ dre gedaoz linennek : ar pal zo ezvevennañ un argemmenn dre gedaoz linennek diwar an daou atalad.

• Delakadenn Cramer :

Bezet ar reizhiad $(\mathscr{R})$: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'x+c'=0 \end{cases}$. Ar gwerc'hel :

$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$ a anver didermenant ar reizhiad $(\mathscr{R})$.

~ Mard eo $\mathrm{D}\neq 0$, neuze $(\mathscr{R})$ zo dezhi un daouac'h diskoulm unel (x,y), hevelep ma'z eo :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{\mathrm{D}} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{\mathrm{D}}$$

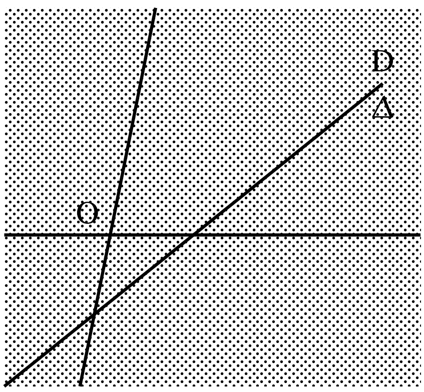
~ Mard eo $\mathrm{D}=0$, neuze ez eus da $(\mathscr{R})$ un anvevennad daouac'hoù diskoulmoù pe daouac'h diskoulm ebet.

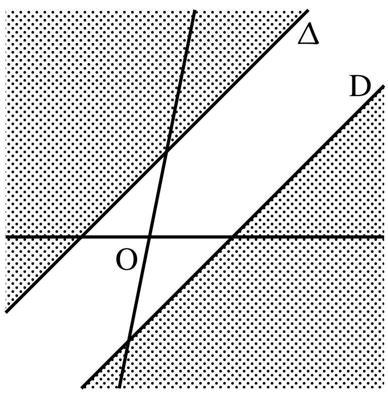
176 DISKOULM KEVREGAT UR REIZHIAD DAOU ZIATALAD KENTAÑ DEREZ DIV ARGEMMENN

• En ur blaenenn daveet d’un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, diskoulm kevregat ar reizhiad diataladoù keouenn (kentañ derez) dezho div argemmenn :

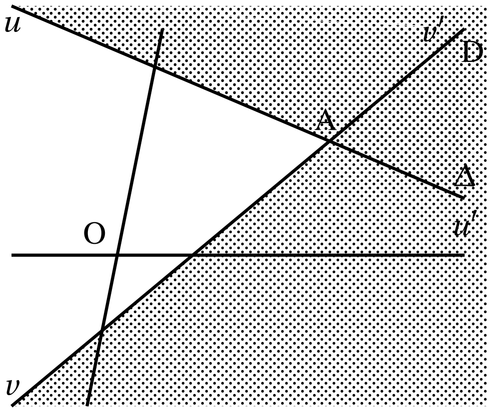
$$\begin{cases} ax+by+c<0 \\ a'x+b'y+c'<0 \end{cases}$$

zo didermenañ parzh ar blaenenn, teskad ar poentoù $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, hevelep ma’z eo $ax_0 + by_0 + c < 0$ ha $a'x_0 + b'y_0 + c' < 0$. An diskoulm a vo kenskejadur div ledplaenenn digor.

<table>
<tr><th colspan="2">Diskoulm kevregat ar reizhiad: $\begin{cases} -x+y+1<0 \\ x-y-1<0 \end{cases}$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Poentoù diskoulm an diatalad kentañ a ampar al ledplaenenn digor a vevenn D na endalc’h ket O. Heñvel dra, diskoulm an eil diatalad a ampar al ledplaenenn digor a vevenn Δ a endalc’h O.

O vezañ ma’z eo D en arun gant Δ ($\mathrm{D} = \Delta$), teskad ar poentoù $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ zo an teskad goullo.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Diskoulm kevregat ar reizhiad : $\begin{cases} -x+y+1>0 \\ x-y+1>0 \end{cases}$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Teskad diskoulmoù an diatalad kentañ zo al ledplaenenn digor a vevenn D a endalc’h O. Heñvel dra, teskad diskoulmoù an eil diatalad zo al ledplaenenn digor a vevenn Δ a endalc’h O ivez.
O vezañ ma’z eo $D \cap \Delta = \emptyset$, teskad ar poentoù $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ zo al lurell digor a vevenn D ha Δ.</td></tr>
</table>

Diskoulm kevregat ar reizhiad : $\begin{cases} -x+y+1>0 \\ x+3y-9<0 \end{cases}$



O heuliañ an hevelep poellata hag o vezañ $D \cap \Delta = \{A\}$, teskad ar poentoù $M_0(x_0, y_0)$ zo ar gennad korn digor $]Au, Av[$.

177 PELLDER

• Ur pellder war un teskad E angoullo zo un arloadur d :
$E^2 \to \mathbb{R}^+,\ (x, y) \mapsto d(x, y)$, hevelep ma'z eo, evit elfennoù $x,\ y,\ z$ diforzh eus E :

~ $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

~ $d(x, y) = \mathrm{d}(y,\ x)$

~ $d(x,\ z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + d(y,\ z)$

• Ar pellder arveret boas zo, X o vezañ un egor keouenn euklidel :

$$d\ :\ X^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ (A, B) \longmapsto (A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.$$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ zo reolad euklidel ar sturiadell $\overrightarrow{AB}$ a noter eeunoc'h AB (anvet eo pellder euklidel).
Mard eo X ur blaenenn dezhi un dealf reizhreolel, ar pellder etre ar poentoù $A(x_0, y_0)$ ha $B(x_1,\ y_1)$ zo :

$$d(x, y) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

• Bez' ez eus pelldérioù all estr eget an hini despizet diaraok. Da skouer, bezet P ur blaenenn dezhi un dealf kartezel (nad eo ket reizhreolel dre ret) ha $A(x_0, y_0)$ ha $B(x_1, y_1)$ daou boent diforzh eus P. Pelldérioù eo an arloadurioù-mañ da heul ivez :

$$\sim d'\ :\ P^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ (A, B) \longmapsto \left|x_1 - x_0\right| + \left|y_1 - y_0\right|$$

$\sim d''\ :\ \mathrm{P}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ (\mathrm{A},\mathrm{B}) \longmapsto \sup\big(|x_1 - x_0|, |y_1 - y_0|\big)$, a zo ar werzhad dizave uhelañ.

• Mar kemerer $\mathbb{R}$ da egor keouenn euklidel e saveler ur pellder etre daou werc'hel x ha y evel-henn : $d(x,y) = |x-y|$. Graet e vez pellder un entremez, treuzkiz un entremez pe hed un entremez eus ar pellder etre pennoù an entremez-se. Skin an entremez eo an hanter eus an treuzkiz ha kreiz an entremez eo ar gwerc'hel a zo e bellder diouzh pep penn par d'ar skin. Graet e vez heled stern (a,b) un niver x eus ar pellder etre a ha b.

<u>Skouer</u> : $d(2,6) = |2-6| = 4$. Ar pellder eus 2 da 6 zo 4. Kreiz an entremez $]-1,1[$ zo 0. Heled an entremez $(2,75\ ;\ 3,25)$ zo 0,5.

• (a,b) hag (α,β) o vezañ daou stern un niver x e lavarer ez eo (a,b) resisoc'h eget (α,β) mmard eo heled (a,b) bihanoc'h eget heled (α,β).

<u>Skouer</u> : $(2,5\ ;\ 2,58)$ zo resisoc'h eget $(2,491\ ;\ 2,579)$

• Pellder etre daou boent A ha B eus un eeunenn geouenn evit un dereziadur g eo gwerzh dizave an diforc'h $g(\mathrm{B}) - g(\mathrm{A})$. Notañ a reer AB pe $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$.

Skrivet e vez : $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \big|g(\mathrm{B}) - g(\mathrm{A})\big|$ pe $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \big|\overline{\mathrm{AB}}\big|$. War an eeunenn euklidel-se ez eo ar pellder etre daou boent dizalc'h diouzh an dereziadur.

• Ar pellder eus ur poent M d'un eeunenn D a'r blaenenn euklidel zo ar pellder etre M ha serzhvannad M war D. Evit nep M$'$ eus D :

$$d(\mathrm{H},\mathrm{M}) \leqslant d(\mathrm{M}',\mathrm{M}).$$

178 REOLIÑ

• Bezet E un egor sturiadel war $\mathbb{R}$. Graet e vez reoladur war E — reoliñ a reer an teskad E — eus un arloadur eus E da $\mathbb{R}^+$ a gevred ar sturiadell $\vec{x}$ ouzh ar gwerc'hel notet $\|\vec{x}\|$ (an delvad-se o vezañ disoc'h ar reoliñ, eleze reolad ar c'hentorad $\vec{x}$), hevelep ma'z eo evit ar sturiadelloù $\vec{x}$ ha $\vec{y}$ diforzh eus E ha nep gwerc'hel λ :

1) $\|\vec{x}\| = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

2) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

3) $\|\lambda.\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$

Skouerioù war $\mathbb{R}^2$:

a) $(x_1,\ x_2) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (reolad euklidel mard eo E un egor sturiadel euklidel) ;

b) $(x_1, x_2) \longmapsto \sup(|x_1|, |x_2|)$;

c) $(x_1, x_2) \longmapsto |x_1| + |x_2|$.

~ Un egor sturiadel savelet warnañ ur reoliñ a lavarer egor sturiadel reolet

~ Ur sturiadell dezhi ar reolad 1 a vez graet sturiadelloù unan(enn) anezhi pe c'hoazh sturiadell reolel.

~ Alese e lavarer ez eo reolel un diazez mmard eo reolad holl sturiadelloù an diazez par da unan, eleze mmard int reolel. Heñvel dra un dealf reolel zo un dealf dezhañ un diazez reolel. Neuze un dealf diaskouer ha reolel war un dro a vo lavaret reizhreolel.

• Bezet da skouer ur sturiadell $\vec{u}$ eus teskad sturiadelloù ar blaenenn euklidel alfet en O (kendelvek d'e egor sturiadel kevredet) ; mard eo (A, B) un derc'haller eus $\vec{u}$, ar pellder $d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ a vez graet reolad $\vec{u}$ anezhañ. Notañ a reer $\|\vec{u}\|$ pe $|\vec{u}|$, a lenner “reolad $\vec{u}$”. Skrivet e vez ivez : $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

• Ur sturiadell zo ur sturiadell vannel mmard eo he reolad par da vann.

179 DIASKOUERDER

• Bezet E un egor sturiadel euklidel. Lavarout a reer ez eo ur sturiadell $\vec{v}$ eus E a-skouer gant (pe diaskouer ouzh) ur sturiadell $\vec{v'}$ eus E mmard eo $\vec{v} \cdot \vec{v'} = 0$; an daveadur o vezañ kemparzhek e lavarer ez eo a-skouer (diaskouer) an div sturiadell.

~ $\vec{v}$ a lavarer a-skouer gant un isegor sturiadel F eus E mmard eo $\vec{v}$ diaskouer ouzh nep sturiadell eus F.

~ Daou isegor sturiadel eus E zo diaskouer mmard eo nep sturiadell eus an eil a-skouer gant nep sturiadell eus egile.

Perzhioù :

~ Evit un eeunenn sturiadel (dim E = 1), $\overrightarrow{0}$ hag E zo an isegorioù diaskouer nemeto.

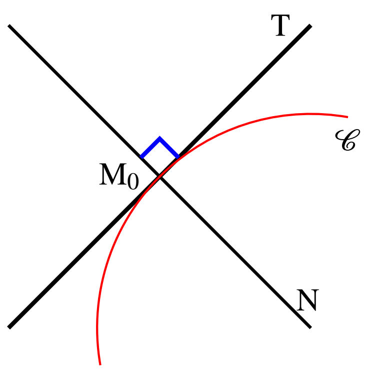
~ Evit ur blaenenn sturiadel, $\overrightarrow{0}$ hag E zo diaskouer ; div eeunenn sturiadel zo diaskouer mmard eo ur sturiadell roud eus an eil diaskouer ouzh ur sturiadell roud eus eben.

~ Evit an egor sturiadel teirment, $\overrightarrow{0}$ hag E zo diaskouer ; un eeunenn hag ur blaenenn sturiadel zo diaskouer mmard eo ur sturiadell roud eus an eeunenn diaskouer ouzh div sturiadell diazez eus ar blaenenn ; div eeunenn sturiadel zo diaskouer mmard eo ur sturiadell roud eus an eil diaskouer ouzh ur sturiadell roud eus eben.

• Bezet X un egor keouenn euklidel e-keñver un egor sturiadel $\overrightarrow{X}$. Div eeunenn zo diaskouer (pe a-skouer) mmard eo diaskouer o roudoù. Un eeunenn hag ur blaenenn zo diaskouer mmard eo diaskouer o roudoù. Div blaenenn zo diaskouer mmard eus en unan anezho eus un eeunenn diaskouer ouzh eben. Lavarout a reer : diaskouer ouzh.

Evezhiadenn :

~ evit div eeunenn *diaskouer ha kemplaen* e lavarer ez int *kenserzh* pe emañ an eil a-serzh war eben.

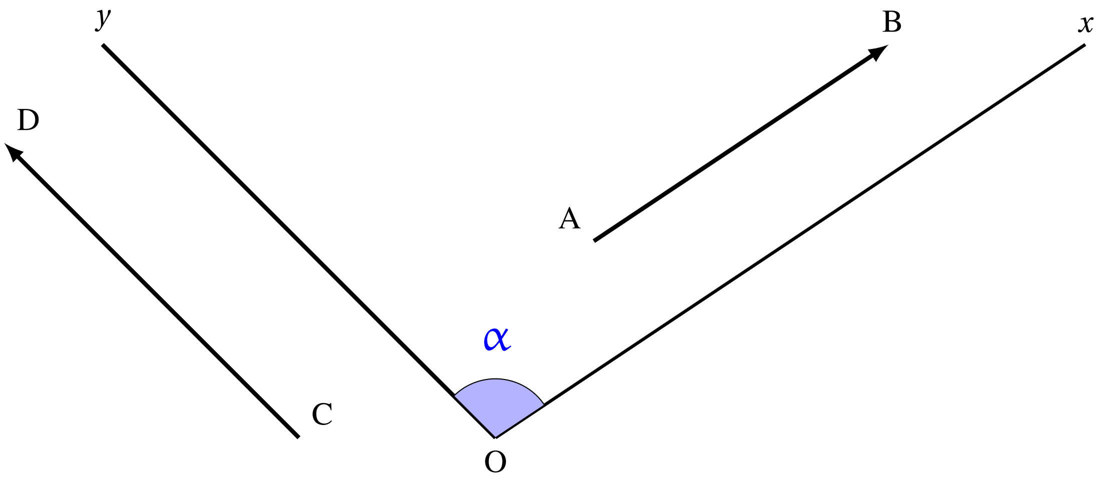


~ Bezet $\mathscr{C}$ ur grommenn blaen dezhi ur spinenn T er poent M_0.

Anvet e vez *eeunenn skoueriek* pe *skoueriegenn* war $\mathscr{C}$ e M_0 an eeunenn N o tremen dre M_0 hag a-serzh war ar spinenn T.

Setu perak e reer anv ivez eus krommennoù skoueriek (kenserzh o spinennoù en ur c'henboent) pe eus ar blaenenn skoueriek en ur poent war ur c'horreenn pe zoken eus ur sturiadell skoueriek war ur blaenenn.

180 LIESÂD SKEULIADEL DIV STURIADELL



● **Despizadur tric'hornventouriel :**

Liesâd skeuliadel div sturiadell anvannel $\vec{u}$ [derc'hallet gant an daouboent (A, B)] ha $\vec{v}$ [derc'hallet gant an daouboent (C, D)] zo ar gwerc'hel disoc'h liesadur reoladoù an div sturiadell ha kosinuz o c'horn.

$$\text{Notañ a reer : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$$

Evezhiadennoù :

1. Gwerzh al liesâd skeuliadel zo e dalc'h an unanenn regad dibabet er blaenenn. E se ez eo atalad mentawouriezhel al liesâd skeuliadel L^2 ha dewerzhet e vez en unanennoù gorread. Ar peurliesañ ne vez ket meneget.

2. Ar c'horn α meneget el liesâd skeuliadel zo ur c'horn andurc'haet, rak damkaniezh al liesâd sturiadel ne c'houl ket durc'hadur ar c'hornioù. Neoazh mard eo θ ur muzul eus ar c'horn durc'haet $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ hag α muzul ar c'horn andurc'haet $[\widehat{\vec{u}, \vec{v}}]$ ez eo atav $\cos\theta = \cos\alpha$. Da neuze e c'haller arverañ ivez ar c'hornioù durc'haet evit jediñ ul liesâd skeuliadel.

● Al liesâd $\vec{u} \cdot \vec{u}$ a vez notet $\vec{u}^2$ hag anvet : karrez skeuliadel $\vec{u}$.

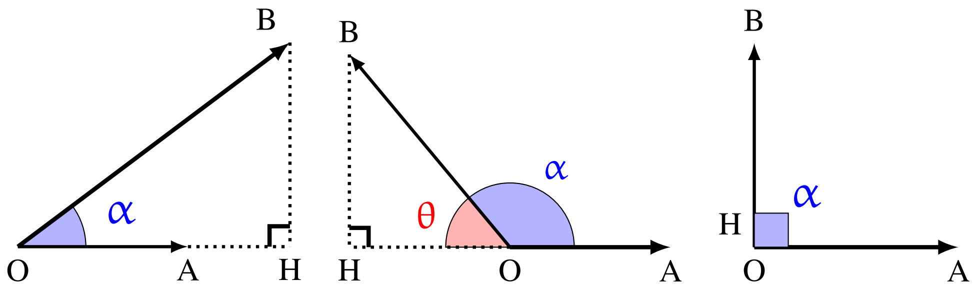
Eleze : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$, karrez skeuliadel ur sturiadell zo par da garrez he reolad.

• Perzhioù al liesâd skeuliadel :

~ Kemparzhegezh : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ .... (1)

~ Liesadur dre ur gwerc'hel : $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$ .... (2)

~ Despizadur mentoniel al liesâd skeuliadel :



Evit jediñ ul liesâd skeuliadel e c'haller erlec'hiañ ouzh unan eus ar sturiadelloù he serzhvannad war eben.

$$p=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\overline{OA}\cdot\overline{OH} \quad (3)$$

Neuze : Mard eo serzh α, $\overline{OH}=0$, $\cos\alpha=0$, ha $p=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

~ Liesâd skeuliadel ur sturiadell dre ur sammad sturiadel :

$$\vec{U}\cdot\left(\vec{V}+\vec{V'}+\vec{V''}\right)=\vec{U}\cdot\vec{V}+\vec{U}\cdot\vec{V'}+\vec{U}\cdot\vec{V''} \quad (4)$$

$$\left(\vec{V}+\vec{V'}+\vec{V''}\right)\cdot\vec{U}=\vec{V}\cdot\vec{U}+\vec{V'}\cdot\vec{U}+\vec{V''}\cdot\vec{U}$$

$$\left(\vec{U}+\vec{U'}\right)\cdot\left(\vec{V}+\vec{V'}\right)=\vec{U}\cdot\vec{V}+\vec{U}\cdot\vec{V'}+\vec{U'}\cdot\vec{V}+\vec{U'}\cdot\vec{V'}$$

~ Uelinennegezh : Lakaomp $p=\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. Mar lezer anargemm $\vec{u}$ ha mar lakaer $\vec{v}$ da argemm e c'haller lavarout e klot ur gwerc'hel p ouzh pep sturiadell $\vec{v}$ eus ar blaenenn sturiadel. Neuze : $p=\vec{u}\cdot\vec{v}=f(\vec{v})$, f o vezañ un arloadur eus ar blaenenn sturiadel en $\mathbb{R}$. Bez' hon eus enta :

$$\begin{cases} f\left(\vec{v'}+\vec{v''}\right)=f\left(\vec{v'}\right)+f\left(\vec{v''}\right) \\ f\left(a\vec{v}\right)=af\left(\vec{v}\right) \end{cases}$$

2. Mar lezer anargemm $\vec{v}$ ha mar lakaer $\vec{u}$ da argemm, bezet $p=\vec{u}\cdot\vec{v}=g(\vec{u})$, g o vezañ un arloadur eus ar blaenenn sturiadel en $\mathbb{R}$, hevelep ma'z eo :

$$\begin{cases} g\left(\vec{u'}+\vec{u''}\right)=g\left(\vec{u'}\right)+g\left(\vec{u''}\right) \\ g\left(a\vec{u}\right)=ag\left(\vec{u}\right) \end{cases}$$

Al liesâd skeuliadel o vezañ linennek e-keñver pep hini eus an div sturiadell a vez lavaret uelinennek. Mar notomp $\vec{P}$ ar blaenenn sturiadel ez eo an daouac'h $(\vec{u}, \vec{v})$ un elfenn eus al liesâd kartezel $\vec{P} \times \vec{P}$. Al liesâd skeuliadel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ zo neuze un arloadur eus $\vec{P} \times \vec{P}$ en $\mathbb{R}$. Un hevelep arloadur a zo an delvad ur gwerc'hel a vez anvet furm. Ur furm uelinennek eo al liesâd skeuliadel enta.

• Deur al liesâd skeuliadel a anad : heñvel eo reolennoù jediñ 'zo ouzh ar jedadurioù niverel (dav eo diwall avat !). Jediñ a reer enta :

$$\begin{aligned}
&(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2\\
&(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\\
&(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\\
&(a\vec{u}^2) = a^2\vec{u}^2
\end{aligned}$$

Dibarder Cauchy-Schwartz : $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Liesâd skeuliadel en un dealf reizhreolel :

Bezet $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ ha $\vec{u'}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$: $\vec{u}.\vec{u'} = XX' + YY'$; $\vec{u}^2 = X^2 + Y^2$

$$\vec{u} \perp \vec{u'} \Longleftrightarrow XX' + YY' = 0$$

• **Linennoù (krommennoù) keitlive ur gevreizhenn boent :**

Lavarout a reer ez eo f ur gevreizhenn boent mar kevred ouzh pep poent M a'r blaenenn ur gwerc'hel k. Srivañ a reer : $f(M) = k$. An araezad f zo un arloadur eus ar blaenenn boentel e teskad ar gwerc'helion $\mathbb{R}$.

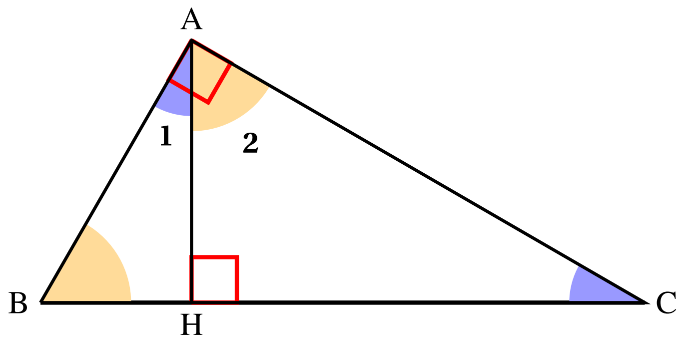
Notet e vez ivez :

$f\ :\ \mathrm{M} \longmapsto k.$ Teskad ar poentoù M a ro an un gwerc'hel k a vez liesañ ul linenn a anver linenn (pe c'hoazh krommenn) a live (pe : keitliveenn k) k ar gevreizhenn f .

Arloadur $\mathrm{M} \longmapsto f(\mathrm{M}) = k$	**Keitliveennoù**
$\mathrm{M} \longmapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2$	Eeunennoù diaserzh ouzh $\begin{cases} \vec{u} \\ (\mathrm{AB}) \end{cases}$
$\mathrm{M} \longmapsto \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}}$ $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2$	Kelc'hioù kreizet e kreiz [AB]

TRIC’HORNVENTOURIEZH

181 DAVEADURIOÙ MENTEL EN TRIC'HORN SERZH



1. Daveadurioù mentel a heñvelder :

Mard eo an tric'horn (ABC) serzh en A, ar sav (AH) a savel daou gorn $\widehat{A_1}$ hag $\widehat{A_2}$, hevelep ma'z eo :

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C} \text{ (an un serzhuzenn } \widehat{A_2}) \\ \widehat{A_2} = \widehat{B} \text{ (an un serzhuzenn } \widehat{C}) \end{cases}$$

An tric'hornioù (ABC), (HAC) ha (HBA) zo heñvel daou ha daou, pa'z eo par o c'hornioù kevelep. Alese ar parderioù da heul :

$\dfrac{AB}{HA} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{HC}$, alese $AB \times AC = BC \times HA$ hag $\mathbf{AC^2 = BC \times HC}$ . . . . (1)

$\dfrac{AB}{HB} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{AC}{HA}$, pezh a ro : $\mathbf{AB^2 = BC \times HB}$ . . . . (2)

$\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{AC}{BA} = \dfrac{HC}{HA}$, pezh a ro : $\mathbf{HA^2 = HB \times HC}$ . . . . (3)

2. DelakadennPitagoras :

O sammañ kazel ha kazel ar parderioù (1) ha (2) e teu :

$$AB^2 + AC^2 = BC \times (HB + HC) = BC \times BC, \text{eleze :}$$

$$\mathbf{AB^2 + AC^2 = BC^2}$$

Karrez hed ar goustenner zo par da sammad karrezioù hedoù tuioù ar c’horn serzh.

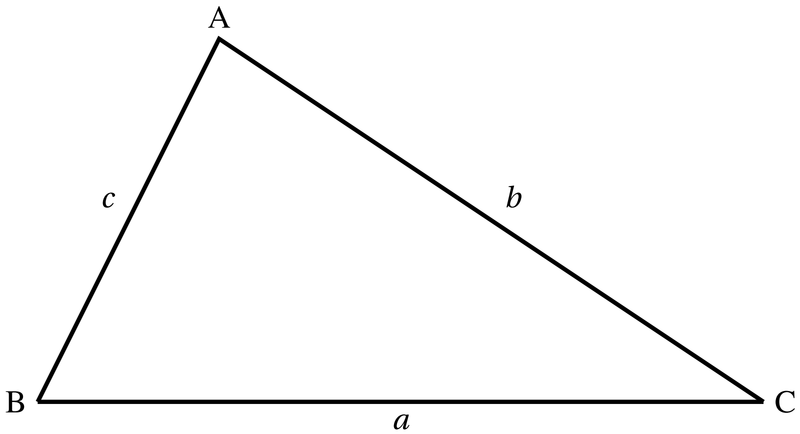
Keveskemmenn :

Mar gwir hedoù tuioù un tric’horn ar parder $AB^2+AC^2 = BC^2$, neuze ez eo serzh en A.

3. Daveadur heverk all :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

182 DAVEADURIOÙ MENTEL EN UN TRIC’HORN DIFORZH



• Daveadur Pitagoras hollekaet : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

• Gorread an tric’horn : $G = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

• Daveadur ar sinuzoù : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$

(R o vezañ skin ar c’helc’h amgaeet)

183 DIBARDER TRIC'HORNEL

• Evit gwerc'helion a ha b diforzh : $|a+b| \leqslant |a|+|b|$

• Evit an holl boentoù A, B, C a'r blaenenn euklidel :

$$d(\mathrm{A},\mathrm{C}) \leqslant d(\mathrm{A},\mathrm{B}) + d(\mathrm{B},\mathrm{C})$$

• Evit sturiadelloù $\vec{u}$ ha $\vec{v}$ diforzh eus teskad sturiadelloù ar blaenenn :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

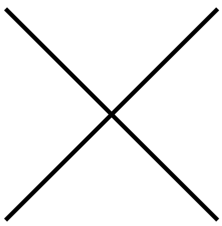
184 KORN MENTONIEL

• E teskad an daouac'hoù ledeeunennoù kenorin a'r blaenenn euklidel e teseller an daveadur kevataldер $\mathscr{R}$, hevelep ma talvez $(\mathrm{A}x,\mathrm{A}y)\,\mathscr{R}\,(\mathrm{A}'x',\mathrm{A}'y')$ ez eo $\mathrm{A}'x'$ ha $\mathrm{A}'y'$ keitventadoù ketep eus $\mathrm{A}x$ ha $\mathrm{A}y$. Ur c'horn mentoniel (lavarout a reer ivez korn andurc'haet) zo dere kevatalder un daouac'h ledeeunennoù kenorin modulo an daveadur $\mathscr{R}$. Notañ a reer ar c'horn mentoniel dere kevatalder $(\mathrm{A}x,\mathrm{A}y)$: $\widehat{x\mathrm{A}y}$. Evit dezgeriañ ez eo ar c'horn mentoniel θ dere kevatalder $(\mathrm{A}x,\mathrm{A}y)$ e skriver $\theta = \widehat{x\mathrm{A}y}$ pe $(\mathrm{A}x,\mathrm{A}y) \in \theta$.

Notenn : Arabat kemmeskañ korn mentoniel ha gennad korn. Ar gennad korn zo ul lun (parzh a'r blaenenn) ha lies gennad a c'hell bezañ keitvent, o savelañ an un mentenn anvet korn mentoniel. E se ez eo ur c'horn mentoniel dere kevatalder un anvevennad gennadoù keitvent. Derc'hennañ ur c'horn mentoniel a c'haller dre unan eus e elfennoù, a vo un derc'haller anezhañ.

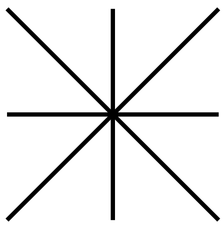
Skouer :

Pervannoù :



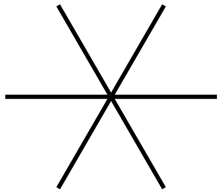
Pevar farzh a'r blaenenn,
ur c'horn (mentoniel) hepken :
ur bevarenn blaenenn.

Eibannoù :



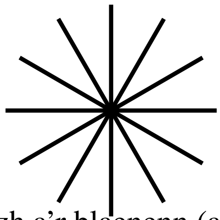
Eizh parzh a'r blaenenn,
ur c'horn (mentoniel) hepken :
un eizhvedenn blaenenn.

C'hwevannoù :



C'hwec'h parzh a'r blaenenn,
ur c'horn (mentoniel) hepken :
ur c'hwec'hvedenn blaenenn.

Daouzekvannoù :

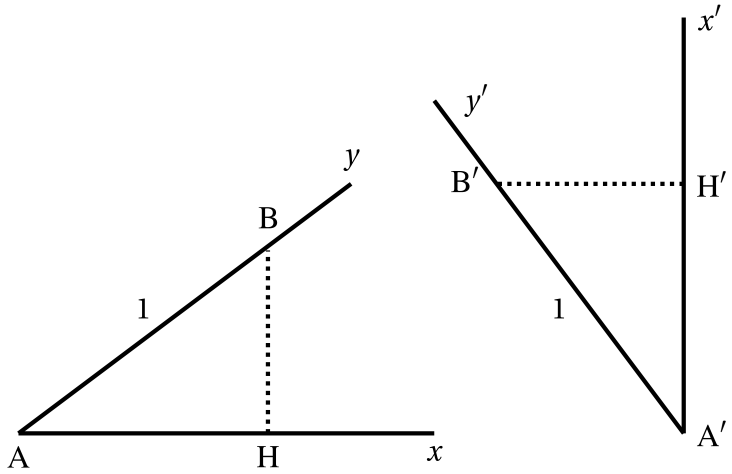


Daouzek parzh a'r blaenenn (an arouezioù),
ur c'horn (mentoniel) hepken :
un daouzekvedenn blaenenn.

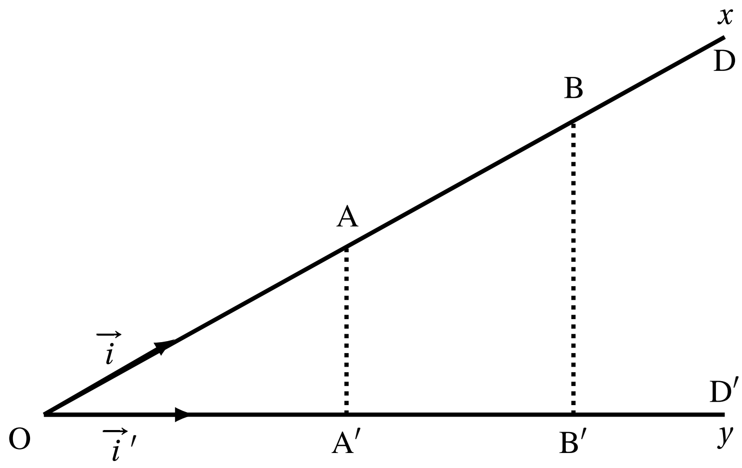
Neuze sed an heuliad : unvann, daouvann, tribann, pervann, pembann, c'hwevann, seibann, eibann, navbann, dekvann…

Evezhiadenn :

An daveadur $\mathscr{R}$ a c'haller desellout evel-henn :
$(\mathrm{A}x,\mathrm{A}y)\,\mathscr{R}\,(\mathrm{A}'x',\mathrm{A}'y')$ mmar o deus $(\mathrm{A}x,\mathrm{A}y)$ hag $(\mathrm{A}'x',\mathrm{A}'y')$ an un keñver serzhvannañ.



• Bezet daou ahel $(\mathrm{D},\vec{i}\,)$ ha $(\mathrm{D}',\vec{j}\,)$ eus ur blaenenn geouenn ; evit forzh petore poentoù A ha B diforc'h eus D dezho da serzhvannadoù ketep A′ ha B′ war D′, ar c'heñver $\dfrac{\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ zo dizalc'h diouzh dibab ar poentoù A ha B ; ar c'heñver-se a anver keñver serzhvannañ an ahel $(\mathrm{D},\vec{i}\,)$ war an ahel $(\mathrm{D}',\vec{j}\,)$. Notañ a reer : $c(\mathrm{D},\mathrm{D}')$.



Perzhioù :

$$c(\Delta, \Delta') = c(\Delta', \Delta)$$
$$(\Delta \perp \Delta') \iff \big(c(\Delta', \Delta) = 0\big)$$
$$(\Delta \,/\!/\, \Delta') \iff \Big(\big|c(\Delta', \Delta)\big| = 1\Big)$$

Daou ahel Δ ha Δ' kenroud zo kendu mmard eo $c(\Delta, \Delta') = 1$

Daou ahel Δ ha Δ' kenroud zo gindu mmard eo $c(\Delta, \Delta') = -1$

• Bezet Δ_1 ha Δ_2 an ahelioù kevredet a-getep ouzh al ledeeunennoù Ax ha Ay. Ar c'heñver serzhvannañ $c(\Delta_1, \Delta_2)$ an ahel Δ_1 war an ahel Δ_2 a vez graet anezhañ : keñver serzhvannañ kevredet ouzh ar c'horn mentoniel $\widehat{x\mathrm{A}y}$. Neuze ez eus evit an holl ahelioù Δ_1 ha Δ_2 kevredet ouzh Ax hag Ay :

$\left(\widehat{x\mathrm{A}y} = \widehat{x'\mathrm{A'}y'}\right) \iff c(\Delta_1, \Delta_2) = c(\Delta'_1, \Delta'_2)$ ma 'z eo Δ'_1 ha Δ'_2 an ahelioù kevredet ouzh A$'x'$ ha A$'y'$.

• Degouezhioù dibarek :

~ Ur c'horn mannel zo ur c'horn mentoniel a zo e geñver serzhvannañ kevredet par da 1.

~ Ur c'horn serzh zo ur c'horn mentoniel a zo e geñver serzhvannañ kevredet par da 0.

~ Ur c'horn sklat zo ur c'horn mentoniel a zo e geñver serzhvannañ kevredet par da -1.

~ Ur c'horn lemm zo ur c'horn mentoniel a zo muiel e geñver serzhvannañ kevredet.

~ Ur c'horn tougn zo ur c'horn mentoniel a zo leiel e geñver serzhvannañ kevredet.

• Bezet un tric'horn (ABC). Ax al ledeeunenn a orin A oc'h enderc'hel B, Ay al ledeeunenn a orin A oc'h enderc'hel C. Ar c'horn mentoniel $\widehat{x\mathrm{A}y}$ a vez graet anezhañ : korn mentoniel an tric'horn (ABC) kevredet ouzh ar beg A. Skrivañ a reer $\widehat{\mathrm{BAC}}$ pe $\widehat{\mathrm{A}}$. En hevelep doare e vo despizet $\widehat{\mathrm{CBA}}$ pe $\widehat{\mathrm{B}}$ hag $\widehat{\mathrm{ACB}}$ pe $\widehat{\mathrm{C}}$. [BC] a vez anvet tu ragenep da $\widehat{\mathrm{BAC}}$, [AB] ha [AC] a vez anvet tuioù kefin da $\widehat{\mathrm{BAC}}$.

185 GWARAD

• E o vezañ teskad gwarennoù ar c'helc'h C, k ur gwerc'hel muiel strizh, bez' ez eus un arsaezhadur, hag unan hepken, f_k eus E war $[0,2k]$, hevelep ma'z eo keitvent div warenn α_1 hag α_2 mar ha nemet mard eo $f_k(\alpha_1) = f_k(\alpha_2)$.

~ Mard eo α kembodadur div warenn gefin α_1 hag α_2, neuze $f_k(\alpha) = f_k(\alpha_1) + f_k(\alpha_2)$.

~ Mard eo α un hanter gelc'h, neuze $f_k(\alpha) = k$.

~ Mard eo α ur warenn vannel, neuze $f_k(\alpha) = 0$.

• f_k a vez anvet : ur gevreizhenn vuzuliañ gwarennoù C.

• $f_k(\alpha)$ a vez anvet : muzul ar warenn α pe gwarad α mard eo k muzul an hantergelc'h (er reizhiad k).

• Mar lakaer $k = \pi$, π (diwar dallizherenn an hGr. περίμετρος) o vezañ ar gwerc'hel muiel par da C/D (keñver amregad ar c'helc'h dre e dreuzkiz) :

$f_\pi(\alpha)$ a vez anvet : gwarad α e radianoù (arouez rad) pe gwarad α er reizhiad π.

• Mar lakaer $k = 200$, $f_{200}(\alpha)$ zo gwarad α e gradoù pe gwarad α er reizhiad 200.

• Mar lakaer $k = 180$, $f_{180}(\alpha)$ zo gwarad α e derezioù pe gwarad α er reizhiad 180.

• Mard eo $f_k(\alpha)$ ha $f_h(\alpha)$ gwaradoù α, a-getep er reizhiad k hag er reizhiad h, ez eus :

$$\frac{f_k(\alpha)}{k} = \frac{f_h(\alpha)}{h}.$$

E se, mard eo a, b, c gwaradoù α, a-getep e radianoù, gradoù ha derezioù, ez eus :

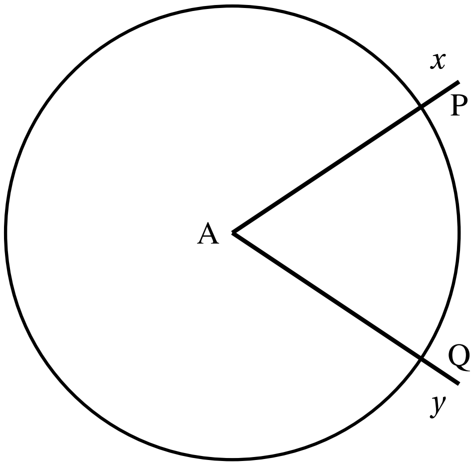
$$\frac{a}{\pi} = \frac{b}{200} = \frac{c}{180}.$$

Gwarad e derezioù	0	15	30	45	60	75	90	180
Gwarad e radianoù	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Gwarad e gradoù	0	16,66	33,33	50	66,66	83,33	100	200

• Graet e vez gwarenn ventoniel $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ eus teskad an holl warennoù keitvent gant ar warenn AB, eleze ar re o deus an un gwarad.

186 KORNSKARAD

• Bezet al ledeeunennoù Ax ha Ay, ha C ur c'helc'h kreizet en A. Kenskejadur Ax ha C zo P, Q kenskejadur Ay ha C. α a vo anv ar warenn pennet e P ha Q, loet el ledplaenenn a vevenn PQ, na endalc'h ket A.



~ Kornskarad ar c'horn mentoniel $\widehat{xAy}$ pe kornskarad an daouac'h ledeeunennoù (Ax, Ay) zo muzul ar warenn α.

~ Kornskarad ar c'horn mentoniel $\widehat{xAy}$ a noter muz $(\widehat{xAy})$.

~ Kornskarad an daouac'h ledeeunennoù (Ax, Ay) a noter : muz $(\widehat{Ax, Ay})$.

~ Kornskarad $\widehat{xAy}$ e radianoù a noter muz$_\pi$ $(\widehat{xAy})$.

~ Kornskarad $\widehat{xAy}$ e dereziοù a noter muz$_{180}$ $(\widehat{xAy})$.

~ Kornskarad $\widehat{xAy}$ e gradoù a noter muz$_{200}$ $(\widehat{xAy})$.

• Div zaouac'h ledeeunennoù (Ax, Ay) ha $(A'x', A'y')$ zo keitvent mmard eo — er reizhiad k — muz$_k$ $(\widehat{xAy})$ = muz$_k$ $(\widehat{x'A'y'})$.

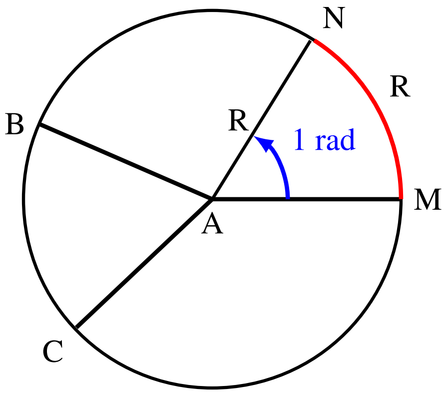
• Skladus eo daou gorn mentoniel $\widehat{xAy}$ ha $\widehat{x'A'y'}$ mmard eo — er reizhiad k — muz$_k$ $(\widehat{xAy})$ + muz$_k$ $(\widehat{x'A'y'}) = k$.

• Serzhus eo daou gorn mentoniel $\widehat{xAy}$ ha $\widehat{x'A'y'}$ mmard eo — er reizhiad k — muz$_k$ $(\widehat{xAy})$ + muz$_k$ $(\widehat{x'A'y'}) = k/2$.

• Evit nep tric'horn (ABC) er reizhiad k :

$$\text{muz}_k\,(\widehat{BAC}) + \text{muz}_k\,(\widehat{CBA}) + \text{muz}_k\,(\widehat{ACB}) = k.$$

Evezhiadenn :



hed $(\widehat{MN}) = R$

Ur warenn gelc'h dezhi da vuzul 1 rad he deus un hed par da skin ar c'helc'h. E se ez eo ar radian muzul ur warenn he muzul par da $180/\pi$ derez pe $200/\pi$ grad.

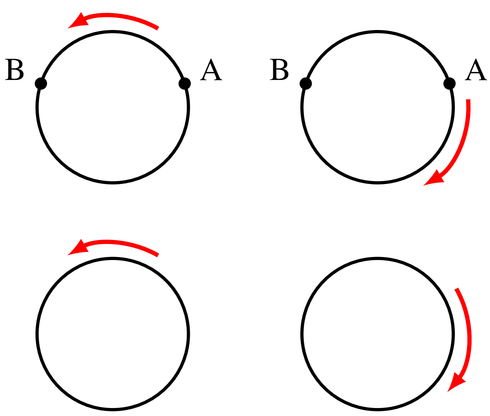
Mard eo :
muz $(\widehat{BAC})$ = muz $(\widehat{BC}) = \theta$ rad, hed ar warenn $\widehat{BC}$ zo : hed $(\widehat{BC}) = \theta R$.

E se, mard eo $R = 1$, an niver θ zo war un dro muzul ar warenn ha hed ar warenn $\widehat{BC}$.

Notenn :

Pa vez anv a "korn" pe "gwarenn" e c'houlakaer "mentoniel". Evit o muzulioù e lavarer "kornskarad" ha "gwarad".

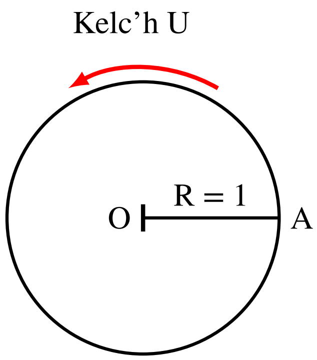
187 GWARENNOÙ DURC'HAET



Kelc'h durc'haet :

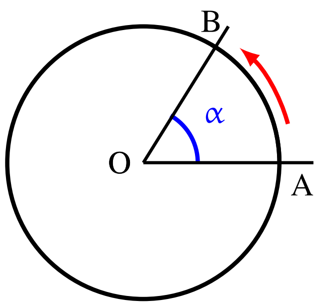
Daou boent A ha B o vezañ roet, n'eus nemet daou du evit mont eus A da B war ar c'helc'h. Durc'haat ur c'helc'h eo diuz unan eus an daou du-se ha diferañ ez eo an tu muiel, egile o vezañ an tu leiel. En dric'hornventouriezh e tibaber an tu muiel (lavarout a reer c'hoazh an tu dihell) an tu o vont a zehou da gleiz evit un den loet e kreiz ar c'helc'h hag o welout ar warenn dirazañ : an tu tric'hornventouriel eo. An tu leiel a vez anvet an tu sou ivez.

• Graet e vez kelc'h tric'hornventouriel eus ur c'helc'h durc'haet, muzul e skin o vezañ par d'an unanenn : R = 1, dibabet warnañ ur poent orin evit ar gwarennoù. Alies e vez anvet U ar c'helc'h-se.



• Daou boent A ha B a'r c'helc'h U a savel div warenn ventoniel $\widehat{AB}$ ha daou gorn mentoniel beget en O. O tesellout da skouer ar vihanañ warenn $\widehat{AB}$ ez eus bet divizet muzuliañ dre an un unanennoù ar c'horn $\widehat{AOB}$ hag ar warenn $\widehat{AB}$ etredalc'het gant ar c'horn-se.

$$\text{muz}\,(\widehat{AOB}) = \text{muz}\,(\widehat{AB}) = \alpha \;\; \text{(rad)}.$$



~ Empentomp ur poent M o loc'hañ eus A davet B war an tu muiel. Un anvevennad treugoù zo : a-sav e c'hell chom pa dremen ar wech kentañ e B, pe neuze kenderc'hel da dreiñ a chom a-sav an eil, an trede, pe ar k-vet gwech ma tremen e B. Heñvel dra evit an tu leiel. An holl warennoù redet evel-se a ampar un teskad a vo anvet gwarenn durc'haet AB a noter $\overrightarrow{AB}$. Pep gwarenn dibarek meneget amañ diaraok zo un derc'haller eus $\overrightarrow{AB}$ a c'haller kevrediñ outañ ur gwerc'hel a vo he muzul e radianoù. A-douez holl vuzulioù α_1, α_2, … , α_k ar gwarennoù-se, unan anezho hepken zo beziat en entremez $]-\pi, \pi]$. Ar werzhad α_0-se a anver pennvuzul ar warenn durc'haet $\overrightarrow{AB}$.

• War-benn digemmañ a-douez ar gwarennoù hollekaet ar re redet war an tu muiel diouzh ar re redet war an tu leiel ez ardaoler an arouez + ouzh ar re gentañ hag an arouez − ouzh an eil re.

<u>M a ya eus A davet B war an tu muiel</u> :

~ Kentañ kejadenn M gant B : muzul= α

~ Eil kejadenn M e B : muzul= $\alpha + 2\pi$

~ k-vet kejadenn M e B : muzul= $\alpha + k(2\pi)$:

$$\text{muz }(\overrightarrow{AB}) = \alpha + k(2\pi),\ k \text{ naturel muiel pe vannel.}$$

<u>M a ya eus A davet B war an tu leiel</u> :

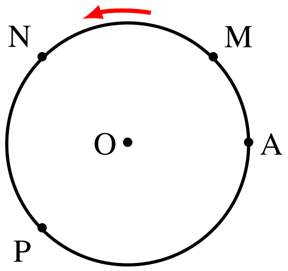
~ P'en em gav M ar wech kentañ e B, gwerzh dizave muzul ar warenn zo $2\pi - \alpha$, redet war an tu leiel. He muzul zo neuze $-(2\pi - \alpha) = \alpha - 2\pi$.

~ War-lerc'h k tro war an tu leiel e vo muzul ar warenn :
muz $(\overrightarrow{AB}) = \alpha - k(2\pi)$, k naturel muiel, pe c'hoazh :
muz $(\overrightarrow{AB}) = \alpha + k(2\pi)$, k o vezañ un naturel leiel strizh.
O tastum an daou skrivad en unan e teu : ur warenn durc'haet zo dezhi un anvevennad muzulioù :

$$\boxed{\text{muz }(\overrightarrow{AB}) = \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

• Bezet daou zerc'haller eus ar c'horn durc'haet $(\overrightarrow{AB})$ α_1 hag α_2 o muzulioù ketep. Neuze ez eus k_1 ha k_2 naturelion daveel, hevelep ma'z eo $\alpha_1 = \alpha + k_1 \cdot 2\pi$ hag $\alpha_2 = \alpha + k_2 \cdot 2\pi$. Neuze e teu $\alpha_2 - \alpha_1 = (k_2 - k_1) \cdot 2\pi$ ha da heul $\alpha_2 = \alpha_1 + k \cdot 2\pi,\ k,\ \mathbb{Z}$ Alies e kaver $\alpha_2 = \alpha_1\ (2\pi)$, pe $\alpha_2 = \alpha_1 \text{ mod}(2\pi)$.

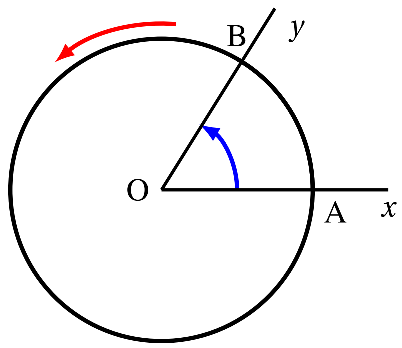
• **Daveadur Chasles :**



~ $\text{muz}\,\overrightarrow{MN} + \text{muz}\,\overrightarrow{NP} + \text{muz}\,\overrightarrow{PM} = 0 \quad (2\pi)$

~ $\text{muz}\,\overrightarrow{MP} = \text{muz}\,\overrightarrow{NP} - \text{muz}\,\overrightarrow{NM} = 0 \quad (2\pi)$

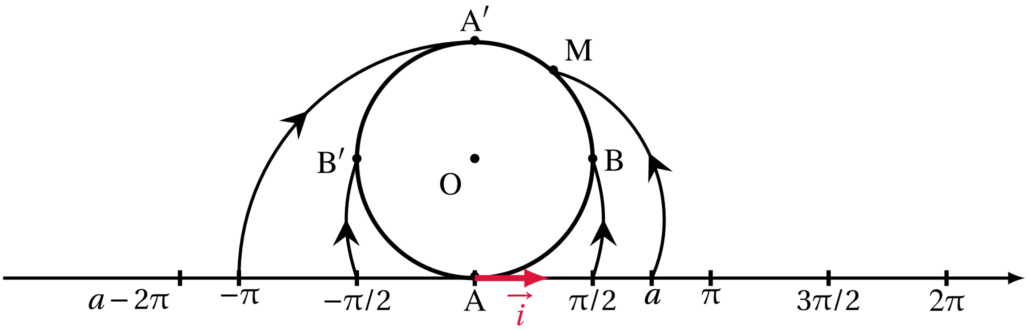
188 KORNIOÙ DURC'HAET



Pep gwarenn o terc'hallañ ar warenn durc'haet $\overrightarrow{\overset{\frown}{AB}}$ zo ur warenn hollekaet, he muzul a c'hell bezañ brasoc'h eget 2π rad. Ouzh pep gwarenn hollekaet e kevreder ar c'horn mentoniel hollekaet a c'hell ivez bezañ brasoc'h eget 2π rad ; an holl warennoù kevredet-se a ampar un teskad anvet "korn durc'haet", notet $(\widehat{Ox, Oy})$ ma'z eo $[Ox)$ al ledeeunenn a orin O oc'h enderc'hel A ha $[Oy)$ al ledeeunenn a orin O oc'h enderc'hel B. Muzul ar gwarennoù ha muzulioù ar c'hornioù mentoniel hollekaet o vezañ an hevelep re, nep perzh ar gwarennoù durc'haet zo talvoudek evit ar c'hornioù durc'haet.

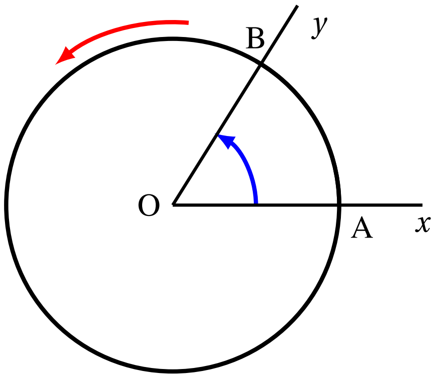
• Arloadur teskad ar gwerc'helion war ar c'helc'h tric'hornventouriel :

Teskad ar gwerc'helion $\mathbb{R}$ zo derc'hennet diwar-bouez an eeunenn D dezhi an dealf $(A, \vec{i})$, a-spin d'ar c'helc'h tric'hornventouriel U.



Pep poent eus D a arloer war ur poent eus ar c'helc'h hag unan hepken. Un arloadur eus $\mathbb{R}$ war U a saveler neuze. $a \mapsto$ M, M zo delvad ar gwerc'hel a dre an arloadur-se. M zo ivez delvad $a + 2\pi$, $a - 2\pi$ hag ent hollek $a + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ned eo ket arsaezhat an arloadur-se enta. Ledenn grommregek M war ar c'helc'h U a orin A a reer eus pep hini a'r gwerc'helion $a + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

• Korn durc'haet div ledeeunenn genorin :



Ur c'horn mentoniel $\widehat{xOy}$ o vezañ roet en en durc'haer o tibab un tu orin, $[Ox)$ da skouer, hag un tu dibenn, $[Oy)$.

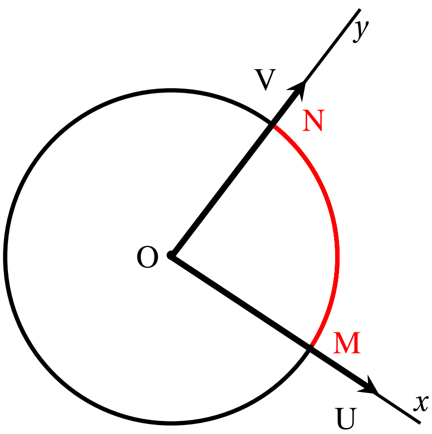
Notañ a reer : $(\widehat{Ox,\ Oy})$. An un muzul hag ar warenn $\overset{\frown}{\overrightarrow{AB}}$ zo dezhañ :

muz $(\widehat{Ox, Oy}) = \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Pe : muz $(\widehat{Ox, Oy}) = \alpha\ (2\pi)$,

2π o vezañ moll ar c'hewez ha $k \cdot 2\pi$ an ansavelad.

• Korn durc'haet div sturiadell :

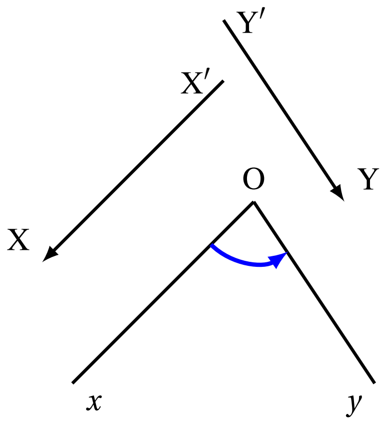


Savelañ a reer ar c'horn durc'haet $(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}})$, diwar-bouez daou zaouboent (O, U) hag (O, V), hevelep ma'z eo $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ hag $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$. Ar c'horn $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ zo dre zespizadur kevatal da hini al ledeeunennoù $[Ox) = [OU)$ hag $[Oy) = [OV)$.

Degouezhout a reer c'hoazh gant ar warenn etredalc'het $\overset{\frown}{\overrightarrow{MN}}$ keñverek eus ur c'helc'h durc'haet kreizet en O. Mard eo α ur muzul eus ar warenn-se e radianoù e teu :

$$\text{muz } (\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}) = \alpha + k \cdot 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

• Korn durc'haet daou ahel :



Savelañ a reer korn durc'haet $(\widehat{\overrightarrow{\text{X'X}},\overrightarrow{\text{Y'Y}}})$ daou ahel (X'X) hag (Y'Y), o tresañ eus ur poent O div ledeeunenn [Ox) ha [Oy), dezho a-getep an un roud hag an un tu hag an daou ahel-se.

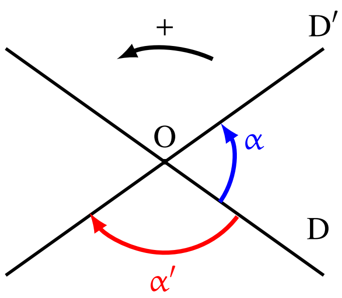
$$\text{muz }(\widehat{\overrightarrow{\text{X'X}},\overrightarrow{\text{Y'Y}}}) = \text{muz }(\widehat{\text{O}x,\text{O}y}).$$

Mard eo α ur muzul e radianoù eus ar c'horn-se e teu :

$$\text{muz }(\widehat{\overrightarrow{\text{X'X}},\overrightarrow{\text{Y'Y}}}) = \alpha + k\cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

<u>Evezhiadenn</u> : Stadañ a reer ez eo heñvel ober anv eus korn durc'haet div ledeeunenn pe div sturiadell pe daou ahel. Despizañ a c'haller an holl gornioù-se dre : kornioù durc'haet daou roud durc'haet, eleze kornioù durc'haet daou sturiad.

• Korn durc'haet div eeunenn :



Bezet div eeunenn andurc'haet D ha D′. Graet e vez korn durc'haet $(\widehat{\text{D},\text{D}'})$ eus n'eus forzh petore korn ahel savelet dre zurc'haat en tidek pep eeunenn.

O vezañ ma'z eo kemmañ durc'hadur un eeunenn an un tra ha he c'hweldreiñ eus π radian, ned eo savelet muzul ar c'horn $(\widehat{\text{D},\text{D}'})$ nemet war-bouez $k\cdot\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. Mard eo α unan eus muzulioù $(\widehat{\text{D},\text{D}'})$ ez eo roet an holl vuzulioù dre ar parder da heul :

$$\text{muz }(\widehat{\text{D},\text{D}'}) = \alpha + k\cdot\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

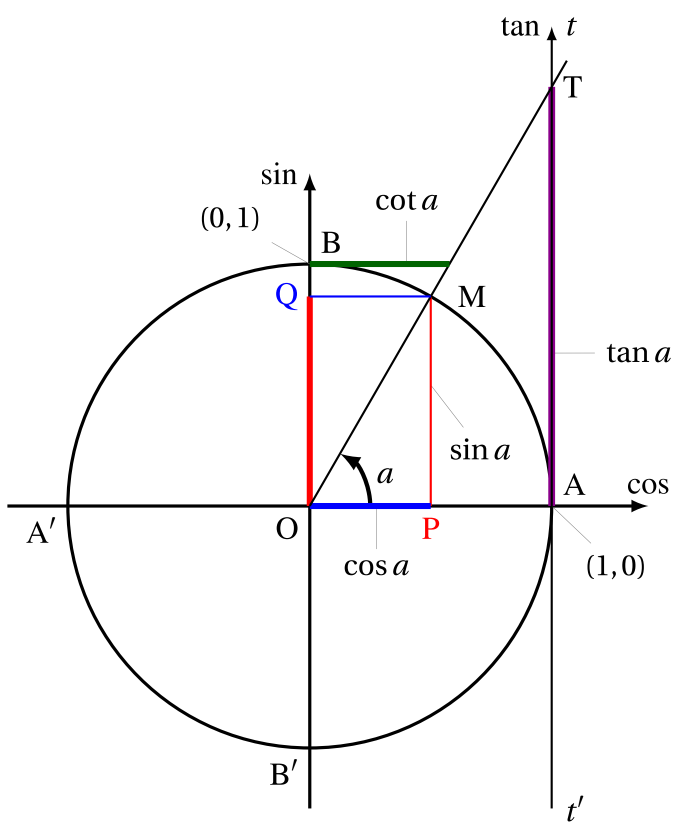
Mard eo kenskej D ha D’ en O e c’haller lavarout en deus $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$ da vuzul unan diforzh eus ar c’hornioù c’hwelañ en-dro da O evit arloañ D war D’.

~ Bezet $\vec{u}$ ur sturiadell roud eus D, $\vec{u}'$ ur sturiadell roud eus D’. Nep muzul dibarek eus $\widehat{(\vec{u},\vec{u}')}$ zo ivez ur muzul dibarek eus $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$. Tu zo da gemer $-\vec{u}$ da sturiadell roud D. O tastum holl vuzulioù $\widehat{(\vec{u},\vec{u}')}$ hag holl vuzulioù $\widehat{(-\vec{u},\vec{u}')}$ hon eus holl vuzulioù $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$.
α hag α' zo daou vuzul eus $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$:

$\alpha' = \alpha - \pi$. Mard eo D ha D’ kenstur pe arun : muz $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = k\pi$.

189 KEVREIZHENNOÙ TRIC’HORNVENTOURIEL

• Ouzh ur gwerc’hel a e kevred ar c’hevreizhennoù tric’hornventouriel (anvet kevreizhennoù kelc’hel ivez) gwerc’helion all anvet : **kosinuz *a*, sinuz *a*, tangent *a*.**



~ Bezet ur gwerc'hel a ha M ar poent eus ar c'helc'h dezhañ a da ledenn grommregek (ur muzul eus ar warenn $\overset{\frown}{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}$ eo a). Ouzh ar c'helc'h tric'hornventouriel U e kevreder an dealf reizhreolel $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}})$ (B o vezañ ar poent $\pi/2$ e ledenn grommregek).

Serzhvannadoù M war (OA) hag (OB) zo ar poentoù P ha Q. En dealf dibabet ez eo $\overline{\mathrm{OA}}$ hag $\overline{\mathrm{OB}}$ daveennoù ar poent M.
Dodiñ a reer dre zespizadur :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos a &= \text{ledenn M } = \overline{\mathrm{OP}} \\ \sin a &= \text{hedenn M } = \overline{\mathrm{OQ}} \end{aligned}}$$

(a lenner : kosinuz a, sinuz a.)

~ An eeunenn durc'haet (OA) zo ahel ar c'hosinuzioù hag an eeunenn durc'haet (OB) zo ahel ar sinuzioù. Durc'haomp ar spinenn d'ar c'helc'h U en A diouzh tu ar sturiadell reolel $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (an un unanenn hag an daou ahel all). (OM) a skej an ahel (tt') er poent T (nemet e ve M e B pe e B$'$). Dodiñ a reer ivez :

$$\boxed{\tan a = \overline{\mathrm{AT}}}$$

$$\boxed{\cot a = \frac{1}{\tan a}, \text{ mard eo } \tan a \neq 0}$$

An tric'hornioù OAT hag OPM zo heñvelstalet ha da heul e c'haller dezren :

$$\boxed{\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}, \ a \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi}$$

~ Evit nep $a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{-1 \leqslant \cos a \leqslant 1 \ ; \ -1 \leqslant \sin a \leqslant 1 \ ; \ \cos^2 a + \sin^2 a = 1}$$

~ Evit $\cos^2 a \neq 0$:

$$\boxed{1+\tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}}$$

• Trovezhiek eo ar c'hevreizhennoù cos, sin, an drovezh o vezañ 2π (lavaret e vez : 2π-trovezhiek), rak :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(a+k\cdot 2\pi) = \cos a & \\ & k \in \mathbb{Z} \\ \sin(a+k\cdot 2\pi) = \sin a & \end{array}}$$

• Trovezhiek eo ar gevreizhenn tan, an drovezh o vezañ π. Lavaret e vez ez eo π-trovezhiek, rak :

$$\boxed{\tan(a+k.\pi) = \tan a, \quad a \neq \frac{\pi}{2}+k.\pi}$$

190 GWARENNOÙ KEVREDET

• Bezet ur warenn $\overset{\frown}{AB}$. Graet e vez gwarennoù kevredet ouzh ar warenn-se eus ar gwarennoù dezho A da orin ha da zibenn :

a) kemparzhad M er c'hemparzh diouzh an ahel Ox (gwarennoù gourzharouez) ;

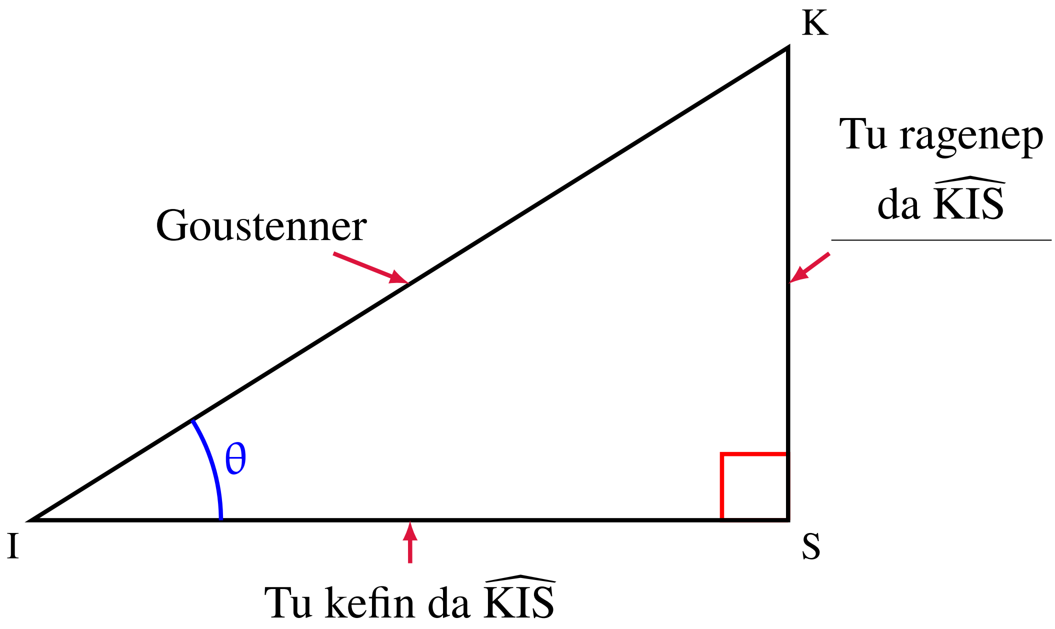
b) kemparzhad M er c'hemparzh diouzh an ahel Oy (gwarennoù skladus);

c) kemparzhad M er c'hemparzh agreiz O ;

d) kemparzhad M er c'hemparzh diouzh an ahel Δ, Δ kreizkornenn $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$ (gwarennoù serzhus).

$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(-a) = -\sin a$	$\tan(-a) = -\tan a$	$\cot(-a) = -\cot a$
$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\cot(\pi + a) = \cot a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

191 DAVEADURIOÙ TRIC’HORNVENTOURIEL EN UN TRIC’HORN SERZH



$$\cos\theta = \frac{\text{tu kefin da } \theta}{\text{goustenner}} \;;\; \sin\theta = \frac{\text{tu ragenep da } \theta}{\text{goustenner}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{tu ragenep da } \theta}{\text{tu kefin da } \theta}$$

192 ATALADOÙ TRIC’HORNVENTOURIEL (ur gevreizhenn gelc’hel hepken)

• Ur gwerc’hel x o vezañ roet e c’haller jediñ $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$; a-geveskemm, o vezañ roet $\cos x$ pe $\sin x$ pe $\tan x$ e klasker savelañ ar c’hentorad(où) ez int an delvadoù anezho.

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \alpha \ [2\pi] \\ \text{pe} \\ x = -\alpha \ [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \alpha \ [2\pi] \\ \text{pe} \\ x = \pi - \alpha \ [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{c}\tan x = \tan\alpha \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right\} \Longleftrightarrow x = \alpha\ [\pi]$$

• Diskoulmañ $\cos x = a$, a gwerc'hel roet :

~ $a < -1$ pe $a > 1$: n'eus gwrizienn ebet d'an atalad.

~ $a = -1$, $\cos\pi = -1$: an atalad a zeu da vezañ $\cos x = \cos\pi$, $x = \pi + k \cdot 2\pi$.

~ $-1 < a < 1$: en entremez $]0, \pi[$ ez eus ur gwerc'hel α hepken, hevelep ma'z eo $\cos\alpha = a$; neuze e teu $\cos x = \cos\alpha$. Gwelout amañ diaraok.

~ $a = 1$, $\cos x = 1 = \cos 0$: $x = k \cdot 2\pi$.

• Diskoulmañ $\sin x = a$, a gwerc'hel roet :

~ $a < -1$ pe $a > 1$: n'eus gwrizienn ebet d'an atalad.

~ $a = -1$: $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$.

~ $-1 < a < 1$: en entremez $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ ez eus ur gwerc'hel α hepken, hevelep ma'z eo $\sin\alpha = a$; neuze e teu $\sin x = \sin\alpha$. Gwelout amañ diaraok.

~ $a = 1$: $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$.

• Diskoulmañ $\tan x = a$, a gwerc'hel roet :

$x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$. War ahel an tangentoù ez eus ur poent hepken, hevelep ma'z eo $\overline{\mathrm{AT}} = a$. An eeunenn (OT) a skej ar c'helc'h U en M ha M′ ; bezet M delvad ar gwerc'hel α en entremez $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Unel eo α ha neuze $\tan\alpha = a$. Alese e tisoc'her gant $\tan x = \tan\alpha$.

193 REOLLUNIOÙ SAMMAÑ

$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$	$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$	$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
$a\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\ ;\ b\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;$ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\left(a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right)$	$a\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\ ;\ b\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;$ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$ $\left(a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right)$

194 REOLLUNIOÙ DAOUGEMENTIÑ HA LINENNEKAAT

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$	$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$
$\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a$	$\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$
$\left.\begin{array}{l} a\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \\ 2a\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\end{array}\right\}\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$	$t=\tan\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ $\tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}\ ;\ \cos a=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\ ;$ $\sin a=\dfrac{2t}{1+t^2}$

195 REOLLUNIOÙ TREUZFURMIÑ

• Spletusoc'h e vez a-wechoù kaout ur bomm tric'hornventouriel e rezh ul liesâd peri-adoù, kentoc'h eget ur sammad pe un diforc'h, da skouer evit studiañ arouez ar bomm. A-geveskemm, pa vez kel a gaout ur gentegenn ez eo amsavoc'h kaout ur sammad pe un diforc'h ha gwell eo linennekaat ar bomm.

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$	$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$
$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$	

196 DIATALADOÙ TRIC'HORNVENTOURIEL

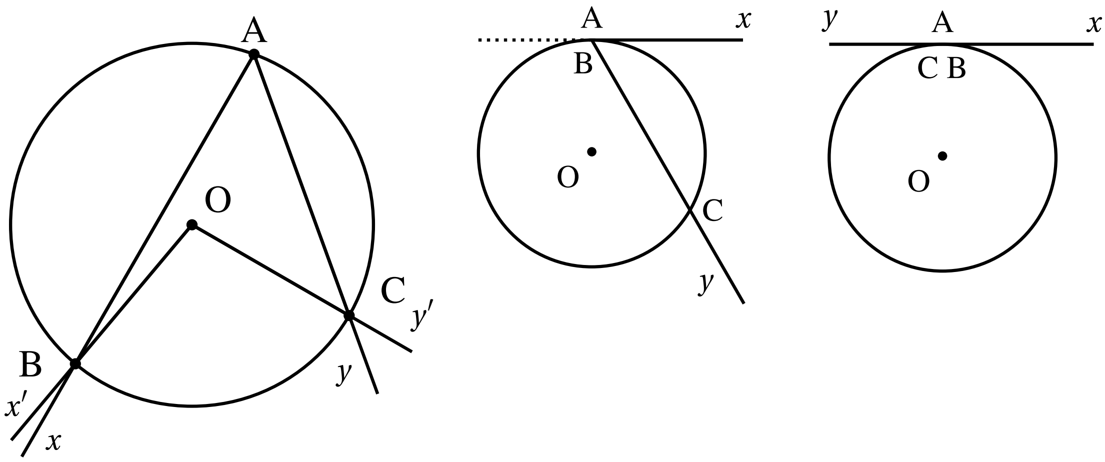
• Skouer 1 : Diskoulmañ $\cos x > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Teskad an diskoulmoù zo kembodadur an entremezioù :

$$\left]-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right[\quad k\in\mathbb{Z}.$$

• Skouer 2 : $2\sin x - 1 > 0,\ 0 < x < 2\pi$. Teskad an diskoulmoù zo an entremez $\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[$.

197 KORN KAEET HA KORN KREIZET ANDURC'HAET

• Bezet ar gennad korn $\left[\widehat{x\mathrm{A}y}\right]$. Lavarout a reer ez eo kaeet er c'helc'h kreizet en O mard emañ e veg war ar c'helc'h hag e duioù o skejañ ar c'helc'h pe o spinañ ar c'helc'h. Ur gennad korn kreizet en ur c'helc'h zo e veg e kreiz ar c'helc'h. Lavarout a reer ez etredalc'h ar warenn a zo en e ziabarzh, eleze ar warenn a zo o c'henniñ ar gennad, balegek pe askek, pe sklat. O vezañ ma'z eus eus ur gennad korn un derc'haller eus ur c'horn, eleze dere kevatalder un teskad daouac'hoù ledeeunennoù kenorin, e ve tu da empentiñ seurt kefluniad evit nep elfenn a'n dere kevatalder. E se e vo lavaret neuze "korn kaeet" ha "korn kreizet" war-benn skañvaat ar prezeg.



Ar warenn $\widehat{BC}$ a lavarer etredalc'het gant ar c'horn $\widehat{xAy}$. Ar c'horn kreizet $\widehat{x'Oy'}$ a etredalc'h ivez an un gwarenn $\widehat{BC}$. Lavarout a reer ez eo ar c'horn kreizet a-geñver gant ar c'horn kaeet. E gorn kreizet keñverek eo. Ar c'horn kreizet-se a c'hell bezañ balegek, sklat pe askek hervez ma'z eo ar warenn etredalc'het bihanoc'h eget, par da pe vrasoc'h eget un hantergelc'h. Evit ar c'horn kaeet ne c'hell bezañ nemet askek.

~ Mard eo an eeunenn (Ax) a-spin d'ar c'helc'h, ar poentoù B hag A zo en arun.

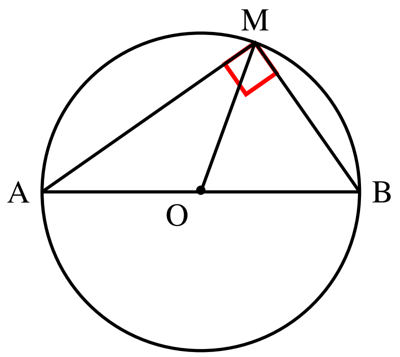
~ Mard eo an eeunennoù (Ax) hag (Ay) a-spin o daou d'ar c'helc'h en A e c'haller c'hoazh desellout ar c'horn $\widehat{xAy}$ evel kaeet er c'helc'h : ar warenn $\widehat{BC}$ etredalc'het zo neuze ar c'helc'h en e bezh. Ar poentoù A, B, C zo en arun.

Delakadenn : Muzul ur c'horn kaeet zo an hanter eus muzul e gorn kreizet keñverek : muz $(\widehat{xAy}) = \frac{1}{2}$ muz $(\widehat{x'Ay'})$

O vezañ ma'z eo muzuliet ar c'horn kreizet $\widehat{x'\mathrm{A}y'}$ hag ar warenn etredalc'het $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ gant an un niver e c'haller lavarout : kenvuzul eo ar c'horn kaeet da hanter ar warenn etredalc'het :

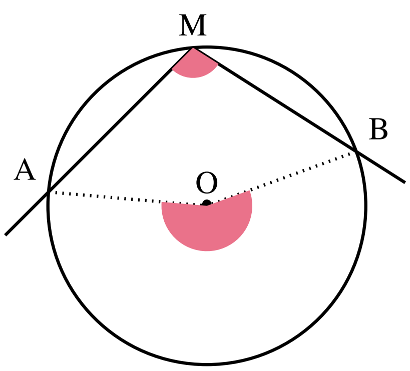
$$\text{muz}\left(\widehat{x\mathrm{A}y}\right) = \frac{1}{2}\,\text{muz}\,\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$$

• Dianlenadoù :



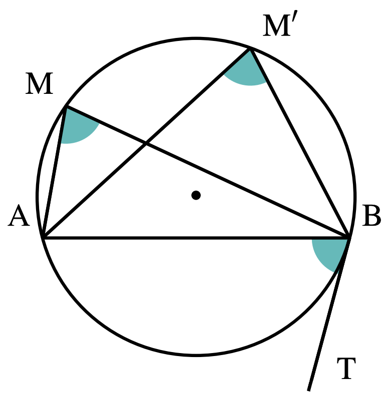
• Mard eo serzh ar c'horn kaeet $\widehat{\mathrm{AMB}}$ ez eo sklat ar c'horn kreizet keñverek $\widehat{\mathrm{AOB}}$. Ar greiztuenn [MO] diouzh beg korn serzh an tric'horn serzh AMB zo he hed par d'an hanter eus hini ar goustenner. M zo al lec'h mentoniel, hevelep ma'z eo :

$$\text{muz}\,\widehat{\mathrm{AMB}} = \frac{\pi}{2}\ \text{rad.}$$



• Mard eo lemm ar c'horn kaeet $\widehat{\mathrm{AMB}}$ (eleze e vuzul bihanoc'h eget 90°) ez eo balegek ar c'horn kreizet keñverek $\widehat{\mathrm{AOB}}$ (bihanoc'h eget 180°).

Mard eo tougn ar c'horn kaeet $\widehat{\mathrm{AMB}}$ (eleze e vuzul etre 90° ha 180°) ez eo askek ar c'horn kreizet keñverek (brasoc'h eget 180°).



• Gennadoù korn kaeet en un kelc'h oc'h etrederc'hel an un gwarenn zo derc'hallerioù an un korn. Pe, klaseloc'h :

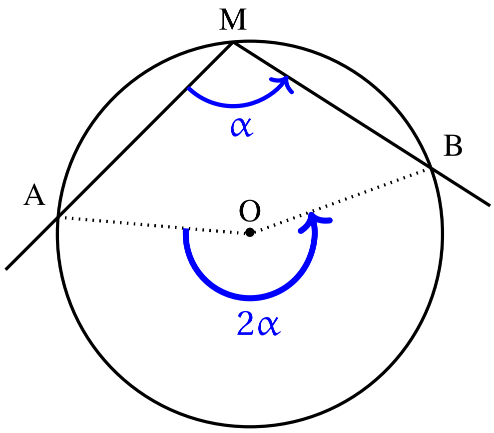
Par eo ar c'hornioù kaeet en un kelc'h oc'h etrederc'hel an un gwarenn.

198 KORN KAEET DURC'HAET

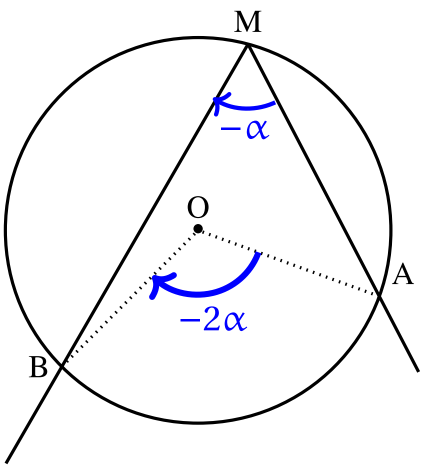
• Despizadur : Mard eo ar c'horn $\widehat{AMB}$ kaeet en ur c'helc'h e lavarer ivez ez eo ar c'horn durc'haet $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ kaeet er c'helc'h hag ez etredalc'h ar warenn durc'haet $\overset{\frown}{AB}$. A-geñver gantañ eman ar c'horn kreizet durc'haet $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ (ar c'horn kreizet keñverek).

• Perzhioù muzulioù ar c'horn kaeet durc'haet :

Bezet α, muzul $\widehat{AMB}$ korn kaeet en ur c'helc'h kreizet en O oc'h etrederc'hel ar warenn $\overset{\frown}{AB}$. Bez' hon eus neuze : $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ (korn balegek). Ar c'horn kreizet kevredet zo $\widehat{AOB} = 2\alpha$. N'eus nemet daou zegouezh evit ar c'horn durc'haet $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$:



~ pe ez eo α ur muzul eus $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ ha neuze ez eo 2α ur muzul eus $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$;



~ pe ez eo $-\alpha$ a zo ur muzul eus $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ ha neuze ez eo -2α ur muzul eus $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

En daou zegouezh, mard eo a' "penn-vuzul" ar c'horn kaeet durc'haet, ez eo $2a'$ ur muzul eus ar c'horn kreizet kevredet.

Dezren a reer enta :

Mard eo a ur muzul diforzh a'r c'horn kaeet durc'haet ez eo $2a$ ur muzul a'r c'horn kreizet durc'haet kevredet. Evit an holl gefluniadoù ez eus :

$$\text{muz } (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}}) = 2 \cdot \text{muz } (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}}) + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Evezhiadenn :

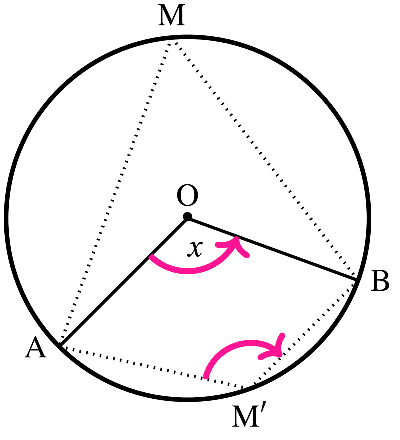
Ar parder amañ diaraok a ro muzul x ar c'horn kreizet, pa anavezer muzul a ar c'horn kaeet : $x = 2a + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ret eo diwall evit jediñ a :

$$a = \frac{x}{2} - k.\pi.$$

Mard eo x ur muzul eus ar c'horn kreizet $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}})$, e c'hell $\frac{x}{2}$ na vezañ ur muzul eus ar c'horn kaeet a etredalc'h an un gwarenn durc'haet $\overset{\frown}{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$.

Desellout al lun amañ dindan da skouer : $x = 120°$; $\frac{x}{2} = 60°$ zo ur muzul eus $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}})$, hogen ned eo ket ur muzul eus $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M'A}},\overrightarrow{\mathrm{M'B}}})$.

E gwir emañ : muz $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M'A}},\overrightarrow{\mathrm{M'B}}}) = -120° + k \cdot 360$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ur muzul muiel eus $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{M'A}},\overrightarrow{\mathrm{M'B}}})$ zo $360 - 120 = 240°$ (muzul ar c'horn askek $\widehat{\mathrm{AM'B}}$).



Evezhiadenn :

Pa vez kel a gorn kaeet durc'haet, ned eo ket a "gorn balegek pe askek"; n'eus mui ster ebet gant "diabarzh ar c'horn".

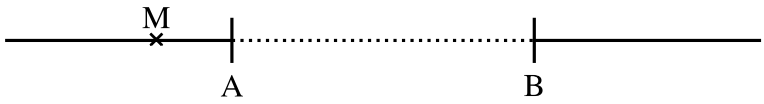
199 GWARENN GEITGAVAEL UR C'HORN

• Gwarenn geitgavael ur c'horn durc'haet :

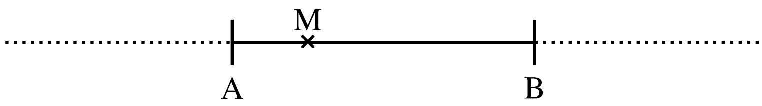
Bezet ur regenn eeun [AB] hag ur c'horn durc'haet $\widehat{\alpha}$. Klaskomp teskad ar poentoù M, hevelep ma'z eo :

$$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha} \ldots\ldots (1)$$

1. Mard eo muz $\widehat{\alpha} = k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ez eo gwiriet ar parder (1) mar ha nemet mard eo al ledeeunennoù [MA) ha [MB) en arun. An teskad klasket zo parzh an eeunenn (AB) hep ar regenn [AB] :

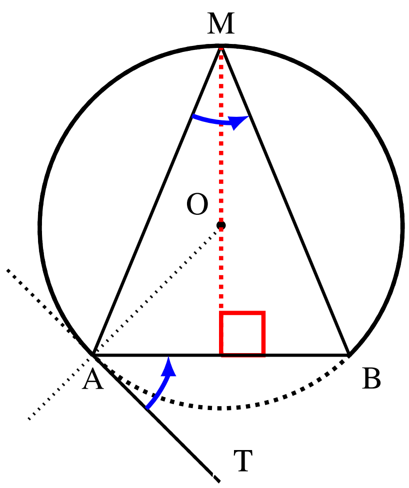


2. Mard eo muz $\widehat{\alpha} = \pi + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$ ez eo gwiriet (1) mar ha nemet mard eo al ledeeunennoù [MA) ha [MB) kemparzhek e-keñver M. An teskad klasket zo neuze ar regenn [AB], hep ar poentoù A ha B :



3. Ma n'eo $\widehat{\alpha}$ na sklat na mannel, bezet ur poent M o wiriañ ar parder (1). N'emañ ket war an eeunenn (AB).

~ Desellomp ar c'helc'h amgaeet ouzh an tric'horn (MAB).



Ar c'horn $\widehat{AMB}$ zo ur c'horn kaeet er c'helc'h-se.Tennomp al ledeeunenn [AT) a-spin en A d'ar c'helc'h, hevelep ma'z eo

$$\widehat{TAB} = \widehat{AMB}$$

Bez' hon eus neuze :

$$(\widehat{\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \widehat{\alpha}$$

Da heul, kreiz O ar c'helc'h (AMB) kenskejadur ar serzhenn en A da (AT) ha kreizserzhenn [AB] zo dizalc'h diouzh M.

Ar c'helc'h (AMB) o vezañ dizalc'h diouzh ar poent M, nep poent eus an teskad klasket (al lec'h mentoniel) zo war ar c'helc'h-se. A-geveskemm, nep poent eus ar c'helc'h-se ne wir ket ar parder (1). N'eus nemet ar poentoù eus ar warenn $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ oc'h enderc'hel M a zo bastus.

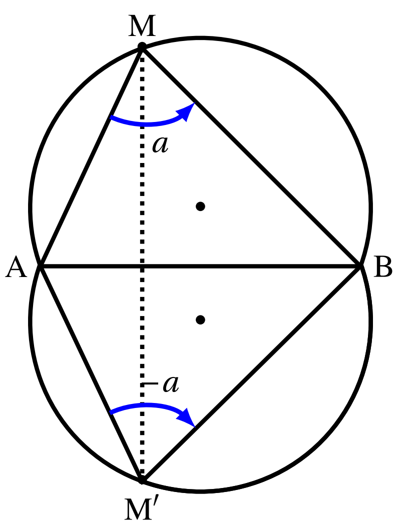
Neuze e c'haller dezren :

1. Lec'h mentoniel (teskad) ar poentoù dezho ur gavael $\widehat{\alpha}$ war [AB], eleze hevelep ma'z eo $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}}) = \widehat{\alpha}$, zo ur warenn gelc'h $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ anvet "gwarenn geitgavael" $\widehat{\alpha}$ e-keñver an daouboent (A, B). Keitgavaelenn a reer eus lec'h mentoniel ar poentoù dezho an un gavael war ur regenn roet. (E pep rikted n'emañ ket ar poentoù A ha B er warenn-se).

2. Mard eo a ur muzul eus $\widehat{\alpha}$, e lavarer ivez ez eo $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ "gwarenn geitgavael" a. Merkomp ez eo ar regenn [AB] tant d'ar warenn geitgavael.

• Gwarenn geitgavael ur c'horn andurc'haet :

Despizadur : Bezet a muzul ur c'horn balegek, hevelep ma'z eo $0 < a < \pi$ hag [AB] ur regenn eeun (A ha B anarun). Mard eo ar poent M hevelep ma'z eo $\widehat{\mathrm{AMB}} = a$ e lavarer en deus ar poent M ur gavael a war ar regenn [AB].



~ Goût a ouzer ez eo teskad ar poentoù M, hevelep m'en deus ar c'horn durc'haet $(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})$ ar muzul a, gwarenn geitgavael a, eleze $\overset{\frown}{\mathrm{AMB}}$.

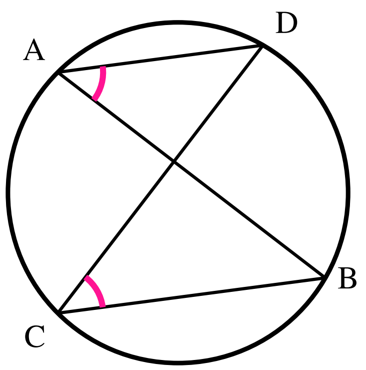
~ Teskad ar poentoù M′, hevelep m'en deus $(\overrightarrow{\mathrm{M'A}},\overrightarrow{\mathrm{M'B}})$ ar muzul $(-a)$ zo gwarenn geitgavael $(-a)$. Mard eo M′ kemparzhek da M e-keñver (AB), emañ M′ war ar geitgavaelenn-se.

Ar warenn geitgavael-se zo neuze $\widehat{AM'B}$, kemparzhad $\widehat{AMB}$ e-keñver an eeunenn (AB). Evit pep M′ a'r warenn-se ez eus neuze $\widehat{AM'B} = a$.

~ Dezren a reomp neuze : lec'h mentoniel ar poentoù M, hevelep ma'z eo :
$\widehat{AMB} = a$ (dezho ar gavael a war ar regenn [AB]), zo amparet gant div warenn gelc'h kemparzhek e-keñver (AB). Pep hini eus an div warenn-se a anver "gwarenn geitgavael" ar c'horn a war ar regenn [AB].

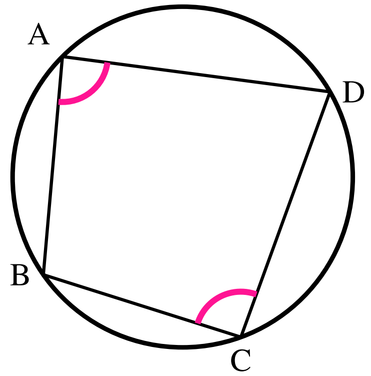
200 PEVARC'HORN KAEADUS

• Mard emañ holl vegoù ul lieskorn war ur c'helc'h e lavarer ez eo ar c'helc'h amgaeet ouzh al lieskorn hag al lieskorn kaeet er c'helc'h.



Delakadenn : Bezañ ur pevarc'horn il-groaziek kaeadus en ur c'helc'h a gevempleg parder daou gorn ragenep anezhañ.

(Ur pevarc'horn argevek anilgroaziek ned eo nepred kaeadus en ur c'helc'h)



Delakadenn : Bezañ ur pevarc'horn argeinek kaeadus a gevempleg ez eo skladus e gornioù ragenep.

Evezhiadenn : Ur pevarc'horn argeinek pe il-groaziek dezhañ daou gorn ragenep serzh zo kaeadus.

STUDI AR C’HEVREIZHENNOÙ NIVEREL

201 HARZOÙ AR C'HEVREIZHENNOÙ NIVEREL

• Evit pep elfenn x eus savelva $\mathscr{D}f$ ur gevreizhenn f e c'haller jediñ he delvad $f(x)$. Tu zo bremañ d'en em c'houlenn petore monedigezh zo gant $f(x)$ pa nesa an argemmenn x ouzh bonnoù ar savelva.

• **Harz bevennek en ur poent $x_0 \in \mathbb{R}$:**

Bezet ur gwerc'hel x_0 hag f ur gevreizhenn, he savelva o wiriañ an amveziad-mañ :

~ Bez' ez eus un entremez I digor oc'h enderc'hel x_0, hevelep ma'z eo :

$I - \{x_0\} \subset \mathscr{D}f$. Lavarout a reer neuze e kengerc'h f etrezek un harz bevennek l en x_0 (pe, pa denn x war-du x_0) mar ha nemet mard eus eus ur gwerc'hel muiel strizh α a c'haller kevrediñ da nep gwerc'hel muiel strizh ε, gant an emplegadur-mañ :

$$\text{Mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha, \text{ neuze}$$
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Pe c'hoazh : da nep gwerc'hel muiel strizh ε e c'haller kevrediñ ur gwerc'hel muiel strizh α, gant an emplegadur-mañ :

$$\text{Mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } |x - x_0| < \alpha, \text{ neuze } \left|f(x) - l\right| < \varepsilon.$$
$$\text{Notañ a reer neuze : } \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

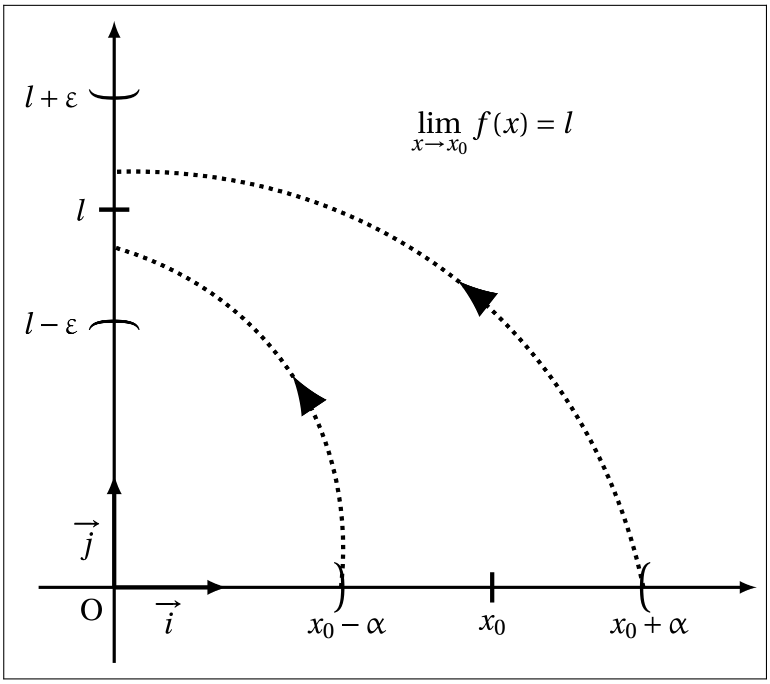
Evezhiadennoù :

~ Harz ar gevreizhenn f en x_0 a c'hell bezañ savelet, hep ma ve savelet f en x_0 dre ret.

~ Notañ ar c'hevemplegadur : $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha \Longleftrightarrow |x - x_0| < \alpha$.

~ A-zivout rolloù ketep α hag ε :

Da gentañ e tibaber un niver gwerc'hel ε, ken bihan ha ma venner ha da c'houde e klasker savelañ diwarnañ un α, war-benn kefleuniañ an emplegadur da heul : "Mard eo $x \in \mathscr{D}f$ ha mard eo $|x - x_0| < \alpha$, neuze $|f(x) - l| < \varepsilon$". Kement-se a dalvez : f zo dezhi un harz l en x_0 mmar galler tostaat $f(x)$ ouzh l, kement ha ma venner, eleze mmar kemerer x tost a-walc'h ouzh x_0. E se e jeder α a-gevreizh da ε hag e kemerer ar forc'had $|x - x_0|$ bihanoc'h eget α. A-benn ar fin, da dostaat $f(x)$ ouzh l ken tost ha ma venner e c'hoarier war an argemmenn x, ouzh he dibab en amezegiezh x_0.



Krennadur :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \begin{cases} \exists \mathrm{I} \text{ digor} : x_0 \in \mathrm{I} \,;\, \mathrm{I} - \{x_0\} \subset \mathscr{D}f \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \,;\, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \,; \\ (x \in \mathscr{D}f \text{ hag } |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon \end{cases}$$

• **Harz bevennek a-zehou en ur poent x_0 :**

Bezet x_0 ur gwerc'hel ha f ur gevreizhenn, he savelva o wiriañ an amveziad-mañ :

Bez' ez eus ur gwerc'hel muiel strizh a_1 hevelep ma'z eo $]x_0, x_0 + a_1[\ \subset \mathscr{D}f$.

Lavarout a reer e kengerc'h f en x_0 a-zehou (pe, pa denn x a-zehou war-du x_0) etrezek un harz bevennek l_1 mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh ε_1 ur gwerc'hel muiel strizh α_1, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\begin{aligned}\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 < x < x_0 + \alpha_1,\\ \text{neuze } l_1 - \varepsilon_1 < f(x) < l_1 + \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Lavarout a c'haller c'hoazh : ouzh pep gwerc'hel muiel strizh ε_1 e c'haller kevrediñ ur gwerc'hel muiel strizh α_1, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } 0 < x - x_0 < \alpha_1, \text{ neuze } \left|f(x) - l_1\right| < \varepsilon_1.$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ pe $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_1$ pe $\lim\limits_{x_0^+} = l_1$

• **Harz bevennek a-gleiz en ur poent x_0 :**

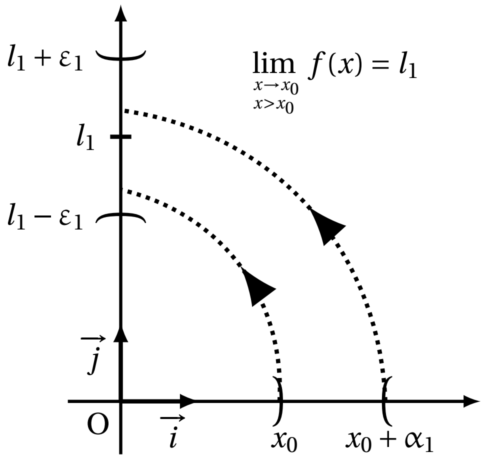
Bezet x_0 ur gwerc'hel hag f ur gevreizhenn, he savelva o wiriañ an amveziad-mañ : bez' ez eus ur gwerc'hel muiel strizh a_2, hevelep ma'z eo $]x_0 - a_2, x_0[\ \subset \mathscr{D}f$. Lavarout a reer e kengerc'h f en x_0 a-gleiz (pe, pa denn x a-gleiz war-du x_0) etrezek un harz bevennek l_2 mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh ε_2 ur gwerc'hel muiel strizh α_2, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

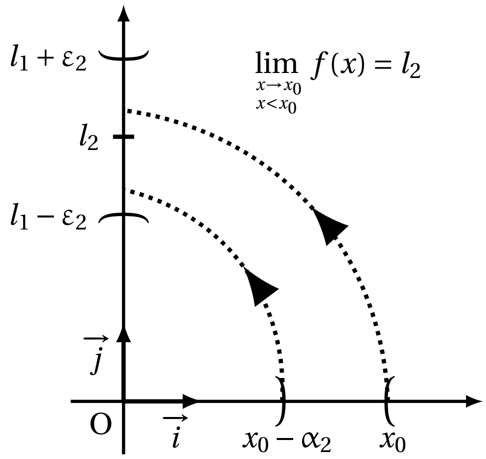
$$\begin{aligned}\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 - \alpha_2 < x < x_0,\\ \text{neuze } l_2 - \varepsilon_2 < f(x) < l_2 + \varepsilon_2.\end{aligned}$$

Lavarout a c'haller c'hoazh : ouzh pep gwerc'hel muiel strizh ε_2 e c'haller kevrediñ ur gwerc'hel muiel strizh α_2, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo : } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } -\alpha_2 < x - x_0 < 0, \text{ neuze } \left|f(x) - l_2\right| < \varepsilon_2.$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$ pe $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_2$ pe $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = l_2$





Krennadur :

~ Harz bevennek a-zehou :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists a_1 > 0 \ : \ ]x_0, x_0 + a_1[\ \subset \mathscr{D}f \\ \forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^{*+} \ ; \ \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^{*+} \ : \\ (x \in \mathscr{D}f \text{ hag } x_0 < x < x_0 + \alpha_1) \ \backslash \ \Rightarrow \ \backslash \ |f(x) - l_1| < \varepsilon_1 \end{cases}$$

~ Harz bevennek a-gleiz :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists a_2 > 0 \ : \ ]x_0 - a_2, x_0[\ \subset \mathscr{D}f \\ \forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^{*+} \ ; \ \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^{*+} \ : \\ (x \in \mathscr{D}f \text{ hag } x_0 - \alpha_2 < x < x_0) \ \backslash \ \Rightarrow \ \backslash \ |f(x) - l_2| < \varepsilon_2 \end{cases}$$

Delakadenn : Ur gevreizhenn f zo dezhi un harz en x_0 mmar kengerc'h f en x_0 etrezek an un harz a-zehou hag a-gleiz. Da neuze :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$$

• **Jedadurioù war an harzoù bevennek :**

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0} u = l\\ \text{ha}\\ \lim\limits_{x_0} v = l'\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0}(u+v) = l+l'\\ \lim\limits_{x_0}(u\times v) = l\times l'\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0} u = l\\ \alpha\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\lim\limits_{x_0}(\alpha u) = \alpha l\right.$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0} u = l\\ n\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\lim\limits_{x_0}(u^n) = l^n\right.$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0} u = l\\ \text{hag } l\geqslant 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\lim\limits_{x_0}\sqrt{u} = \sqrt{l}\right.$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0} v = l'\\ \text{hag } l'\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\lim\limits_{x_0}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{l'}\right.$	$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0} u = l\\ \lim\limits_{x_0} v = l'\\ \text{hag } l'\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\lim\limits_{x_0}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{l}{l'}\right.$

An delakadennoù diwezhañ-mañ a chom talvoudek evit an harzoù a-zehou hag a-gleiz, da skouer :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0^+} u = l\\ \text{ha}\\ \lim\limits_{x_0^+} v = l'\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x_0^+}(u+v) = l+l'\\ \lim\limits_{x_0^+}(u\times v) = l\times l'\end{array}\right.$$

• **Dedalvezadurioù :**

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} a = a}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \alpha_n x^n = \alpha_n x_0^n}$

Ur gevreizhenn bolinom zo dezhi un harz e pep $x_0\in\mathbb{R}$ ha

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Ur gevreizhenn gemezel $f = \dfrac{P}{Q}$ (P ha Q o vezañ polinomoù) zo dezhi un harz e pep x_0 na vannela ket he anver ($Q(x) \neq 0$), ha neuze :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \ (x_0 \in \mathscr{D}f).$$

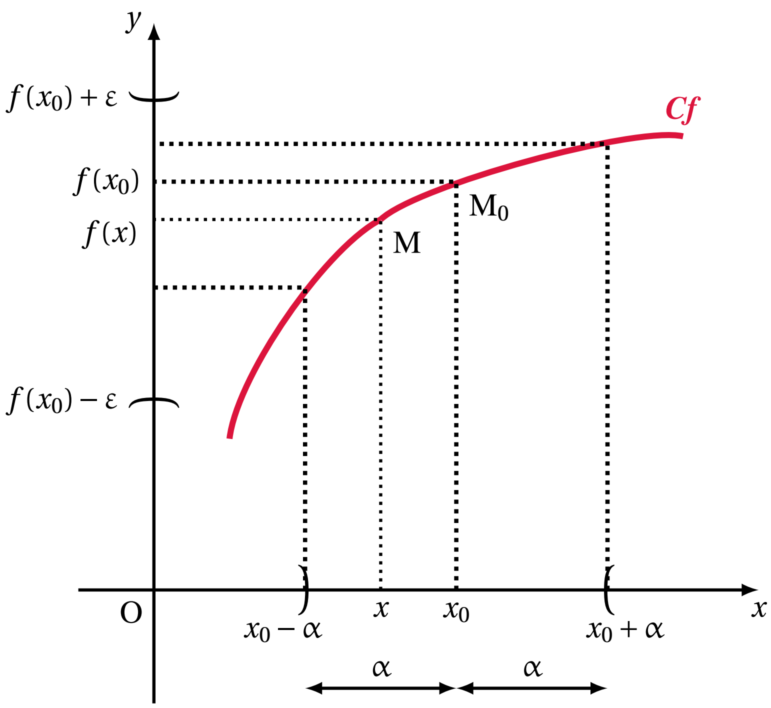
<u>Evezhiadenn</u> : Er pleustr ez arverer dreist holl an delakadennoù amañ diaraok da gaout harz ur gevreizhenn en ur poent (a-getep harz a-zehou pe a-gleiz), o tremen hep an despizadur, mar bez tu !

202 KENDALC'HEGEZH AR C'HEVREIZHENNOÙ NIVEREL

• Kendalc'hek eo ur gevreizhenn f en x_0 mar ha nemet mard eo savelet f en x_0 ha mmar kengerc'h f etrezek un harz bevennek par da $f(x_0)$.

$$f \text{ kendalc'hek en } x_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathscr{D}f \quad \text{ha} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

$$f \text{ kendalc'hek en } x_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathscr{D}f, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+} \ : \\ (x \in \mathscr{D}f \quad \text{ha} \ \ |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon \end{cases}$$



Lavarout ez eo kendalc'hek f en x_0 a dalvez e c'haller kevrediñ $\alpha > 0$ da $\varepsilon > 0$, gant an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \left]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\right[, \text{ neuze } f(x) \in \left]f(x_0) - \varepsilon \; ; \; f(x_0) + \varepsilon\right[.$$

Kement-se a glot gant an nadad e c'haller tostaat M ouzh M_0, kement ha ma venner, mar kemerer e ledenn tost a-walc'h da hini M_0. Ar grommenn derc'hennañ a c'haller tresañ en amezegiezh M_0 hep sevel ar bluenn, eleze a-gendalc'h.

• **Kendalc'hegezh a-zehou ha kendalc'hegezh a-gleiz en ur poent x_0 :**

Kendalc'hek eo ur gevreizhenn f a-zehou (a-getep a-gleiz) en x_0 :

~ mmar deo savelet f en x_0,

~ mar kengerc'h f en x_0 etrezek un harz bevennek a-zehou (a-getep a-gleiz) par da $f(x_0)$.

1 Ar gendalc'hegezh a-zehou :

Kendalc'hek eo f a-zehou en $x_0 \Longleftrightarrow x_0 \in \mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$,

$$\begin{array}{c}\text{Kendalc'hek}\\ \text{eo } f\\ \text{a-zehou en } x_0\end{array} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \; ; \; \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \; : \; x \in \mathscr{D}f \\ \text{hag } (x \in [x_0, x_0 + \alpha[) \Longrightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

2 Ar gendalc'hegezh a-gleiz:

Kendalc'hek eo f a-gleiz en $x_0 \Longleftrightarrow x_0 \in \mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,

$$\begin{array}{c}\text{Kendalc'hek}\\ \text{eo } f\\ \text{a-gleiz en } x_0\end{array} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \; ; \; \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \; : \; x \in \mathscr{D}f \\ \text{hag } (x \in [x_0 - \alpha, x_0[) \Longrightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

Teurel evezh ez arverer er skrivadoù jedoniel amañ diaraok an entremezioù leddigor : $[x_0, x_0 + \alpha[$ ha $[\, x_0 - \alpha, x_0[$, tra ma reer e despizadur an harz bevennek a-zehou hag an hini a-gleiz gant entremezioù digor (da skouer :

$$x_0 < x < x_0 + \alpha_1 \Longleftrightarrow x \in [x_0, x_0 + \alpha_1[).$$

Kement-se a ra dave d'an devoud ez eo ar gevreizhenn f savelet en x_0 *dre ret*.

• **Delakadenn :**

Kendalc'hek eo ur gevreizhenn f en x_0 mmard eo f kendalc'hek a-zehou hag a-gleiz en x_0. Pezh a grenner :

$$f \text{ kendalc'hek en } x_0 \Longleftrightarrow x_0 \in \mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad \lim_{x \to x_0^+} f = \lim_{x \to x_0^-} f = f(x_0)$$

(Arveret e vez an delakadenn-mañ mar bez meur a rezhienn gant ar gevreizhenn a-gleiz hag a-zehou da x_0).

• **Kendalc'hegezh war un entremez :**

Bezet ur gevreizhenn f hag un entremez I o c'henniñ $\mathscr{D}f$:

~ f kendalc'hek war $]a,b[\Longleftrightarrow f$ kendalc'hek e pep poent eus $]a,b[$

~ f kendalc'hek war $[a,b] \Longleftrightarrow f$ kendalc'hek war $]a,b[$ hag f kendalc'hek a-zehou en a hag a-gleiz e b.

~ f kendalc'hek war $[a,b[\Longleftrightarrow f$ kendalc'hek war $]a,b[$ hag f kendalc'hek a-zehou en a.

~ f kendalc'hek war $[a,+\infty[\Longleftrightarrow f$ kendalc'hek evit pep $x_0 > a$ ha f kendalc'hek a-zehou en a.

~ Hag all...

~ f kendalc'hek war $\mathbb{R} \Longleftrightarrow f$ kendalc'hek evit pep poent.

Diwar se e tezreer an delakadennoù-mañ :

~ Nep kevreizhenn bolinom zo kendalc'hek war $\mathbb{R}$ (ent dibarek, nep kevreizhenn arstalek, ar gevreizhenn aruniñ, nep kevreizhenn vonom).

~ Nep kevreizhenn gemezel zo kendalc'hek war pep hini eus an entremezioù m'emañ savelet ($\mathscr{D}f$ zo ur c'hembodadur a entremezioù digor).

• **"Jedadurioù" war ar c'hevreizhennoù kendalc'hek :**

1. Delakadennoù :

Mard eo u ha v div gevreizhenn gendalc'hek en x_0, neuze :

~ ez eo kendalc'hek $u + v$ ha $u \times v$ en x_0.

~ ez eo kendalc'hek α^n en x_0 $(\alpha \in \mathbb{R})$.

~ ez eo kendalc'hek u^n en x_0 ($n \in \mathbb{N}$).

~ Mard eo $u(x_0) \geqslant 0$, neuze ez eo kendalc'hek $\sqrt{u}$ en x_0.

~ Mard eo $v(x_0) \neq 0$,, neuze ez eo kendalc'hek $\dfrac{1}{v}$ hag $\dfrac{u}{v}$ en x_0.

An delakadennoù-se a chom talvoudek evit ar gendalc'hegezh a-zehou hag a-gleiz. Da skouer : mard eo u ha v kendalc'hek a-zehou en x_0, neuze ez eo kendalc'hek $u+v$ a-zehou en x_0.

2. Delakadennoù :

Mard eo u ha v div gevreizhenn gendalc'hek war un entremez I, neuze :

~ ez eo kendalc'hek $u+v$ ha $u \times v$ war I.

~ ez eo kendalc'hek αu war I ($\alpha \in \mathbb{R}$).

~ ez eo kendalc'hek u^n war I ($n \in \mathbb{N}$).

~ Mard eo $\forall x_0 \in \mathrm{I}$; $u(x_0) \geqslant 0$, neuze ez eo kendalc'hek $\sqrt{u}$ war I.

~ Mard eo $\forall x_0 \in \mathrm{I}$; $u(x_0) \neq 0$, neuze ez eo kendalc'hek $\dfrac{1}{v}$ hag $\dfrac{u}{v}$ war I.

Er pleustr e vez arveret an delakadennoù amañ diaraok evit dezren kendalc'hegezh ur gevreizhenn hep rekouriñ d'an despizadur.

• **Rezh ansavelet pa gengerc'h u ha v etrezek mann en ur gevreizhenn $\dfrac{u}{v}$:**

Bezet ur gevreizhenn f a'r rizh $\dfrac{u}{v}$. Mard eo :

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ ha $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0$, f zo en ur rezh ansavelet (skrivet gant aozerion 'zo $\dfrac{0}{0}$, karezet gant reoù all). Da lemel an ansaveladur e klasker lakaat $x - x_0$ da beriad en $u(x)$ ha $v(x)$ (pe $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ pe forzh petore riñvenn o reiñ mann evit $x = x_0$). Mar bez gallus ar periatadur-se ez eeuner dre $x - x_0$ (pe dre $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$), ...) ha bezet g ar gevreizhenn a gevred ouzh x ar bomm bet goude an eeunadur. Mard eo kendalc'hek g en x_0 , neuze $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$.

• Askouezh dre gendalc'hegezh :

Despizadur :

Bezet ur gevreizhenn f savelet ha kendalc'hek war un isteskad $\mathscr{D}$ eus $\mathbb{R}$, ha bezet un $x_0 \notin \mathscr{D}$. Mar he deus f un harz bevennek l en x_0 e reer askouezh dre gendalc'hegezh en x_0 ar gevreizhenn f eus ar gevreizhenn g savelet war $\mathscr{D} \cup x_0$ dre :

$$\forall x \in \mathscr{D},\ g(x) = f(x) \text{ ha } \ g(x_0) = l$$

Evezhiadenn :

$$\left.\begin{array}{c} \mathscr{D} \subset \mathscr{D}' \\ f \text{ savelet war } \mathscr{D} \\ g \text{ savelet war } \mathscr{D}' \end{array}\right\} f \text{ strishâd } g \text{ da } \mathscr{D} \Longleftrightarrow g \text{ askouezh } f \text{ da } \mathscr{D}'$$

203 ASTENNOÙ KEAL AN HARZ

• Harz anvevenn a-zehou en ur poent

Despizadurioù ha notadurioù :

Bezet x_0 ur gwerc'hel ha f ur gevreizhenn, he savelva o wiriañ an amveziad-mañ : bez' ez eus ur gwerc'hel muiel strizh a_1, hevelep ma'z eo $]x_0, x_0 + a_1[\subset \mathscr{D}f$.

~ Lavarout a reer e kengerc'h f en x_0 a-zehou (pe, pa denn x a-zehou war-du x_0) etrezek an harz $+\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh A ur gwerc'hel muiel strizh α, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 < x < x_0 + \alpha$$
$$(\text{pe } 0 < x - x_0 < \alpha \text{ pe } x \in]x_0, x_0 + \alpha[),\ \ \text{neuze } f(x) > \text{A}.$$

Notañ a reer neuze :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \text{pe} \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty, \quad \text{pe} \ \lim_{x_0^+} f = +\infty$$

~ Lavarout a reer e kengerc'h f en x_0 a-zehou etrezek an harz $-\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh A ur gwerc'hel muiel strizh α, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 < x < x_0 + \alpha$$
$$(\text{pe } 0 < x - x_0 < \alpha \text{ pe } x \in]x_0, x_0 + \alpha[), \quad \text{neuze } f(x) < -\text{A}.$$

Notañ a reer neuze :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \text{pe} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty, \quad \text{pe} \quad \lim_{x_0^+} f = -\infty$$

• **Harz anvevenn a-gleiz en ur poent**

Despizadurioù ha notadurioù :

Bezet x_0 ur gwerc'hel ha f ur gevreizhenn, he savelva o wiriañ an amveziad-mañ : bez' ez eus ur gwerc'hel muiel strizh a_2, hevelep ma'z eo :

$$]x_0 - a_2, x_0[\subset \mathscr{D}f.$$

~ Lavarout a reer e kengerc'h f en x_0 a-gleiz (pe, pa denn x a-gleiz war-du x_0) etrezek an harz $+\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh A ur gwerc'hel muiel strizh α, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 - \alpha < x < x_0$$
$$(\text{pe } -\alpha < x - x_0 < 0 \quad \text{pe } \; x \in]x_0 - \alpha, x_0[), \quad \text{neuze } f(x) > \text{A}.$$

Notañ a reer neuze :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \text{pe} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty, \quad \text{pe} \quad \lim_{x_0^-} f = +\infty$$

~ Lavarout a reer e kengerc'h f en x_0 a-gleiz etrezek an harz $-\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh A ur gwerc'hel muiel strizh α, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 - \alpha < x < x_0$$
$$(\text{pe } -\alpha < x - x_0 < 0 \quad \text{pe } \; x \in]x_0 - \alpha, x_0[), \quad \text{neuze } f(x) < -\text{A}.$$

Notañ a reer neuze :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \text{pe} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty, \quad \text{pe} \quad \lim_{x_0^-} f = -\infty$$

<u>Evezhiadennoù</u> :

~ Savelet eo f evit an holl werzhadoù tost da x_0 ha brasoc'h eget x_0 : an un goulakadenn eo evit un harz anvevenn a-zehou pe un harz bevennek a-zehou. Heñvel dra evit an harzoù a-gleiz.

~ Evit an harz anvevenn a-zehou e c'hoari A un roll heñvel ouzh hini ar gwerc'hel ε e degouezh un harz bevennek a-zehou. Ur gwerc'hel ken bras ha ma venner eo, tra ma oa ε ur gwerc'hel muiel ken bihan ha ma venner. Mar kengerc'h f etrezek $+\infty$ pa denn x war-du x_0 a-zehou, neuze e c'haller savelañ, pegen bras e ve A, un niver muiel strizh α a-gevreizh da A, e doare ma vo $f(x)$, mar kemerer $x \in \mathscr{D}f$ ha $x_0 < x < x_0 + \alpha$, brasoc'h c'hoazh eget an A bras tidek-se. Neuze he deus f $+\infty$ da harz a-zehou da x_0 mar galler kaout $f(x)$ ken bras ha ma venner ($f(x)$ a zle bezañ brasoc'h eget A bras tidek), e kement ha ma kemerer x tost a-walc'h ouzh x_0, brasoc'h eget x_0 avat (jediñ a reer a-gevreizh da A un niver $\alpha > 0$, bihan kenan, hevelep ma vo neuze, mar lezer x en entremez bihan $]x_0, x_0 = \alpha[$, brasoc'h $f(x)$ eget A). Ur wech c'hoazh e c'hoarier war an argemmenn da seveniñ an amplegad klasket, $f(x) > A$.

Mar he deus $f(x)$ an harz $-\infty$ a-zehou da x_0 e vo an amplegad da seveniñ $f(x) < -A$: gallout a reer neuze kaout $f(x)$ leiel, he gwerzh dizave ken bras ha ma venner (rak A > 0 bras e werzh dizave $\Longrightarrow -$A < 0 bras e werzh dizave), e kement ha ma kemerer x tost a-walc'h ouzh x_0 ha brasoc'h eget x_0.

Heñvel dra evit an harzoù anvevenn a-gleiz (erlec'hiañ "bihanoc'h eget x_0" ouzh "brasoc'h eget x_0").

• **Skrivadur jedoniel an despizadurioù :**

~ Harzoù anvevenn a-zehou :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists a_1>0\ :\ ]x_0,x_0+a_1[\ \subset \mathscr{D}f\\ \forall \mathrm{A}\in\mathbb{R}^{*+},\exists\alpha\in\mathbb{R}^{*+}\\ (x\in\mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad x\in]x_0,x_0+\alpha[\Longrightarrow f(x)>\mathrm{A}\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists a_1>0\ :\ ]x_0,x_0+a_1[\ \subset \mathscr{D}f\\ \forall \mathrm{A}\in\mathbb{R}^{*+},\exists\alpha\in\mathbb{R}^{*+}\\ (x\in\mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad x\in]x_0,x_0+\alpha[\ \Longrightarrow f(x)<-\mathrm{A}\end{cases}$$

~ Harzoù anvevenn a-gleiz :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \exists a_2>0\ :\ ]x_0-a_2,x_0[\ \subset \mathscr{D}f\\ \forall \mathrm{A}\in\mathbb{R}^{*+},\exists\alpha\in\mathbb{R}^{*+}\\ (x\in\mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad x\in]x_0-\alpha,x_0[\Longrightarrow f(x)>\mathrm{A}\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \exists a_2>0\ :\ ]x_0-a_2,x_0[\ \subset \mathscr{D}f\\ \forall \mathrm{A}\in\mathbb{R}^{*+},\exists\alpha\in\mathbb{R}^{*+}\\ (x\in\mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad x\in]x_0-\alpha,x_0[\Longrightarrow f(x)<-\mathrm{A}\end{cases}$$

• **Harz anvevenn en ur poent**

Despizaduruioù ha notadurioù :

Bezet x_0 ur gwerc'hel ha f ur gevreizhenn, he savelva o wiriañ an amveziad-mañ : bez' ez eus un entremez digor I oc'h enderc'hel x_0, hevelep ma'z eo :

$$\mathrm{I}-\{x_0\}\subset\mathscr{D}f.$$

~ Lavarout a reer e kengerc'h f en x_0 etrezek an harz $+\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh A ur gwerc'hel muiel strizh α, hevelep m'hon eus an emplegadurmañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$$
$$(\text{pe } x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad \text{pe } \ |x - x_0| < \alpha), \text{ neuze } f(x) > \mathrm{A}.$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, pe $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$

~ Lavarout a reer e kengerc'h f en x_0 etrezek an harz $-\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh A ur gwerc'hel muiel strizh α, hevelep m'hon eus an emplegadurmañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \text{ ha mard eo } x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$$
$$(\text{pe } x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad \text{pe } \ |x - x_0| < \alpha), \text{ neuze } f(x) < -\mathrm{A}.$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, pe $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$

• **Skrivadur jedoniel an despizaduriоù :**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ I digor } : \ x_0 \in \mathrm{I} \ ; \mathrm{I} \ - \{x_0\} \subset \mathscr{D}f \\ \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{*+} \\ (x \in \mathscr{D}f \quad \text{hag } \ |x - x_0| < \alpha \implies f(x) > \mathrm{A} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \text{I digor } : \ x_0 \ \in \ \mathrm{I} \ ; \mathrm{I} \ - \{x_0\} \subset \mathscr{D}f \\ \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{*+} \\ (x \in \mathscr{D}f \quad \text{hag } \ |x - x_0| < \alpha \implies f(x) < -\mathrm{A} \end{cases}$$

• **Harz e $+\infty$ pe e $-\infty$:**

Keal an harz zo bet degaset war-benn respont d'ar goulenn : petra a c'hoarvez gant $f(x)$ pa nesa x ouzh bonnoù ar savelva ? Mard eo $\mathscr{D}f$ un entremez eus ar rizh $]-\infty, a[$ pe $]b, +\infty[$, pe ur c'hembodadur entremezioù, unan anezho o vezañ eus ar rizh-se, ez omp kaset da zezgeriañ ent jedoniel an devoud “x a nesa” ouzh $+\infty$ pe ouzh $-\infty$ ha studiañ monedigezh keñverek $f(x)$.

1. Harz e $+\infty$:

DespizaduriOù ha notadurioù :

Bezet f ur gevreizhenn, he savelva o wiriañ an amveziad-mañ :

Bez’ ez eus ur gwerc’hel muiel strizh a,

hevelep ma’z eo $]a,+\infty[\ \subset \mathscr{D}f$.

~ Lavarout a reer e kengerc’h f e $+\infty$ etrezek an harz bevennek l mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc’hel muiel strizh ε ur gwerc’hel muiel strizh B, hevelep m’hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{Mard eo } x \in \mathscr{D}f \quad \text{ha mard eo } \ x > B,$$
$$\text{neuze } l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \quad (\text{pe neuze } \left|f(x)-l\right| < \varepsilon)$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l,$ pe $\lim\limits_{+\infty} f = l$

~ Lavarout a reer e kengerc’h f e $+\infty$ etrezek an harz $+\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc’hel muiel strizh A ur gwerc’hel muiel strizh B, hevelep m’hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \quad \text{ha mard eo } \ x > B, \text{ neuze } f(x) > \mathrm{A}$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$ pe $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

~ Lavarout a reer e kengerc’h f e $+\infty$ etrezek an harz $-\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc’hel muiel strizh A ur gwerc’hel muiel strizh B, hevelep m’hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \quad \text{ha mard eo } \ x > B, \text{ neuze } f(x) < -\mathrm{A}$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$ pe $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$

2. Harz e $-\infty$:

Despizadurioù ha notadurioù :

Bezet f ur gevreizhenn, he savelva o wiriañ an amveziad-mañ :

Bez' ez eus ur gwerc'hel muiel strizh b,

hevelep ma'z eo : $]-\infty, b[\ \subset \mathscr{D}f$

~ Lavarout a reer e kengerc'h f e $-\infty$ etrezek an harz bevennek l mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh ε ur gwerc'hel muiel strizh B, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \quad \text{ha mard eo } \ x < -B,$$
$$\text{neuze } l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad (\text{pe neuze } \ |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l, \quad$ pe $\lim\limits_{-\infty} f = l$

~ Lavarout a reer e kengerc'h f e $-\infty$ etrezek an harz $+\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh A ur gwerc'hel muiel strizh B, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

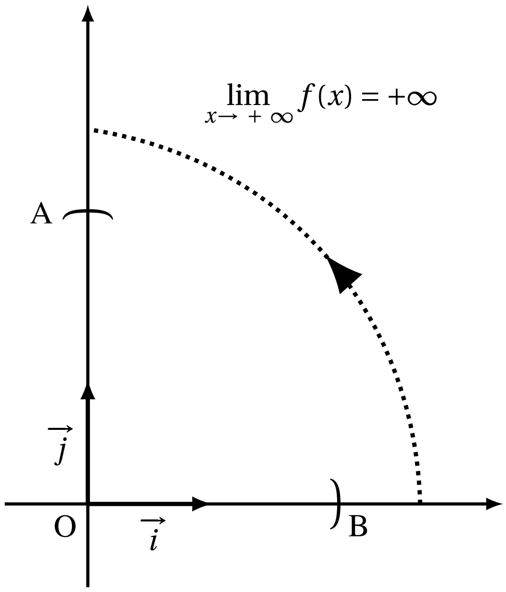
$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \quad \text{ha mard eo } \ x < -\mathrm{B}, \ \text{neuze } f(x) > \mathrm{A}$$

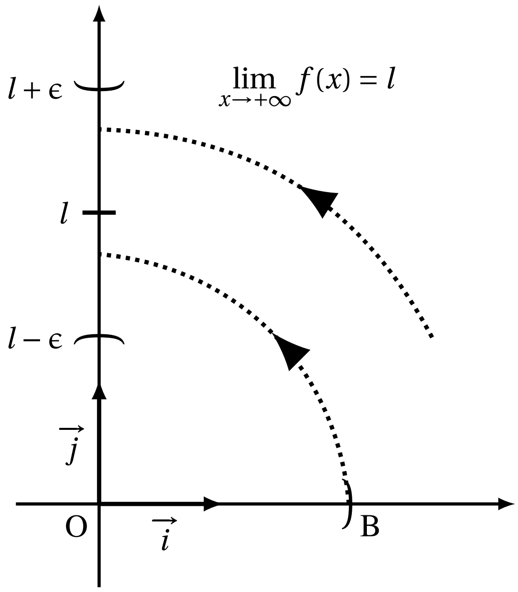
Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad$ pe $\lim\limits_{-\infty} = +\infty$

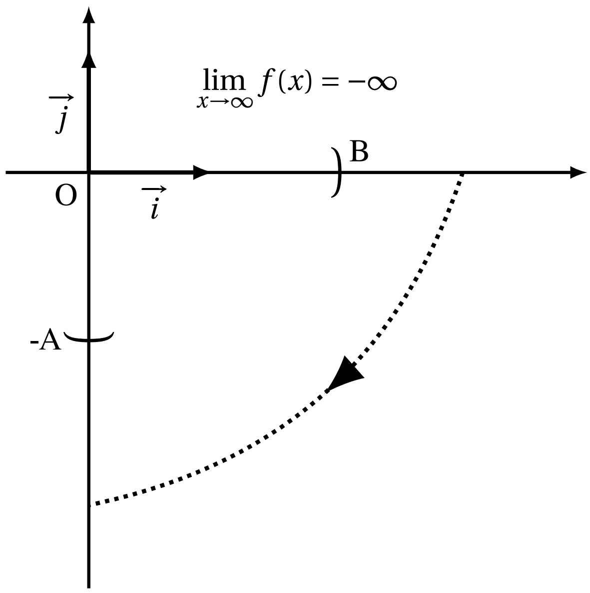
~ Lavarout a reer e kengerc'h f e $-\infty$ etrezek an harz $-\infty$ mmar galler kevrediñ ouzh nep gwerc'hel muiel strizh A ur gwerc'hel muiel strizh B, hevelep m'hon eus an emplegadur-mañ :

$$\text{mard eo } x \in \mathscr{D}f \quad \text{ha mard eo } \ x < -B, \ \text{neuze } f(x) < -\mathrm{A}$$

Notañ a reer neuze : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad$ pe $\lim\limits_{-\infty} = -\infty$







- **Skrivadur jedoniel an despizadurioù :**

1. **Harz e +∞ :** $\exists a \in \mathbb{R}\ :\ ]a, +\infty[\ \subset \mathcal{D}f$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*};\ \exists\, \mathrm{B}\ \in \mathbb{R}^{+*} : (x \in \mathcal{D}f \text{ hag } x > \mathrm{B}) \iff \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{+*};\ \exists\, \mathrm{B}\ \in \mathbb{R}^{+*} : (x \in \mathcal{D}f \text{ hag } x > \mathrm{B}) \iff f(x) > \mathrm{A}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{+*};\ \exists\, \mathrm{B}\ \in \mathbb{R}^{+*} : (x \in \mathcal{D}f \text{ hag } x > \mathrm{B}) \iff f(x) < -\mathrm{A}$$

2. **Harz e $-\infty$** : $\exists b \in \mathbb{R}$: $]-\infty, b[\subset \mathcal{D}f$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}; \exists \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{*+} : (x \in \mathcal{D}f \text{ hag } x < -\mathrm{B}) \Longleftrightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{*+}; \exists \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{*+} : (x \in \mathcal{D}f \text{ hag } x < -\mathrm{B}) \Longleftrightarrow f(x) > \mathrm{A}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{*+}; \exists \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{*+} : (x \in \mathcal{D}f \text{ hag } x < -\mathrm{B}) \Longleftrightarrow f(x) < -\mathrm{A}$$

• **“Jedadurioù” war an harzoù :**

Pa denn x war-du x_0 bevennek pe anvevenn

mar kengerc'h f etrezek an harz :	**mar kengerc'h g etrezek an harz :**	**neuze e kengerc'h $f+g$ etrezek an harz :**
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*Rezh ansavelet*

mar kengerc'h f etrezek an harz :	**mar kengerc'h g etrezek an harz :**	**neuze e kengerc'h fg etrezek an harz :**
l	l'	ll'
$+\infty$ (a-getep $-\infty$)	$l' \neq 0$	∞ gant arouez l' (a-getep gant arouez $-l'$)
$+\infty$ (a-getep $-\infty$)	0	*Rezh ansavelet*
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

mar kengerc'h f etrezek an harz :	**mar kengerc'h g etrezek an harz :**	**neuze e kengerc'h $\frac{f}{g}$ etrezek an harz :**
l	$l' \neq 0$	$\frac{l'}{l}$
$l \neq 0$	0^+ 0^-	∞ gant arouez l ∞ gant arouez $-l$
0	0	*Rezh ansavelet*
$+\infty$ (a-getep $-\infty$)	$l' \neq 0$ 0^+ 0^-	∞ gant arouez l' (a-getep gant arouez $-l'$) $+\infty$ (a-getep $-\infty$) $-\infty$ (a-getep $+\infty$)
l	$+\infty$ pe $-\infty$	0
$+\infty$ pe $-\infty$	$+\infty$ pe $-\infty$	*Rezh ansavelet*

• **Harzoù en anvevenn un nebeut kevreizhennoù boas :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ mard eo hebar } n \\ n \in \mathbb{N}^* \\ -\infty \text{ mard eo ampar } n \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \; n \in \mathbb{N}^*$$

• **Delakadennoù pouezus :**

~ Nep kevreizhenn bolinom he deus, e $+\infty$ pe e $-\infty$, an un harz ha he zermen uhelañ derez.

~ Ur gevreizhenn gemezel he deus, e $+\infty$ pe e $-\infty$, an un harz ha rannad termenoù uhelañ derez an niverer hag an anver.

204 DIARROUDAÑ

• Diarroudadusted en ur poent :

Despizadur 1 ha notadur :

Bezet x_0 ur gwerc'hel hag f ur gevreizhenn savelet war un entremez digor I oc'h enderc'hel $x_0 : x_0 \in \mathrm{I} \subset \mathscr{D}f$. Lavarout a reer ez eo diarroudadus f en x_0 mar kengerc'h ar gevreizhenn $\phi : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ en x_0 etrezek un harz bevennek. Diarroudad f en x_0 a vez graet eus an harz-se ha notet e vez $f'(x_0)$. Neuze : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Evezhiadennoù :

~ Merzhout ez eo savelet f en x_0.

~Bevennek eo an harz. Sklaer eo : $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$. Da neuze, evit ma ve un harz bevennek d'ar gevreizhenn $\phi : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e rank an anver kaout mann da harz ivez. Pezh a dalvez $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Hag o vezañ ma'z eo savelet f en x_0 e c'haller dezren :

Delakadenn :

Mard eo diarroudadus ur gevreizhenn f en x_0,
neuze ez eo kendalc'hek en x_0.

(Keveskemmenn an delakadenn-se zo faos. Ur gevreizhenn gendalc'hek en ur poent ned eo ket diarroudadus dre ret. Da skouer $f(x) = |x|$.)

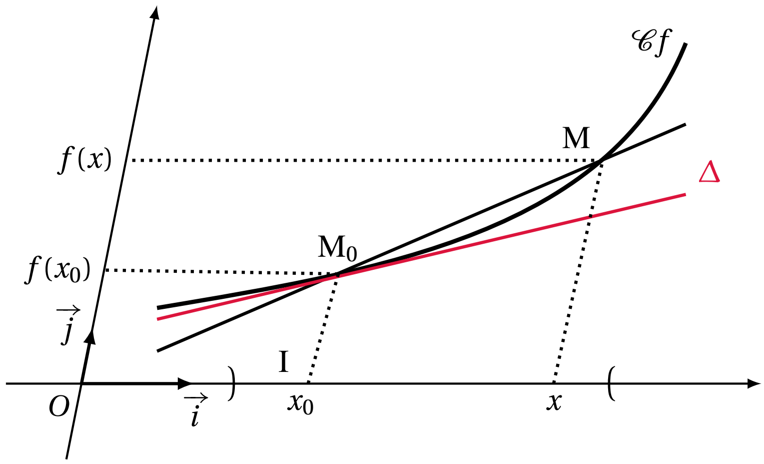
~ Despizadur 2 :

Bezet x_0 ur gwerc'hel hag f ur gevreizhenn, hevelep ma ve $h \longmapsto f(x_0 + h)$ savelet war un entremez digor I$'$ oc'h enderc'hel 0. Lavarout a reer ez eo diarroudadus f en x_0 mar kengerc'h ar gevreizhenn $\psi : x \longmapsto \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e 0 etrezek un harz bevennek.

Diarroudad f en x_0 a vez graet eus an harz-se ha notet e vez $f'(x_0)$. Neuze :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

• **Desteriadur kevregat :**



Bezet $\mathscr{C}f$ derc'hennadur kevregat f. O vezañ ma'z eo savelet f war un entremez digor oc'h enderc'hel x_0, $f(x_0)$ zo anezhañ. Heñvel dra evit $f(x)$, evit nep x eus I. Ar poent $\mathrm{M}_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ zo enbeziat e $\mathscr{C}f$ ha $\mathscr{C}f$ a endalc'h ur warenn boentoù "nes" da M_0 (o ledennoù zo en I). Ar skejenn $\mathrm{M}_0\mathrm{M}$ he deus da wezhiader roud :

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Mar kengerc'h M etrezek M_0 e c'hwel ar skejenn en-dro da M_0 ha $\phi(x)$ a denn war-du $f'(x_0)$. Eleze ar skejenn $\mathrm{M}_0\mathrm{M}$ he devo da savlec'h harzat ar spinenn en M_0 da $\mathscr{C}f$ dezhi da wezhiader roud $f'(x_0)$.

Delakadenn :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Diarroudadus eo } f \text{ en } x_0\\ \text{ha } f'(x_0) \text{ eo he diarroudad}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathscr{C}f \quad \text{he deus ur spinenn en}\\ \mathrm{M}_0\big(x_0, f(x_0)\big) \quad \text{ankenstur da O}y,\\ \text{ha } f'(x_0) \quad \text{zo he gwezhiader roud.}\end{array}\right.$$

~ Atalad ar spinenn : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

• **Dispakadur bevennet d'an urzh 1 ; orgemmadusted f en x_0 :**

Despizadur 3 :

Bezet x_0 ur gwerc'hel hag f ur gevreizhenn savelet war un entremez digor I oc'h enderc'hel x_0 : $x_0 \in \mathrm{I} \subset \mathscr{D}f$.

Lavarout a reer he deus f un dispakadur bevennet d'ar gentañ urzh en amezegiezh x_0 pe ez eo f orgemmadus en x_0 mard eus eus ur gwerc'hel a hag eus ur gevreizhenn α, hevelep ma'z eo :

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\alpha(x), \quad \text{gant} \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

Despizadur 4 :

Bezet x_0 ur gwerc'hel hag $f$ur gevreizhenn, hevelep ma ve h a $h \longmapsto f(x_0 + h)$ savelet war un entremez digor I' oc'h enderc'hel 0. Lavarout a reer he deus f un dispakadur bevennet d'ar gentañ urzh en amezegiezh x_0 pe ez eo f orgemmadus en x_0 mard eus eus ur gwerc'hel a hag eus ur gevreizhenn niverel ε d'an argemmenn h, hevelep ma'z eo :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h), \quad \text{gant} \ \varepsilon(h) = 0$$

• **Arloadur orgemmel** f en x_0 — pe kevreizhenn linennek a-spin en x_0 — a vez graet eus an arloadur linennek notet $\mathrm{d}f_{x_0}$ savelet eus $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}$ dre $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = ah$.

Delakadenn :

f diarroudadus en $x_0 \Longleftrightarrow f$ orgemmadus en x_0
(pe dispakadus bevennet d'ar gentañ urzh en x_0).
An diarroudad $f'(x_0)$ zo neuze gwezhiader a
ar gevreizhenn linennek a-spin $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = ah$.

• **Diarroudadusted a-zehou (a-getep a-gleiz) en x_0 :**

Despizadur 1’ ha notadurioù :

Bezet x_0 ur gwerc’hel hag f ur gevreizhenn.

~ Mard eus eus ur gwerc’hel a_1 muiel strizh, hevelep ma’z eo f savelet war $[x_0, x_0 + a_1[$, e lavarer ez eo diarroudadus f a-zehou en x_0 mar kengerc’h ar gevreizhenn $\phi :\longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ etrezek un harz a-zehou bevennek. An harz-se zo diarroudad a-zehou f en x_0 a noter $f'^{+}(x_0)$.

$$\text{Neuze} : f'^{+}(x_0) = \lim_{x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

~ Mard eus eus ur gwerc’hel a_2 muiel strizh, hevelep ma’z eo $f$savelet war : $]x_0, x_0 + a_1]$ e lavarer ez eo f diarroudadus a-gleiz en x_0 mar kengerc’h ar gevreizhenn ϕ : $\longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ etrezek un harz a-gleiz bevennek. An harz-se zo diarroudad a-gleiz f en $f'^{-}(x_0)$.

$$\text{Neuze} : f'^{-}(x_0) = \lim_{x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Delakadenn :

~ Mard eo ur gevreizhenn f diarroudadus a-zehou en x_0 ez eo kendalc’hek a-zehou en x_0.

~ Mard eo ur gevreizhenn f diarroudadus a-gleiz en x_0 ez eo kendalc’hek a-gleiz en x_0.

Despizadur 2’ :

Bezet x_0 ur gwerc’hel, ur gwerc’hel a_1 muiel strizh, hevelep ma’z eo :

$h \longmapsto f(x_0 + h)$ savelet evit $h \in [0, a_1[$. Lavarout a reer ez eo diarroudadus f a-zehou en x_0 mar kengerc’h ar gevreizhenn (eus h) :

$\psi \ : \ x \longmapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e 0 etrezek un harz bevennek a-zehou.

Diarroudad a-zehou f en x_0 a vez graet eus an harz-se ha notet e vez :

$$f'^{+}(x_0).\ \text{Neuze : } f'^{+}(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Bezet x_0 ur gwerc'hel, ur gwerc'hel a_2 muiel strizh, hevelep ma'z eo :

$h \longmapsto f(x_0+h)$ savelet evit $h \in]a_2, 0]$. Lavarout a reer ez eo diarroudadus f a-gleiz en x_0 mar kengerc'h ar gevreizhenn (eus h) $\psi\ :\ x \longmapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e 0 etrezek un harz bevennek a-gleiz. Diarroudad a-gleiz f en x_0 notet e vez :

$$f'^{-}(x_0).\ \text{Neuze : } f'^{-}(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Delakadenn :

f diarroudadus en $x_0 \Longleftrightarrow f$ diarroudadus a-zehou **hag** a-gleiz en x_0

hag $f'^{-}(x_0) = f'^{+}(x_0) = f'(x_0)$.

- **Desteriadur kevregat :**

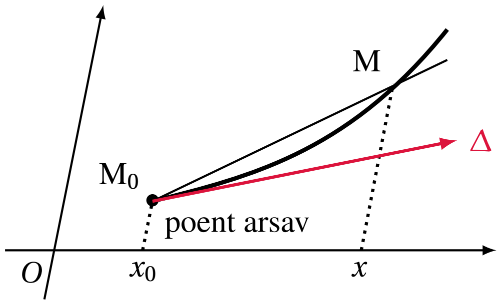
$$\left.\begin{array}{l}\text{Diarroudadus eo } f \text{ en } x_0\\ \quad\text{a-zehou ha}\\ f'^{+}(x_0) \text{ eo he diarroudad}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathscr{C}f \text{ he deus ul ledspinenn a-zehou}\\ \text{en } \mathrm{M}_0\left(x_0, f(x_0)\right) \text{ ankenstur da O}y,\\ \text{ha } f'^{+}(x_0) \text{ zo he gwezhiader roud.}\end{array}\right.$$

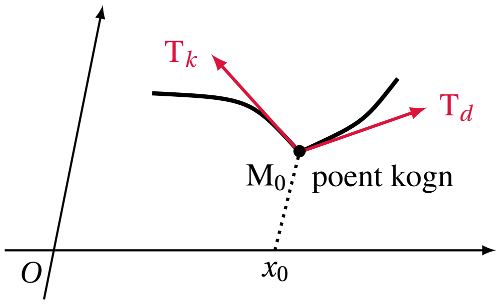
Atalad eeunenn skor al ledspinenn-se : $y = f(x_0) + f'^{+}(x_0)(x - x_0)$

Heñvel dra :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Diarroudadus eo } f \text{ en } x_0\\ \quad\text{a-gleiz}\\ \text{hag } f'^{-}(x_0) \text{ eo he diarroudad}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathscr{C}f \text{ he deus ul ledspinenn a-gleiz}\\ \text{en } \mathrm{M}_0\left(x_0, f(x_0)\right) \text{ ankenstur da O}y,\\ \text{ha } f'^{-}(x_0) \text{ zo he gwezhiader roud.}\end{array}\right.$$

Atalad eeunenn skor al ledspinenn-se : $y = f(x_0) + f'^{-}(x_0)(x - x_0)$





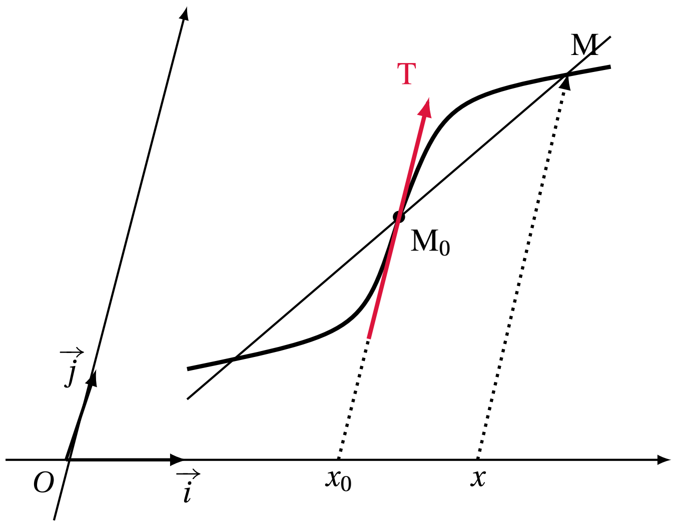
• **Evezhiadenn :**

Delakadenn :

Mard eo $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = l$, neuze $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$

Degouezh deurus da zedalvezout an delakadenn-mañ : mard eo f' kendalc'hek a-zehou en a, neuze ez eo $f'(a)$ an diarroudad a-zehou. Heñveldra a-gleiz da a.

• **Astenn en degouezh ma'z eo $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$**



Empentomp da skouer ez eo : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$. Gwezhiader roud ar skejenn M_0M zo $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ur sturiadell roud eus ar skejenn M_0M zo $\overrightarrow{V_0} = \vec{i} + \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\vec{j}$. E se e c'haller skrivañ :

$$\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0)\,\vec{i} + \left[f(x)-f(x_0)\right]\vec{j}.$$

Ur sturiadell roud all eus ar skejenn M_0M zo $\overrightarrow{V_1} = \dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{f(x)-f(x_0)}$.

$$\text{Ha } \overrightarrow{V_1} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\,\vec{i} + \vec{j} = \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\,\vec{i} + \vec{j}.$$

O vezañ ma'z eo $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ez eo : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = 0.$

Da heul he deus ar sturiadell $\vec{i}$ ur savlec'h harzat a zo ar sturiadell :

$M_0T = 0\,\vec{i} + \vec{j} = \vec{j}$. Neuze ez eus d'ar grommenn derc'hennañ $\mathscr{C}f$ ur spinenn kenstur da ahel an hedennoù e M_0.

• **Kevreizhennoù diarroudañ (diarroudennoù) :**

Bezet f ur gevreizhenn hag I un entremez (digor, pe serr, pe leddigor) o c'henniñ $\mathscr{D}f$.

Despizadur 1 :

~ $f$diarroudadus war $]a,b[$ $\iff$ f diarroudadus e pep poent eus $]a,b[$.

~ f diarroudadus war $[a,b]$ $\iff$ f diarroudadus e pep poent eus $]a,b[$ ha f diarroudadus en a a-zehou hag e b a-gleiz.

~ f diarroudadus war $[a,b[$ $\iff$ f diarroudadus e pep poent eus $]a,b[$ ha f diarroudadus en a a-zehou.

~ f diarroudadus war $[a,+\infty[$ $\iff$ f diarroudadus e pep poent $x_0 > a$ ha f diarroudadus en a a-zehou. Hag all evit $]a,b]$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$.

~ f diarroudadus war $\mathbb{R}$ $\iff$ f diarroudadus e pep poent.

Despizadur 2 :

Bezet f ur gevreizhenn diarroudadus war un entremez digor I. Kevreizhenn diarroudañ kentañ ar gevreizhenn f (e berr diarroudenn f) a reer eus ar gevreizhenn f' o kevrediñ ouzh pep $x \in I$ an diarroudad $f'(x)$ en x :

$$f' : x \longmapsto f'(x), x \in \mathrm{I}.$$

Delakadenn :

Endalc'het eo savelva f' e savelva f : $\mathscr{D}f' \subset \mathscr{D}f$.

Despizadur 3 :

Diarroudennoù lerc'h ouzh lerc'h f

Mard eo f diarroudadus war I ha mard eo he c'hevreizhenn diarroudañ kentañ diarroudadus d'he zro war I e vez anvet eil diarroudenn f ha notet f'' kentañ kevreizhenn diarroudañ ar gevreizhenn diarroudañ kentañ f' :

$$f'' = (f')'.$$

Heñvel dra e c'haller savelañ f''' (f trede) evel kevreizhenn diarroudañ kentañ f'', hag all betek $f^{(n)}$, kevreizhenn diarroudañ kentañ $f^{(n-1)}$, evit nep $n \in \mathbb{N}^*$ (dre zarren).

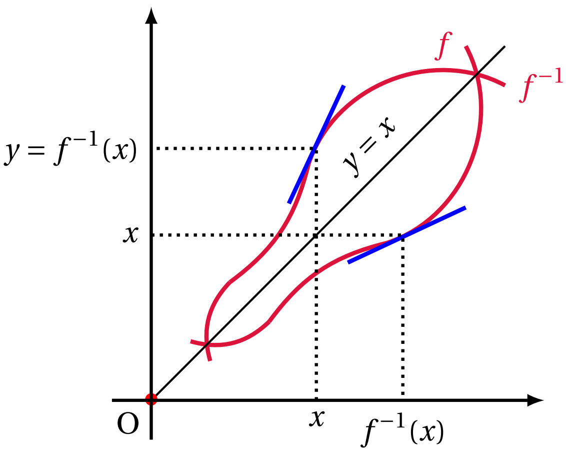
Evel reizh : $\ldots \subset \mathscr{D}f^{(n)} \subset \mathscr{D}f^{(n-1)} \subset \ldots \subset \mathscr{D}f''' \subset \mathscr{D}f'' \subset \mathscr{D}f' \subset \mathscr{D}f.$

• **Taolenn diarroudennoù ar c'hevreizhennoù boas :**

Ar gevreizhenn f	zo diarroudadus war	he diarroudenn zo $f'(x)$
$f(x)=\alpha(\alpha\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	1
$f(x)=x^n\ (n\in\mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=x^n\ (n\in\mathbb{Z}^{-*})$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=x^n\ (n\in\mathbb{N}-\mathbb{Z})$	$\mathbb{R}^{+*}$	nx^{n-1}
$f(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$f(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$f(x)=\tan x$	$\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\ (k\in\mathbb{Z})$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=\cot x$	$\mathbb{R}-\{k\pi\}(k\in\mathbb{Z})$	$-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$
$f(x)=\tan(ax+b)$	$\left\{x\in\mathbb{R}\setminus\ ax+b\neq \left\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\right\}(k\in\mathbb{Z})$	$\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$ $=a\left[1+\tan^2(ax+b)\right]$
$f(x)=\cot(ax+b)$	$\{x\in\mathbb{R}\setminus\ ax+b\neq k\pi\}(k\in\mathbb{Z})$	$-\frac{a}{\sin^2(ax+b)}$ $=-a\left[1+\cot^2(ax+b)\right]$

“Jedadurioù” war ar c’hevreizhennoù diarroudadus :

Mard eo u ha v div gevreizhenn diarroudadus war un entremez I		
Ar gevreizhenn	**zo diarroudadus war**	**he diarroudenn zo**
αu (gant $\alpha \in \mathbb{R}$)	I	$\alpha u'$
$u+v$	I	$u'+v'$
uv	I	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$\{x \in \mathrm{I}\ /\ u(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\{x \in \mathrm{I}\ /\ v(x) \neq 0\}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n (ma ’z eo $n \in \mathbb{N}^*$)	I	$nu^{n-1}u'$
u^n (ma ’z eo $n \in \mathbb{Z}^{*-}$)	$\{x \in \mathrm{I}\ /\ u(x) \neq 0\}$	$nu^{n-1}u'$
u^n (ma ’z eo $n \in \mathbb{Q}-\mathbb{Z}$)	$\{x \in \mathrm{I}\ /\ u(x) > 0\}$	$nu^{n-1}u'$
$\sqrt{u}$	$\{x \in \mathrm{I}\ /\ u(x) > 0\}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$g \circ f$	f war I ha g war $f\langle \mathrm{I}\rangle$	$(g' \circ f) \times f'$
f^{-1}	war $f\langle \mathrm{I}\rangle$ (unton strizh eo f hag $f' \neq 0$ war I)	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$



Delakadenn :

Mard eo f funton strizh ha diarroudadus war un entremez I ha mard eo $f'(x) \neq 0$ evit pep $x \in$ I, neuze ez eo diarroudadus f^{-1} war $f\langle I\rangle$ ha he diarroudenn $\left(f^{-1}\right)'$ zo savelet dre :

$$\forall y \in f\langle I\rangle,\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]},\ \text{eleze}\ \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

• **Notadur orgemmel :**

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \Longleftrightarrow \mathrm{d}f = f' \cdot \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}f_{x_0} = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$$
(ma'z eo $f'(x_0)$ un arstalenn)

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f^n$$

$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

205 STUDI HOLLEK UR GEVREIZHENN

• **Evit studiañ ur gevreizhenn e vez heuliet ar steuñv-mañ :**

1. *Savelva ar gevreizhenn.*

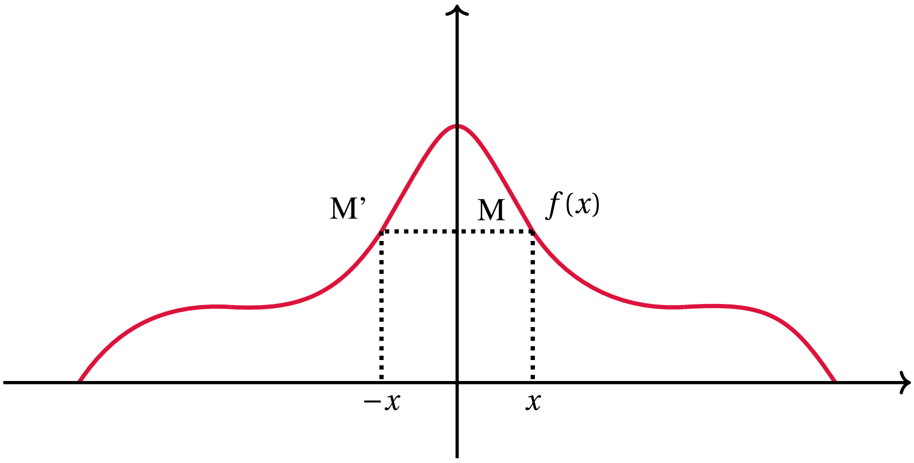
2. *Parded ar gevreizhenn* :

~ Despizadur 1 :

$$f \text{ hebar} \Longleftrightarrow \left(x \in \mathscr{D}f \Longrightarrow \left\{-x \in \mathscr{D}f \text{ hag } f(-x) = f(x)\right\}\right)$$

***Perzh 1* :**

En un dealf diaskouer, mard eo hebar f ez eo ahel an hedennoù un ahel kemparzh evit krommenn derc'hennañ f, $\mathscr{C}f$.

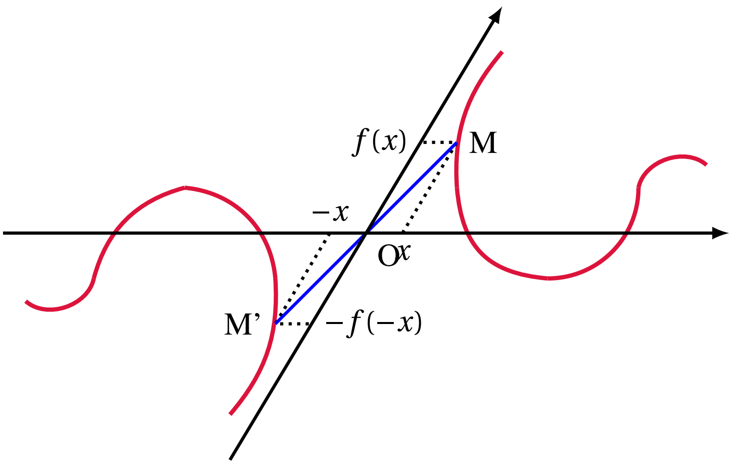


~Despizadur 2 :

$$f \text{ ampar} \Longleftrightarrow \left(x \in \mathscr{D}f \Longrightarrow \{-x \in \mathscr{D}f \text{ hag } f(-x) = -f(x)\}\right)$$

Perzh 2 :

Mard eo ampar f ez eo orin O an dealf kreiz kemparzh krommenn derc'hennañ f $\mathscr{C}f$, en ur reizhiad ahelioù diforzh (a-skouer pe a-veskell).



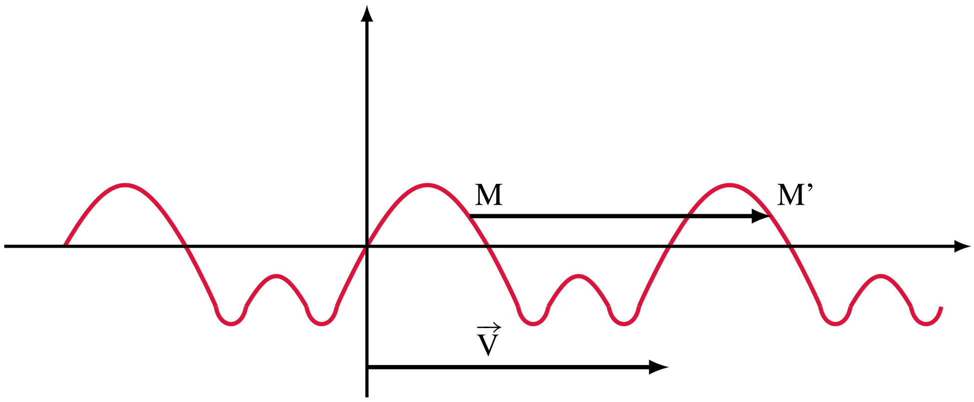
3. *Trovezhiegezh* :

Despizadur 3 :

$$f \text{ trovezhiek a drovezh } \mathrm{T} \in \mathbb{R}^{+*} :\Longleftrightarrow \left(\quad x \in \mathscr{D}f \longrightarrow \begin{cases} x+\mathrm{T} \in \mathscr{D}f & \text{hag} \\ f(x+\mathrm{T}) = f(x) & \end{cases} \quad \right)$$

Perzh 3 :

Mard eo trovezhiek f a drovezh T ez eo anargemmat he c'hrommenn derc'hennañ $\mathscr{C}f$ en un dealf $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en treuzkludadur a sturiadell $\vec{\mathrm{V}} = \mathrm{T}\,\vec{i}$.



4. *Teskad studi* :

Diwar parded ha trovezhiegezh ar gevreizhenn e saveler ar bihanañ teskad ma studier ar gevreizhenn.

5. *Studi argemmoù ar gevreizhenn* :

Delakadenn 1 :

Bezet f ur gevreizhenn diarroudadus war un entremez I :

$\forall x \in \mathrm{I} \; : \; f'(x) = 0 \Longleftrightarrow f$ zo arstlek war I

$\forall x \in \mathrm{I} \; : \; f'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f$ zo kengresk war I

$\forall x \in \mathrm{I} \; : \; f'(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow f$ zo gingresk war I

Ouzhpenn se : $\forall x \in \mathrm{I} : f'(x) \geqslant 0$ (a-getep $\leqslant 0$) ha f' zo par da vann en un niver bevennek a werzhadoù eus I hepken (a zo neuze gwerzhadoù digenvezet) $\Longleftrightarrow f$ zo kengresk strizh (a-getep gingresk strizh) war I.

Eizhaegennoù ur gevreizhenn :

Despizadurioù :

$$\text{Bezet} \quad x_0 \in \mathscr{D}f.$$

~ Lavarout a reer ez eus d'ur gevreizhenn f en x_0 un uc'hegenn dizave strizh en x_0 mard eo
$\forall x \in \mathscr{D}f - \{x_0\}\ :\ f(x) < f(x_0)$ (an uc'hegenn dizave a vo ledan mar erlec'hier $f(x) \leqslant f(x_0)$ ouzh $f(x) < f(x_0)$).

~ Heñvel dra e lavarer ez eus d'ur gevreizhenn f en x_0 un izegenn dizave strizh en x_0 mard eo : $\forall x \in \mathscr{D}f - \{x_0\}\ :\ f(x) > f(x_0)$ (an uc'hegenn dizave a vo ledan mard eo $\forall x \in \mathscr{D}f - \{x_0\}\ :\ f(x) \geqslant f(x_0)$).

~ Lavarout a reer ez eus d'ur gevreizhenn f en x_0 un uc'hegenn daveel strizh mard eus eus ur gwerc'hel $\alpha > 0$, hevelep ma'z eo :

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\ \subset \mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[- \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$$

(an uc'hegenn daveel a vo ledan mar erlerc'hier $f(x) \leqslant f(x_0)$ ouzh $f(x) < f(x_0)$).

~ Heñvel dra e lavarer ez eus d'ur gevreizhenn f en x_0 un izegenn daveel strizh mard eus eus ur gwerc'hel $\alpha > 0$, hevelep ma'z eo :

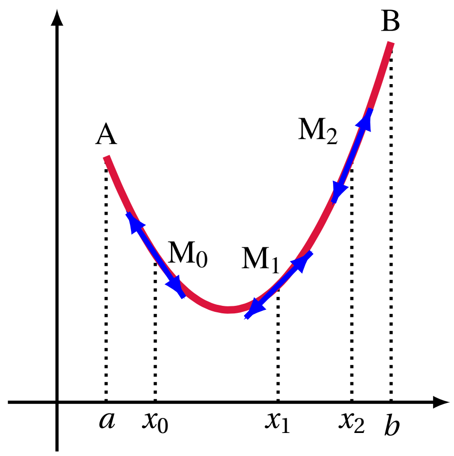
$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\ \subset \mathscr{D}f \quad \text{hag} \quad]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[- \{x_0\} : f(x) > f(x_0)$$

(an uc'hegenn daveel a vo ledan mar erlerc'hier $f(x) \geqslant f(x_0)$ ouzh $f(x) > f(x_0)$).

Delakadenn 2 :

Mard eo f ur gevreizhenn diarroudadus war un entremez kreizet en x_0 ha mard eo an diarroudenn par da vann en x_0 *o kemmañ arouez*, neuze ez eus un eizhaegenn en x_0.

6. *Argevegezh ha poentoù disgwar* :

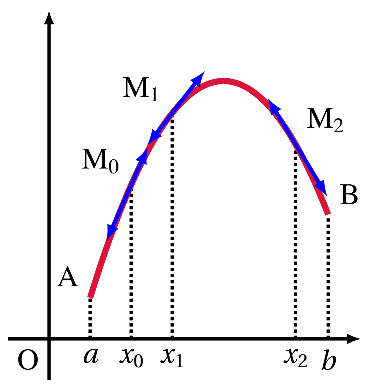


• Argevegezh troet war-du an hedennoù muiel war $I = [a, b]$. Mar deseller ar spinennoù e poentoù diforc’h e stader e kresk gwezhiader roud ar spinennoù, eleze e kresk $f'(x)$.

$x_0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f'(x_0) < f'(x_1) < f'(x_2)$

Lavarout e kresk f' a dalvez ez eo he diarroudenn $(f')' = f''$ muiel war I :

$$\forall x \in I,\ f''(x) > 0$$

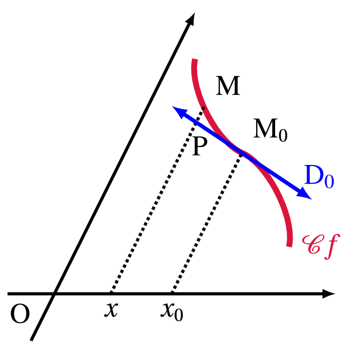


• Argevegezh troet war-du an hedennoù leiel war $I = [a, b]$. Mar deseller ar spinennoù e poentoù diforc’h e stader e tigresk gwezhiader roud ar spinennoù, eleze e tigresk $f'(x)$.

$x_0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f'(x_0) > f'(x_1) > f'(x_2)$

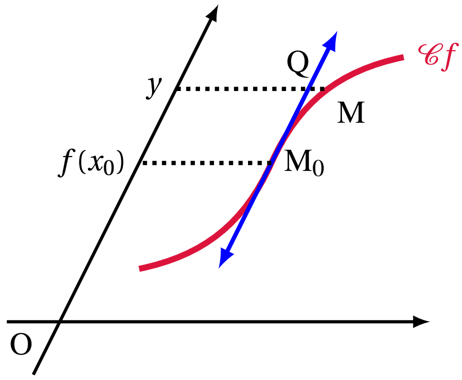
Lavarout e tigresk f' a dalvez ez eo he diarroudenn $(f')' = f''$ leiel war I :

$$\forall x \in I,\ f''(x) < 0$$



• Bezet $\mathscr{C}f$ krommenn derc’hennañ ur gevreizhenn f, dezhi ur spinenn D_0 en $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ ankenstur da Oy. Bezet M ha P daou boent a un ledenn x tost ouzh x_0, a-getep war $\mathscr{C}f$ ha D_0. Lavarout a reer ez eus e M_0 ur poent disgwar eus $\mathscr{C}f$ mmard eo $\overline{PM}$ par da vann en M_0, o kemmañ arouez, pa erol x un entremez :

$$]x_0 - h, x_0 + h[,\ h \in \mathbb{R}^{+*}.$$



• Mard eus en M_0 ur spinenn da $\mathscr{C}f$ kenstur da Oy, bezet Q ha M daou boent a un hedenn y, a-getep war ar spinenn ha war $\mathscr{C}f$. En degouezh-se e lavarer ez eo M_0 ur poent disgwar eus $\mathscr{C}f$ mmard eo $\overline{QM}$ par da vann e M_0, o kemmañ arouez, pa erol y un entremez kreizet e $f(x_0)$:

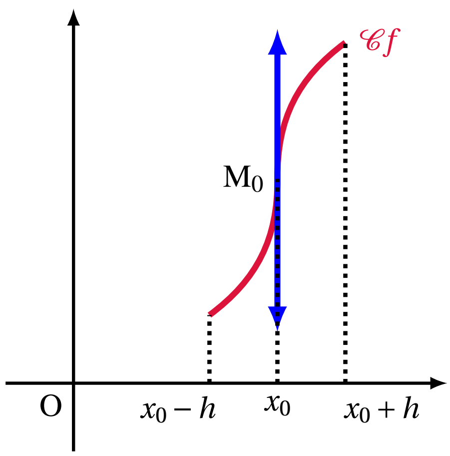
$$J = \left]f(x_0) - k, f(x_0) + k\right[, \ k \in \mathbb{R}.$$

<u>Evezhiadenn</u> : En ur poent disgwar e treuz ar grommenn he spinenn.

Delakadenn :

Mard eo f ur gevreizhenn diarroudadus div wech war un entremez $]x_0 - h, x_0 + h[$ gant $(h > 0)$ ha mard eo an eil diarroudenn par da vann en x_0 o kemmañ arouez e tiskouez krommenn derc'hennañ f ur poent disgwar en $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$.

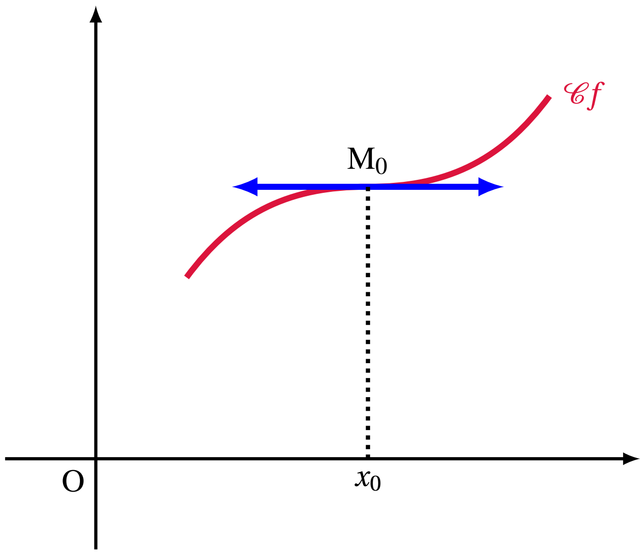
(Mar goulakaer ez eo f diarroudadus div wech war un entremez kreizet en x_0 ez eo amveziad an delakadenn un amplegad spirus).



• Ma n'eo ket f diarroudadus en x_0, hogen mard eo :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ pe } -\infty,$$

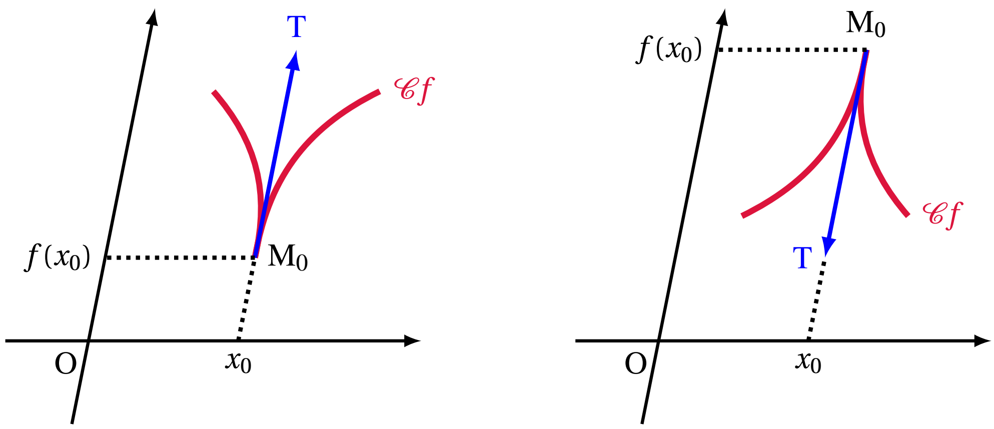
e tiskouez krommenn derc'hennañ f en $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ ur poent disgwar gant ur spinenn kenstur da ahel an hedennoù.



Delakadenn (degouezh dibarek) :

Mard eo f ur gevreizhenn diarroudadus war un entremez $]x_0-h, x_0-h[$ gant $(h>0)$ ha mard eo an diarroudenn gentañ par da vann en x_0 *hep kemmañ arouez* e tiskouez krommenn derc'hennañ f ur poent disgwar en $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$, gant ur spinenn kenstur da ahel al ledennoù.

7. *Poentoù heverk* : Eizhapoentoù, poentoù disgwar, poentoù ildro :



Lavarout a reer ez eo M_0 ur poent ildro evit ar grommenn $\mathscr{C}f$ mmar he deus $\mathscr{C}f$ ul ledspinenn en M_0 ha mar treuz $\mathscr{C}f$ al ledspinenn-se. Kenstur eo neuze al ledspinenn da ahel an hedennoù.

Delakadenn :

Ma n'eo ket f diarroudadus en $x_0 \in \mathscr{D}f$, hogen mard eo

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \text{ hag } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty, \text{ pe}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \text{ hag } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

e tiskouez krommenn derc'hennañ f en $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ ur poent ildro.

~ Poentoù kogn : Ur poent kogn eo M_0 evit ar grommenn $\mathscr{C}f$ mar diskouez hounnezh en M_0 div ledspinenn nad int ket lec'hiet war an un eeunenn.

Delakadenn :

Ma n'eo ket f diarroudadus en $x_0 \in \mathscr{D}f$, ha mard eo, pe f diarroudadus a-zehou ha diarroudadus a-gleiz en x_0 ha $f'^{+}(x_0) \neq f'^{-}(x_0)$, pe f diarroudadus a-zehou en x_0 ha

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ (pe } -\infty), \text{ pe diarroudadus } f \text{ a-gleiz en } x_0$$

ha $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (pe $-\infty$), neuze ez eo ar poent $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ ur poent kogn eus $\mathscr{C}f$.

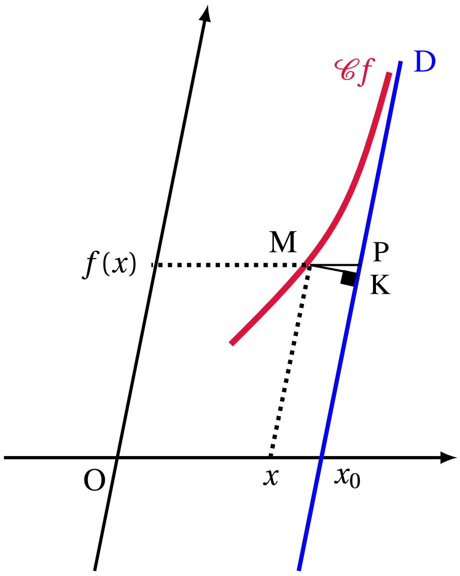
~ Poentoù harzat ha poentoù arsav :

≈ Despizadur : Mard eo ur gevreizhenn f savelet war un entremez I, nemet en $x_0 \in$ I, ha mard eo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ma'z eo bevennek l e tiskouez ar grommenn $\mathscr{C}f$ ar poent harzat $L(x_0, l)$. E se n'emañ ket ar poent harzat war ar grommenn.

≈ Despizadur : Mard eo savelet f war $[a, b[$ ma'z eo bevennek a ha b bevennek pe anvevenn ; pe war I' $=]c, a]$ (a bevennek, c bevennek pe anvevenn), neuze ez eo ar poent $A(a, f(a))$ ur poent arsav eus ar grommenn $\mathscr{C}f$. Emañ ar poent arsav war ar grommenn enta.

8. *Skourroù anvevenn* :

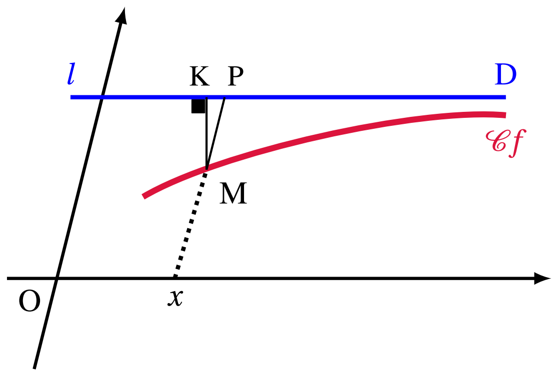
~ Kehelc'hennoù kenstur da ahel an hedennoù :



Despizadur :

Bezet ur gevreizhenn f ha x_0 ur gwerc'hel bevennek. Mar kengerc'h f e $+\infty$ pe $-\infty$ en x_0, pe a-zehou en x_0, pe a-gleiz en x_0, ez eo an eeunenn atalad $x = x_0$ kehelc'h d'ar grommenn derc'hennañ $\mathscr{C}f$.

~ Kehelc'hennoù kenstur da ahel al ledennoù :



Despizadur :

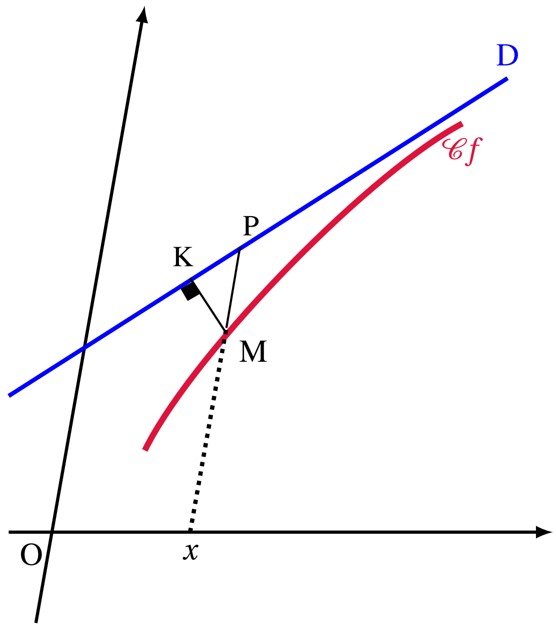
Mar he deus ar gevreizhenn f e $+\infty$ pe e $-\infty$ un harz bevennek l ez eo an eeunenn D atalad $y = l$ ur gehelc'henn d'ar grommenn derc'hennañ $\mathbb{C}f$.

~ Kehelc'hennoù a-veskell :

Despizadur : Bezet D un eeunenn atalad $y = ax + b$ (gant $a \neq 0$). Mar he deus f e $+\infty$ (pe e $-\infty$) un harz anvevenn ha mard eo :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \text{ (pe } \left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\right)}$$

ez eo an eeunenn D $(y = ax + b)$ kehelc'h d'ar grommenn derc'hennañ $\mathbb{C}f$.



Evezhiadenn :

Savlec'h ar grommenn e-keñver ar gehelc'henn a saveler dre studiañ arouez $\overline{\mathrm{PM}} = f(x) - (ax+b)$.

Delakadenn :

Bezet f ur gevreizhenn niverel. He c'hrommenn derc'hennañ $\mathscr{C}f$ zo dezhi ur gehelc'henn a-veskell D atalad $y = ax + b$ (gant $a \neq 0$)

mmar :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{pe} \quad -\infty \text{ (pe } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{pe} \quad -\infty)$$

hag

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ (pe } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x}{x} = a), \text{ gant } a \in \mathbb{R}^*$$

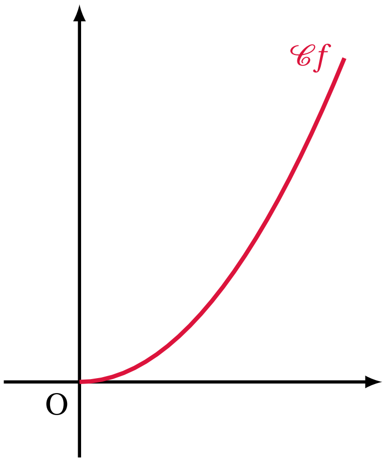
hag

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - ax\right] = b \text{ (pe } \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - ax\right] = b), \text{ ma 'z eo } b \in \mathbb{R}$$

(a ha b harzoù bevennek)

Anat eo :
Mard eo $f(x) = ax + b + \phi(x)$ gant $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$ (pe $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x) = 0$) ez eo an eeunenn D : $y = ax + b$ kehelc'h da $\mathbb{C}f$.

~ Skourroù parabolek :

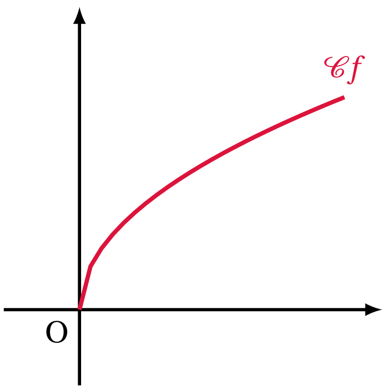


~ Despizadur :
Mar he deus ar gevreizhenn f e $+\infty$ (pe e $-\infty$) un harz anvevenn ha mard eo :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty \quad (\text{pe } -\infty)$$

$$(\text{pe } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty \ (\text{pe } -\infty)$$

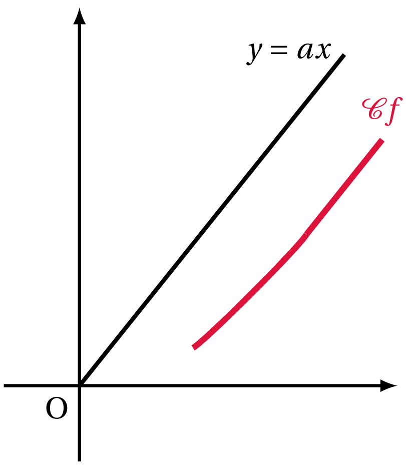
e lavarer he deus ar grommenn $\mathscr{C}f$ ur skourr parabolek e durc'hadur ahel an hedennoù.



~ Despizadur :
Mar he deus ar gevreizhenn f e $+\infty$ (pe e $-\infty$) un harz anvevenn ha mard eo :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \ \ (\text{pe } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0),$$

e lavarer he deus ar grommenn $\mathscr{C}f$ ur skourr parabolek e durc'hadur ahel al ledennoù.



~ Despizadur :
Mar he deus ar gevreizhenn f e $+\infty$ (pe e $-\infty$) un harz anvevenn ha mard eo :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \ \ (\text{pe } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a),$$

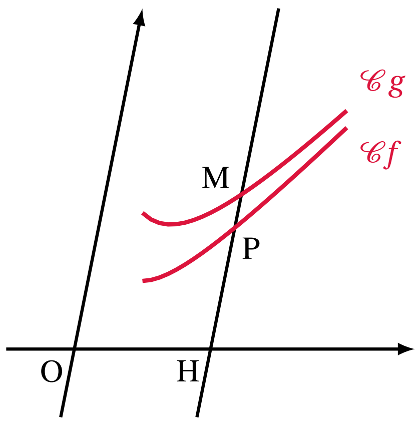
gant $a\in\mathbb{R}$ ha mard eo :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=+\infty \text{ pe } -\infty$$

$$(\text{pe } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=+\infty \text{ pe } -\infty),$$

e lavarer he deus ar grommenn $\mathscr{C}f$ ur skourr parabolek e durc'hadur an eeunenn $y = ax$.

~ Krommennoù kehelc'h :



Despizadur :
Bezet div gevreizhenn f ha g. O c'hrommennoù derc'hennañ $\mathscr{C}f$ ha $\mathscr{C}g$ a vez lavaret krommennoù kehelc'h (an eil d' eben) mard eo :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$$

$$\text{pe} \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$$

Evezhiadenn :

$$\lim_{x\to+\infty}\overline{\text{PM}}=0 \quad \text{pe} \quad \lim_{x\to-\infty}\overline{\text{PM}}=0$$

9. *Taolenn an argemmoù* : Ur benveg kendodiñ eo taolenn an argemmoù ma tastumer an disoc'hoù gounezet e-ser studi ar gevreizhenn.

10. *Poentoù dibarek* : War-benn tresañ ar grommenn e saveler daveennoù un nebeut poentoù, ouzhpenn ar re veneget amañ diaraok. Da skouer : ar poent kenskej (unel dre ret mar bez unan) gant ahel an hedennoù $(0, f(0))$ mard eo $0 \in \mathscr{D}f$; ar poent(où) kenskej gant ahel al ledennoù mar bez anezho. O ledennoù a wir an atalad $f(x) = 0$ hag anvet int "mannoù" ar gevreizhenn ; diouzh ret, daveennoù ar poentoù kenskej gant ar c'hehelc'hennoù a-zremm hag a-veskell. Da heul e saver un daolennad werzhadoù hag a-wechoù e klasker atalad ur spinenn en ur poent deurus.

11. *Elfennoù kemparzh* : Alies e verzher goude taol un ahel pe ur c'hreiz kemparzh. Klask a reer o savelañ dre ur c'hemm aheliou. Bezet $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un dealf hag Ω ur poent ledenn x_Ω ha hedenn y_Ω en dealf $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Bezet ur poent M e zaveennoù (x, y) en dealf $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ hag (X, Y) en dealf $\left(\Omega, \vec{i}, vvj\right)$. Bez' hon eus neuze ar reollunioù kemmañ aheliou dre dreuzkludadur (kemmañ orin) :

$$\begin{cases} x = x_\Omega + X \\ y = y_\Omega + Y \end{cases}$$

Hentenn 1 (dealf diaskouer) :

Da zezren ez eus evit $\mathscr{C}f$ un ahel kemparzh (D) atalad $x = x_0$ e skriver atalad $\mathscr{C}f$ en un dealf $\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ma'z eo Ω ur poent diforzh eus (D), e rezh $Y = g(X)$ hag e tiskouezer ez eo hebar g.

Hentenn 2 (dealf diforzh) :

Da zezren ez eus evit $\mathscr{C}f$ ur c'hreiz kemparzh Ω e skriver atalad $\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ e rezh $Y = g(X)$ hag e tiskouezer ez eo ampar g.

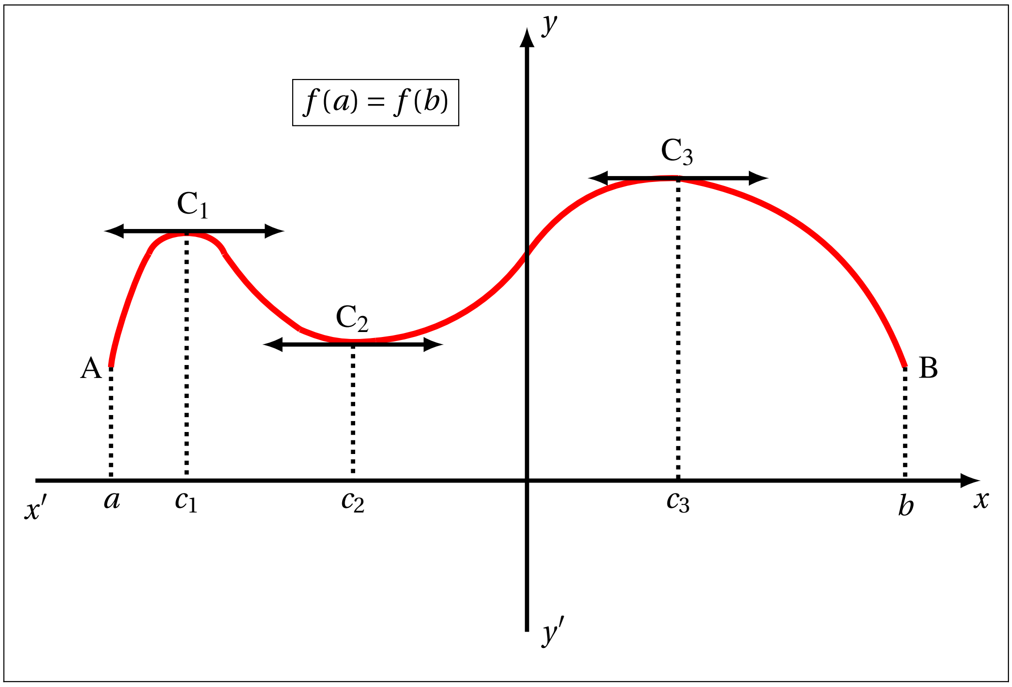
206 DELAKADENN ROLLE

• Delakadenn Rolle :

Bezet f ur gevreizhenn niverel savelet war un entremez $[a, b]$ eus $\mathbb{R}$ o wiriañ an tri amveziadmañ da heul (amveziadoù Rolle) :

$$\begin{cases} \sim \text{ kendalc'hek eo } f \text{ war } [a,b] \\ \sim \text{ Diarroudadus eo } f \text{ war } [a,b] \\ \sim \ f(a) = f(b) \end{cases}$$

Neuze ez eus da nebeutañ ur gwerc'hel c enbeziat en entremez $]a, b[$, hevelep ma 'z eo $f'(c) = 0$.



Desteriadur kevregat :

Ar blaenenn o vezañ daveet d'an dealf $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, bezet $(\mathscr{C}f)$ ar grommenn o terc'hennañ ur gevreizhenn f savelet war $[a,b]$ hag a wir amveziadoù Rolle.
Bezet A$\big(a,\ f(a)\big)$ ha B$\big(b,\ f(b)\big)$ pennoù $(\mathscr{C}f)$.

$f(a) = f(b)$ ha neuze ez eo AB kenstur da $x'x$. Delakadenn Rolle a gevaraez diogeliñ ez eus da nebeutañ ur poent C eus $(\mathscr{C}f)$ diforc'h diouzh A ha B ma'z eo ar spinenn da $(\mathscr{C}f)$ kenstur da $x'x$.

Evezhiadennoù :

~ Un delakadenn vezoud eo delakadenn Rolle : ne gevaraez ket savelañ ar gwerc'hel(ion) c, na zoken rakwelout an niver anezho. Al liesañ e vez arveret an delakadenn en degouezhioù ma n'eo ket ezpleg $f(x)$, pe ez eo dic'hallus savelañ $f'(x)$, pe drezek diskoulmañ $f'(x) = 0$, pe en degouezhioù ma laz bezoud c tra ken.

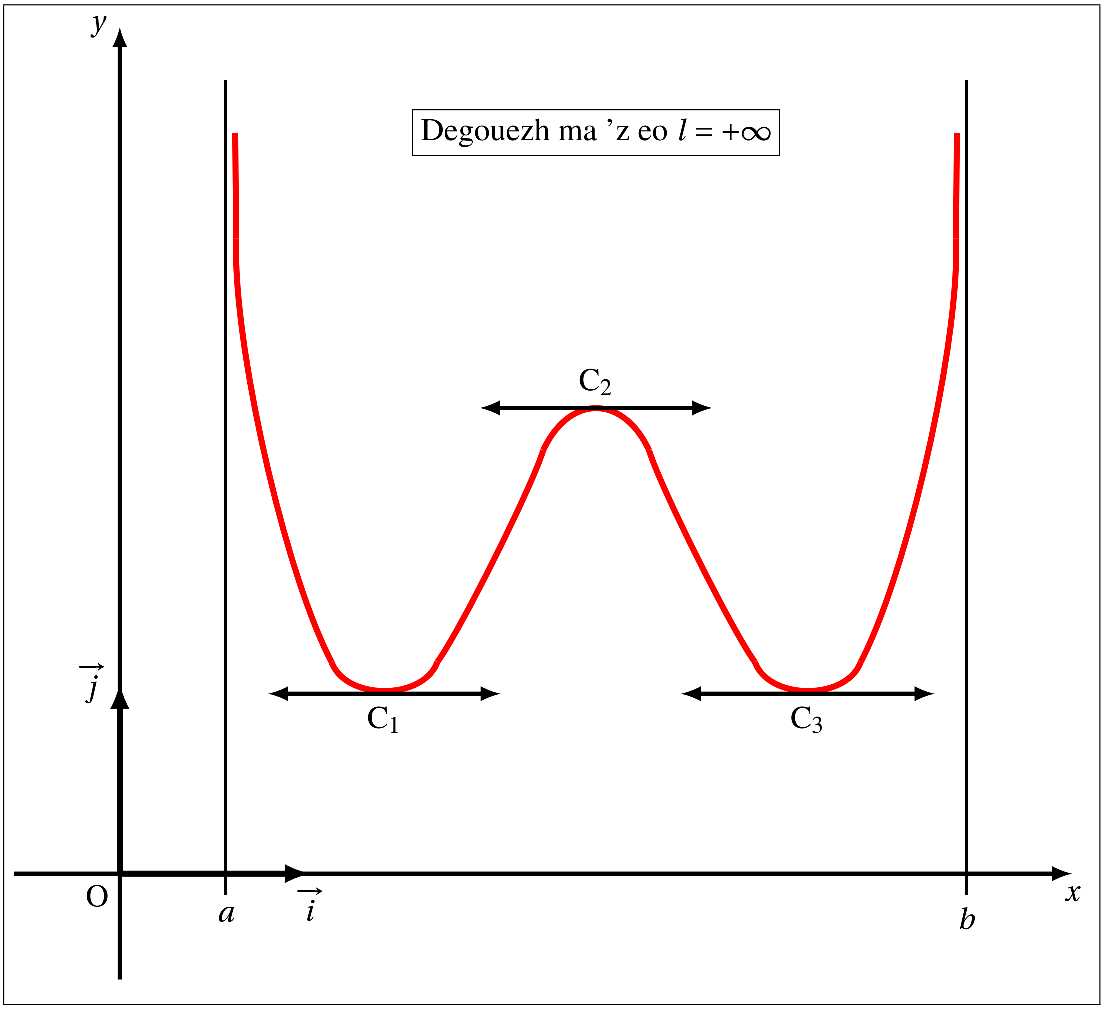
~ Spirus eo an tri amveziad, n'eo ket ret avat, evit ma ve eus $c \in [a,b]$, hevelep ma ve $f'(c) = 0$. Diziouerus ez int avat da zedalvout delakadenn Rolle hag arabat ankouaat hini ebet anezho.

~ Notomp e c'hell f na vezañ diarroudadus en a pe e b, hogen rankout a ra bezañ kendalc'hek war $[a,b]$. Anat eo, mard eo f diarroudadus war $[a,b]$ ez eo kefleuniet an daou amveziad kentañ hag a-walc'h neuze kaout $f(a) = f(b)$.

• **Hollekadur delakadenn Rolle :**

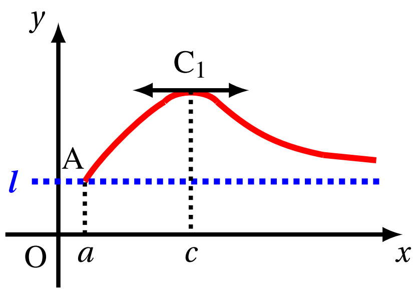
1. Mard eo f diarroudadus war $]a,b[$ (kendalc’hek war $[a,b]$ enta) ha mard eus eus an harzoù $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ha $\lim_{x\to b^-} f(x)$ ha mard int par da l (ur gwerc’hel pe $+\infty$ pe $-\infty$), neuze ez eus eus $c \in [a,b]$, hevelep ma’z eo $f'(c) = 0$.

Mard eo bevennek l e c’halver g askouezhad f dre gendalc’hegezh da $[a,b]$, o todiñ :
$g(a) = g(b) = l$ ha $g(x) = x$, mard eo $x \in [a,b]$, ha goude e tedalvezer delakadenn Rolle d’ar gevreizhenn g a wir an amveziadoù.
An degouezh ma’z eo anvevenn l a weler war al lun amañ dindan :

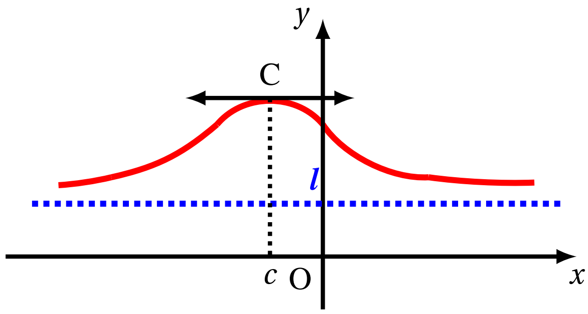


2. Mard eo f diarroudadus war $]a,b[$ (kendalc’hek war $]a,b[$ enta), gant marteze $a = +\infty$ pe $b = -\infty$ ha mard eo $\lim_a f = \lim_b f = l$, $l \in \mathbb{R}$ pe $l = -\infty$, pe $l = +\infty$, neuze ez eus $c \in [a,b]$, hevelep ma’z eo $f'(c) = 0$.

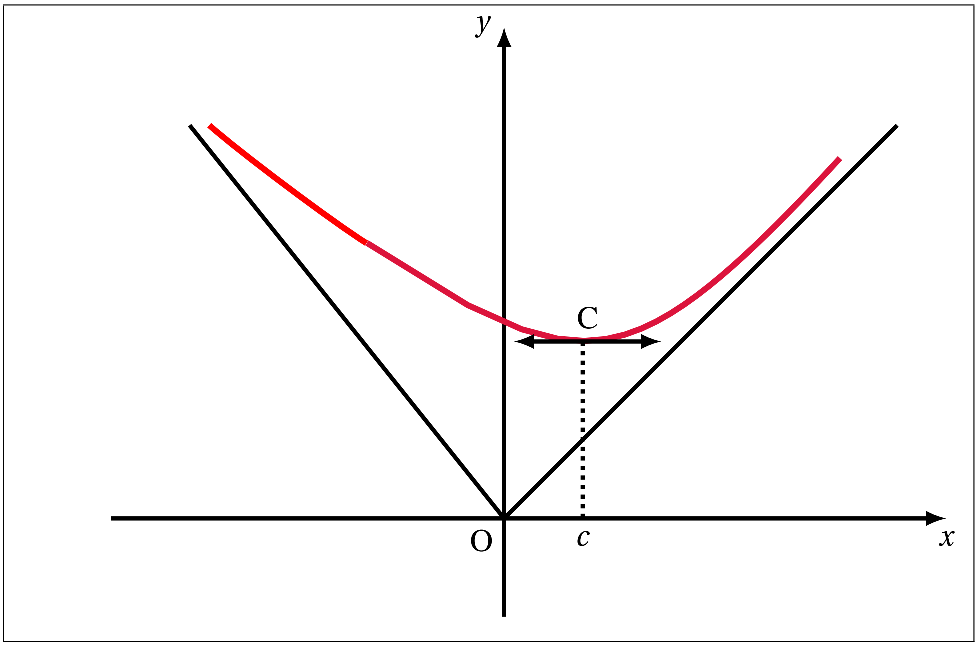
$$l = f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \ (b = +\infty)$$



$$l = f(a) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$
$$(a = -\infty; \quad b = +\infty)$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad (a = -\infty, \quad b = +\infty, \quad l = +\infty)$$



207 DELAKADENN AR C'HRESKOÙ BEVENNEK

• **Kentañ dezrevell an delakadenn :**

Mard eo f ur gevreizhenn kendalc'hek war an entremez $[a, b]$ ha diarroudadus war $]a, b[$, neuze ez eus da nebeutañ ur gwerc'hel c eus $]a, b[$, hevelep ma'z eo :

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Desteriadur kevregat :

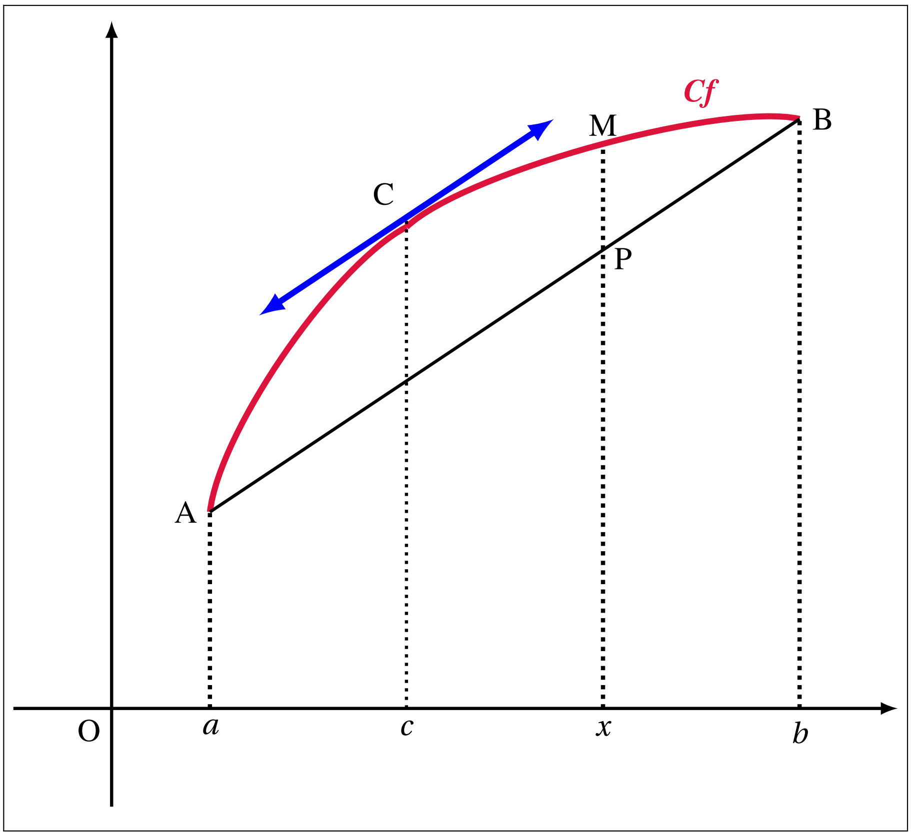
An delakadenn a gevaraez diogeliñ ez eus ur poent C da nebeutañ war ar grommenn o terc'hennañ f, diforc'h diouzh $\mathrm{A}\left(a,\ f(a)\right)$ ha $\mathrm{B}\left(b,\ f(b)\right)$, ma'z eo ar spinenn kenstur d'an eeunenn AB. Evit e zezren e teseller, evit nep x eus $]a, b[$, ar poentoù $\mathrm{M}\left(x,\ f(x)\right)$ eus $(\mathscr{C}f)$ ha

$$\mathrm{P}\left(x,\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.x\right).$$

Arloañ a reer delakadenn Rolle ouzh ar gevreizhenn g savelet dre:

$g(x) = \overline{\mathrm{PM}} = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$. Bastañ a ra da amveziadoù Rolle ha neuze : $c \in [a, b],\ g'(c) = 0$.

Dre erlec'hiañ : $f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ evit $x \in]a, b[$ ouzh $g'(x)$ e tezreer an delakadenn.



• Eil dezrevell :

Dodomp $h = b - a$ hag evit $c \in]a, b[\iff c = a + \theta \cdot h$, gant $0 < \theta < 1$. Dont a ra : mard eo f kendalc'hek war $[a, a+h]$ ha diarroudadus war $]a, a+h[$ $(h > 0)$, neuze ez eus $\theta \in]0,\ 1[$, hevelep ma'z eo :

$$\boxed{f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a + \theta.h) \quad (0 < \theta < 1)}$$

• Delakadenn (Dibarder ar c'hreskoù bevennek) :

Mar gwir ur gevreizhenn f savelet war un entremez $[a, b]$ amveziadoù delakadenn ar c'hreskoù bevennek hag ouzhpenn se mard eo bonnet $f'(x)$ war $]a, b[$, eleze ez eus m ha M gwerc'hel hevelep ma'z eo :

$$\forall x \in]a, b[\quad m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M},$$

neuze :

$$\boxed{m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \mathrm{M}}$$

<u>Evezhiadennoù :</u>

~ Un dro dibarek pouezus eo an hini ma vez ur gevreizhenn f diarroudadus war $[a,\ b]$ ha kendalc'hek f' war $[a, b]$. Neuze, o vezañ ma'z eo f' kendalc'hek war $[a, b]$ ez eo bonnet war $[a,\ b]$ ha bastañ a ra f da amveziadoù Rolle. Skouer : ar gevreizhenn sinuz zo diarroudadus ha kendalc'hek he diarroudenn war nep entremez $[a, b]$ eus $\mathbb{R}$, rak he diarroudenn kosinuz zo kendalc'hek war nep entremez $[a,\ b]$. Hogen, evit nep x eus$[a, b]$ ez eus $-1 \leqslant cos x \leqslant 1$ ha dibarder ar c'hreskoù bevennek a gevaraez dezren :

evit nep $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a \leqslant b)$, $-1 \leqslant \dfrac{\sin b - \sin a}{b - a} \leqslant 1$

~ Gallout a reer kaout ur stern eus ar c'heñver :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b\ :$$

$$\forall x \in]a,b[\ m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M} \Longrightarrow \forall (x_1,x_2) \in ([a,b])^2\ ;\ (x_1 < x_2),$$

$$m \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \mathrm{M}$$

• **Rezh all delakadenn ar c'hreskoù bevennek :**

Bezet ur gevreizhenn f diarroudadus war un entremez I. Mard eus eus ur gwerc'hel M muiel, hevelep ma'z eo evit nep x eus I : $|f'(x)| \leqslant \mathrm{M}$, neuze evit a ha b diforzh eus I ez eus :

$$|f(b)-f(a)| \leqslant \mathrm{M}|b-a|.$$

• **Dedalvezadur da ziarroudadusted f a-zehou en a (hag a-gleiz e b) :**

Delakadenn :

Mard eo f ur gevreizhenn kendalc'hek war $[a,b]$, diarroudadus war $]a,b[$ ha mard eus evit $f'(x)$ eus un harz bevennek l pe anvevenn pa denn x war-du a^+ (a-getep l' pa denn x war-du b^-), neuze :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \text{ (a-getep : } \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = l'$$

Da heul, mard eo bevennek l ez eo f diarroudadus a-zehou en a (a-getep a-gleiz e b).

Teurel evezh :

Faos eo keveskemmenn an delakadenn. E gwir e c'hell bezañ eus $f'(a)$ ha padal $f'(x)$ n'he deus ket a harz pa $x \to a^+$ (ent dibarek ma n'eo ket kendalc'hek f' en a). Da skouer :

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ mard eo } x \neq 0 \text{ ha } f(0) = 0.$$

O vezañ ma'z eo bonnet ar gevreizhenn sinuz, pa $x \to 0$, $\frac{1}{x}$ a denn war-du an anvevenn gant arouez x, hogen $\sin \frac{1}{x}$ a chom kantet etre -1 ha 1 ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Neuze ez eo kendalc'hek f e 0. Desellomp un entremez $[0,\ b]$, ma'z eo $b \in \mathbb{R}^{+*}$, kendalc'hek eo f war $[0,\ b]$ ha diarroudadus war $]0,\ b[$. Da studiañ an diarroudadusted e 0 e c'haller klask arloañ an delakadenn usveneget ha gwelout hag he deus $f'(x)$ un harz e 0. Diarroudadus eo f war $\mathbb{R}^*$ ha $f'(x) = 2x \sin x - \cos \frac{1}{x}$ hag o vezañ n'eus harz ebet gant $\cos \frac{1}{x}$ pa $x \to 0^+$, $f'(x)$ n'he deus ket a harz pa $x \to 0^+$; ne c'haller ket arloañ an delakadenn enta. Padal, mar klasker war-eeun hag eñ zo f diarroudadus e 0 e kas ar jedadur $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$ da $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$; pezh a gevaraez dezren ez eo f diarroudadus e 0 ha $f'(0) = 0$.

HEULIADOÙ NIVEREL

208 HEULIADOÙ NIVEREL

• **Despizadur 1 :**

Un heuliad niverel u zo ur gevreizhenn niverel savelet war $\mathbb{N}$ pe war un isteskad eus $\mathbb{N}$ (angoullo) D o kevrediñ ouzh pep naturel n eus he savelva D ur gwerc'hel (hag unan hepken) $u(n)$ (delvad n dre u) a vez notet u_n (u dregisverk n). Alies e noter (u_n) an heuliad u.

Skrivet e vo neuze :

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{pe } \ D \longrightarrow \mathbb{R})$$

$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

• **Despizadur 2 :**

Mard eo savelet u war un isteskad D bevennek eus $\mathbb{N}$ (bevennek eo niver an elfennoù eus D) ez eo bevennek neuze an heuliad u. Mard eo D un isteskad anvevenn eus $\mathbb{N}$ (betek bezañ par da $\mathbb{N}$) ez eo anvevenn an heuliad u neuze.

• **Despizadur 3 :**

Termenoù an heuliad u a reer eus delvadoù an elfennoù n eus D dre u.

<u>Evezhiadenn</u> : Mard eo bevennek an heuliad u ez eo bevennek niver delvadoù an elfennoù n eus D (dre ret, rak pep n eus D en deus un delvad u_n d'ar muiañ), neuze ez eo bevennek niver termenoù an heuliad u. Hogen an heuliad u a c'hell bezañ anvevenn ha niver termenoù u a c'hell bezañ bevennek, rak elfennoù anpar eus D (anvevenn) a c'hell kaout an un delvad u_n dre u, ma n'eo ket ensaezhat u. Merzhout avat : mard eo anvevenn niver an termenoù, neuze ez eo anvevenn D dre ret.

• Saveladur un heuliad :

~ Mard eo bevennek un heuliad (u_n) e c'hell bezañ savelet dre roll e dermenoù (an degouezh eo e bevoniezh, en armerzh, pe e nep domani kantouezel all, ma vez savet rolloù muzuliadoù pe roadennoù stadegel. E se e komzer ivez a heuliad stadegel, da skouer).

~ Evit a sell an denesadur jedoniel ez eus daou zoare da savelañ un heuliad :

* Dre ur gevreizhenn ezpleg : $u_n = u(n)$

* Dre un daveadur darren : an termen kentañ a roer hag ivez un daveadur oc'h eren daou pe lies termen kenheuilh :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, \ldots) \end{cases} \qquad \text{Heuliadoù darren a reer anezho.}$$

• Despizadur 4 :

~ Kengresk eo an heuliad (u_n) war D ($\subseteq$, $\mathbb{N}$) mmard eo :

$\forall n \in \mathrm{D},\ u_n \leqslant u_{n+1} \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$

(Kengresk strizh eo (u_n) war D mmard eo $\forall n \in \mathrm{D},\ u_n < u_{n+1}$).

~ Gingresk eo an heuliad (u_n) war D mmard eo :

$\forall n \in \mathrm{D},\ u_n \geqslant u_{n+1} \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. (Gingresk strizh mmard eo <).

~ Unton war D eo an heuliad (u_n) mard eo kengresk pe c'hingresk war D hag unton strizh mard eo kengresk pe c'hingresk strizh.

~ Arstalek eo (u_n) un heuliad war D mmard eo $\forall n \in \mathrm{D},\ u_n = u_{n+1}$.

~ Trovezhiek eo (u_n) un heuliad a drovezh $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{+*}$ mard eo :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n + \mathrm{P} \in \mathrm{D},\ u_{n+\mathrm{P}} = u_n.$$

Evezhiadennoù :

~ Un heuliad a c'hell bezañ na kengresk na gingresk, evel da skouer $u_n = (-1)^n$ a zo un heuliad pebeilat (ha trovezhiek ivez a drovezh 2).

~ Evit studiañ kresk un heuliad (u_n) e klasker arouez $u_{n+1} - u_n$, evel displeget en despizadurioù amañ diaraok. Pa vez diaes ez eo amsavusoc'h studiañ ar c'heñver $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

≈ Mard eo (u_n) un heuliad dezhañ termenoù muiel strizh ez eo (u_n) un heuliad :

- kengresk mmard eo : $\forall n \in \mathrm{D},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$
- gingresk mmard eo : $\forall n \in \mathrm{D},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1.$

≈ Mard eo (u_n) un heuliad dezhañ termenoù leiel strizh, ez eo (u_n) un heuliad :

- kengresk mmard eo : $\forall n \in \mathrm{D},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$
- gingresk mmard eo : $\forall n \in \mathrm{D},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$

• **Despizadur 5 :**

~ Bezet m ha M daou werc'hel roet. Lavaret e vez ez eo m ul leiant eus an heuliad (u_n) (pe ez eo an heuliad (u_n) leiantet gant m pe e leiant m an heuliad (u_n)) mard eo m bihanoc'h eget pe bar da nep termen u_n eus an heuliad, eleze $\forall n \in \mathrm{D},\ m \leqslant u_n$.

~ Lavaret e vez ez eo M ur muiant eus an heuliad (u_n) (pe ez eo an heuliad (u_n) muiantet gant M pe e vuiant M an heuliad (u_n)) mard eo $\forall n \in \mathrm{D},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$.

~ Lavaret e vez ez eo bonnet an heuliad (u_n) mard eo muiantet ha leiantet war un dro, eleze mard eus eus daou werc'hel m ha M, hevelep ma'z eo :

$$\forall n \in \mathrm{D},\ m \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}.$$

Evezhiadenn :

Anat eo ned eo ket unel ar muiantoù hag al leiantoù, mar bez.

209 HEULIAD NIVERONIEL

• **Despizadur :**

Graet e vez heuliad (pe a-wechoù argammedadur) niveroniel e argammed r eus un heuliad (u_n), hevelep ma'z eo :

$\forall n \in \mathrm{D},\ u_{n+1} = u_n + r$, ma'z eo r un arstalenn werc'hel anvet *argammed* an heuliad niveroniel.

• **Perzhioù :**

~ Mard eo u_1 termen kentañ un heuliad niveroniel (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$, a argammed r ha mard eo u_n an n-vet termen $n \in \mathbb{N}^*$, neuze $u_n = u_1 + (n-1)r$. Mard eo u_0 an termen kentañ $(n \in \mathbb{N})$ e teu neuze $u_n = u_0 + nr$.

~ O vezañ ma'z eo $\forall n \in \mathrm{D}$, $u_{n+1} - u_n = r$, emañ kresk an heuliad niveroniel e dalc'h arouez r hepken. Mard eo $r = 0$ ez eo arstalek, mard eo $r > 0$ ez eo kengresk strizh ha mard eo $r < 0$ ez eo gingresk strizh.

~ Da heul, mard eo savelet an heuliad (u_n) evit $n \in \mathrm{D}$, D o vezañ un isteskad anvevenn eus $\mathbb{N}$ ha mard eo $r \neq 0$, neuze e tenn u_n war-du $+\infty$ mard eo $r > 0$ ha war-du $-\infty$ mard eo $r < 0$.

~ Mard eo bevennek (D isteskad bevennek eus an teskad $\mathbb{N}$) un heuliad niveroniel (u_n) (eleze $u_1, \ldots, u_n$), neuze sammad daou dermen keitpell diouzh pennoù an heuliad u_1 ha u_n, eleze $x = u_{1+p}$ ha $y = u_{n-p}$ gant $p \leqslant n-1$ (p kevan) zo par da $u_1 + u_n$.

~ Bezet $\mathrm{S}_n = u_1 + \cdots + u_n$, sammad an n termen eus un heuliad niveroniel bevennek (pe an n termen kentañ eus un heuliad anvevenn, anvet sammad darnel). Dienaat a reer :

$$\boxed{\mathrm{S}_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)r\right]} \quad \text{pe} \quad \boxed{\mathrm{S}_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r}$$

210 HEULIAD MENTONIEL

• **Despizadur :**

Bezet (u_n) $n \in \mathrm{D}$ ma'z eo $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{N}$, un heuliad savelet evit $n \in \mathrm{D}$ (bevennek pe anvevenn). Un heuliad (pe a-wechoù argammedadur) mentoniel eo (u_n) e argammed q (gwerc'hel anvannel roet) mard eo $u_{n+1} = q \cdot u_n$ $\forall n \in \mathrm{D}$, hevelep ma'z eo $n+1 \in \mathrm{D}$.

• **Perzhioù :**

~ Mard eo u_1 termen kentañ an heuliad mentoniel e argammed q, neuze an n-vet termen zo u_n ha $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Mard eo u_0 an termen kentañ ez eo $u_n = u_0 \times q^n$. Pe, mard eo n_0 kentañ isverk an heuliad : $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$.

~ Mard eo $q > 0$ ha $q \neq 1$ ez eo unton an heuliad mentoniel hag e argemmadur zo e dalc'h arouez an termen kentañ ha war un dro gwerzhad q e-keñver 1 ; mard eo $q < 0$ ez eo pebeilat an heuliad.

~ An heuliad (u_n) savelet dre $u_n = q^n$ a denn war-du $+\infty$ mard eo $q > 1$.

~ Bezet $\mathrm{S}_n = u_1 + \cdots + u_n$, sammad an n termen kentañ eus un heuliad mentoniel a dermen kentañ u_1 hag a argammed $q \neq 1$. Dienaat a reer :

$$\mathrm{S}_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Evezhiadenn : $\underbrace{u_0 + \cdots + u_n}_{n+1 \text{ termen}} = \mathrm{S}_{n+1} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

211 KENGERC'HUSTED UN HEULIAD

• **Etrezek 0 :**

Un heuliad $(u_n)_{n \in \mathrm{D}}$ (ma'z eo D un isteskad anvevenn eus $\mathbb{N}$) a gengerc'h etrezek mann mmard eo :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathrm{D},\ n > n_0 \Longrightarrow |u_n| < \varepsilon$$

~ Perzh 1 : Mard eo, adalek ur renk bennak, $|v_n| \leqslant |u_n|$ ha mar kengerc'h an heuliad (u_n) etrezek 0, neuze e kengerc'h (v_n) etrezek 0 ivez. Lavaret e vez ez eo muiantet (v_n) e gwerzh dizave gant an heuliad (u_n).

~ Perzh 2 : Nep heuliad (u_n) ma'z eo $u_n = q^n$, e argammed q hevelep ma'z eo $0 < |q| < 1$, a gengerc'h etrezek 0. An heuliadoù-se zo heuliadoù mentoniel a zo an termen kentañ 1.

Ar perzh-mañ a gevaraez diskouez e kengerc'h S_n etrezek $\frac{u_1}{1-q}$, gant $n \to +\infty$, mard eo $0 < |q| < 1$.

~ Perzh 3 : Nep heuliad (u_n) o kengerc'hañ etrezek 0 zo bonnet.

~ Perzh 4 : Mar kengerc'h (u_n) etrezek 0 ha mar kengerc'h (v_n) etrezek 0, neuze $(u_n + v_n)$ a gengerc'h etrezek 0. Mar kengerc'h (u_n) etrezek mann ha mard eo bonnet (v_n), neuze $(u_n \cdot v_n)$ a gengerc'h etrezek 0. (Ent dibarek mar kengerc'h an daou heuliad etrezek 0 e kengerc'h o liesâd etrezek 0 ivez).

• **Etrezek *l* :**

Dezren a reer diwar ar gengerc'husted etrezek 0 ; (u_n) a gengerc'h etrezek l mmar kengerc'h an heuliad $(u_n - l)$ etrezek 0. Eleze :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathrm{D},\ n > n_0 \Longrightarrow \left|u_n - l\right| < \varepsilon.$

Skrivañ a reer neuze : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l.$

~ Perzh 1 : Mard eo muiel termenoù un heuliad $(u_n)_{n \in \mathrm{D}}$ $(\forall n \in \mathrm{D},\ u_n > 0)$, e harz, mar bez anezhañ, a vo muiel pe vannel dre ret. (Mard eo leiel termenoù $(u_n)_{n \in \mathrm{D}}$ e vo leiel pe vannel e harz, mar bez anezhañ).

~ Perzh 2 : Mar kengerc'h an heuliad (u_n) etrezek l ha mar kengerc'h (v_n)etrezek l', neuze $(u_n + v_n)$ a gengerc'h etrezek $l + l'$ hag $(u_n \cdot v_n)$ a gengerc'h etrezek $l \cdot l'$.

Evezhiadenn : Un heuliad (u_n) o kengerc'hañ etrezek ur gwerc'hel l a vez lavaret kengerc'hus. Nep heuliad nad eo ket kengerc'hus a vez anvet kenforc'hus. Da neuze, un heuliad a zo e dermen hollek u_n o tennañ war-du $+\infty$ pe $-\infty$ gant $n \to +\infty$ zo kenforc'hus. Pe un heuliad n'en deus ket a harz pa gresk n, evel an heuliad pebeilat $u_n = (-1)^n$ da skouer, zo kenforc'hus ivez.

~ Perzh 3 : Nep heuliad kengerc'hus etrezek l zo bonnet (faos eo ar geveskemmenn). E gwir, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, hevelep ma'z eo :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon.$$

~ <u>Perzh 4</u> : Mard eo (u_n) un heuliad dezhañ termenoù muiel, neuze mar kengerc'h (u_n) etrezek l ez eo $l \geqslant 0$ (A-getep mard eo (u_n) un heuliad dezhañ termenoù leiel ha mar kengerc'h etrezek l, neuze $l \leqslant 0$).

~ <u>Perzh 5</u> : Mar kengerc'h (u_n) etrezek l, neuze an heuliad $\left|(u_n)\right|$ a gengerc'h etrezek $\left|l\right|$.

~ <u>Perzh 6</u> : Mard eo muiantet an termenoù u_n adalek ur renk n_0 bennak gant termenoù v_n un heuliad kengerc'hus (v_n) e kengerc'h neuze (u_n)etrezek un harz l, hevelep ma'z eo $l \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

• **"Jedadurioù" war harzoù heuliadoù kengerc'hus :**

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \ (l \in \mathbb{R}) \\ \text{hag} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = m \ (m \in \mathbb{R}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + m & (1) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n = l \cdot m & (2) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l (\forall \lambda \in \mathbb{R}) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \ (l \in \mathbb{R}) \\ \text{hag} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = m \ (m \in \mathbb{R}^*) \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{m} \qquad (4)$$

Mard eo $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ha mard eo bonnet (v_n), neuze :

$$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n = 0 \qquad (5)$$

<u>Evezhiadenn</u> :

Dienaat a reer ez ampar teskad an heuliadoù niverel savelet war an teskad $\mathbb{N}$, evit ar sammadur hag al liesadur diavaez dre ur gwerc'hel $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un egor sturiadel war $\mathbb{R}$ hag ar perzhioù (1) ha (3) a gevarez diogeliñ ez ampar isteskad F an heuliadoù gwerc'hel kengerc'hus un isegor sturiadel war $\mathbb{R}$ eus egor sturiadel an heuliadoù gwerc'hel.

• **Heuliadoù kefin :**

Daou heuliad (u_n) ha (v_n) zo kefin mard eo kengresk (u_n) ha gingresk (v_n) (pe ar gin evel reizh) ha mar kengerc'h $(u_n - v_n)$ etrezek 0.

Delakadennoù darbennet :

1. Kengerc'hus eo nep heuliad kengresk ha muiantet.
2. Kengerc'hus eo nep heuliad gingresk ha leiantet.
3. Bezet (u_n) un heuliad bennak savelet war D. Mard eo an heuliad (v_n) o kengerc'hañ etrezek l hag un eil heuliad (w_n) o kengerc'hañ etrezek l ivez, savelet war D, hevelep ma'z eo $\forall n > n_0$ ($n_0 \in$ D), $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ neuze e kengerc'h (u_n) etrezek l ivez.
4. Daou heuliad kefin zo kengerc'hus hag an un harz o deus.
5. Bezet (u_n) un heuliad kengerc'hus e harz l hag f ur gevreizhenn niverel kendalc'hek en l (eleze savelet en l). Dienaat a reer ez eo kengerc'hus an heuliad kediat $\big(f(u_n)\big)$ hag ez eo e harz $f(l)$. Skrivañ a c'haller neuze :

   mard eo $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ha mard eo kendalc'hek f en l,

   neuze ez eo $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(f(u_n)\big) = f(l)$.

Dedalvezadur pouezus : Ar gevreizhenn f a savel un daveadur darren etre daou dermen kenheuilh un heuliad, eleze savelet eo an heuliad (u_n) dre un daveadur eus ar rizh : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Alese ar perzh-mañ : Mard eo $(u_n)_{n\in \mathrm{D}}$ un heuliad darren savelet dre an daveadur $u_{n+1} = f(u_n)$ ha mard eo kengerc'hus (u_n) etrezek un harz l, hevelep ma ve kendalc'hek f en l, neuze ez eo l diskoulm an atalad $l = f(l)$.

• **Kounañ :**

Kenforc'hus eo an heuliad (u_n) mard eo $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ pe $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ pe ma n'eus harz ebet (tri degouezh zo enta). E se e lavarer ez eo harz (u_n) $+\infty$ gant $n \to +\infty$ mmard eo :

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathrm{D},\ n > n_0 \Longrightarrow u_n > \mathrm{A}}$$

hag ez eo harz (u_n) $-\infty$ gant $n \to +\infty$ mmard eo :

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathrm{D},\ n > n_0 \Longrightarrow u_n < -\mathrm{A}}$$

• **Perzhioù :**

a) Mard eo kenforc'hus an heuliad $(|u_n|)$ neuze ez eo an heuliad (u_n) kenforc'hus ivez.

b) Mard eo kenforc'hus an heuliad (u_n) etrezek $+\infty$ ha mard eo adalek ur renk n_0, $v_n > u_n$, neuze e kenforc'h (v_n) etrezek $+\infty$ ivez.

c) Mard eo kenforc'hus an heuliad (u_n) etrezek $-\infty$ ha mard eo adalek ur renk n_0, $v_n < u_n$, neuze e kenforc'h (v_n) etrezek $-\infty$ ivez.

d) Nep heuliad unton hag anvonnet zo kenforc'hus.

• **"Jedadurioù" war harzoù an heuliadoù (kengerc'hus pe genforc'hus) :**

~ Mard eo $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (pe $-\infty$) ha mard eo leiantet (v_n) gant $m > 0$, neuze :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty \text{ (pe } -\infty)$$

~ Mard eo $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ha mard eo leiantet (v_n), neuze :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

~ Mard eo $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ha mard eo leiantet (v_n), neuze :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$$

A-wechoù e c'haller savelañ harzoù an heuliadoù $(u_n + v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$ hag $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ diwar harzoù an daou heuliad.

212 POELLATA DRE ZARREN

Arveret e vez alies an kez poellata da savelañ ur perzh P e dalc'h ur c'hevan naturel n. An dienadur a c'hoarvez eus daou dennad, diazezet war aksiomenn darren an teskad $\mathbb{N}$:

1. Savelet eo ar perzh P evit $n = n_0$, ma'z eo $n_0 \in \mathbb{N}$.
2. $\forall m \in \mathbb{N}$, hevelep ma'z eo $m \geqslant n_0$ (ar perzh P zo gwir evit m) a empleg (Gwir eo P evit $m+1$).

Neuze, mard eo gwiriet an daou amplegad-se e tastumer ez eo gwir ar perzh P evit nep kevan $n \geqslant n_0$.

Evezhiadenn : Ur perzh P a c'hell bezañ gwir adalek ur renk roet hepken.

ARLOADURIOÙ POENTEL

213 ARLOADURIOÙ POENTEL ER BLAENENN

• Graet e vez treuzfurmadur (arveret e vez ivez ar pennanor treuzfurmiñ) eus nep kesaezhadur eus un egor keouenn warnañ e-unan. E se ez eo "treuzfurmadur" kenster da "kevreizhenn gesaezhat" : pep poent en deus un delvad unel ha pep poent en deus ur c'hentorad unel ivez. Skrivañ a reer :

$$\boxed{f : \mathrm{M} \longmapsto f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'}$$

f o vezañ an treuzfurmiñ ez eo ar c'hentorad M an *treuzfurmed*, an delvad M′ an *treuzfurmad*.

• *Anargemmat* eo M dre un arloadur f mard eo en arun gant e zelvad :

$$\mathrm{M} = f(\mathrm{M}).$$

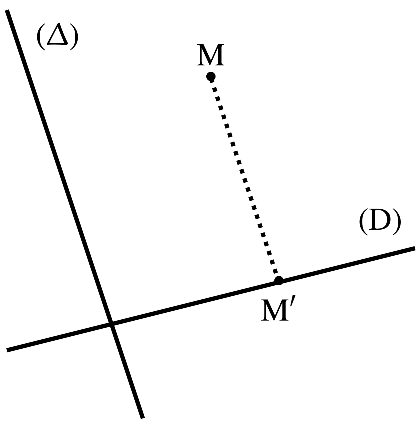
• *Anargemmat* eo ul lun (E) mard eo en arun gant e zelvad : $(\mathrm{E}') = (\mathrm{E})$.

Daou zoare zo :

a) pe ez eo anargemmat pep poent eus (E) : anargemmat "poent ha poent" eo (E) ;

b) pe ned eo ket anargemmat poentoù (E), met emañ atav o delvadoù war (E) : anargemmat "a-vloc'h" eo (E).

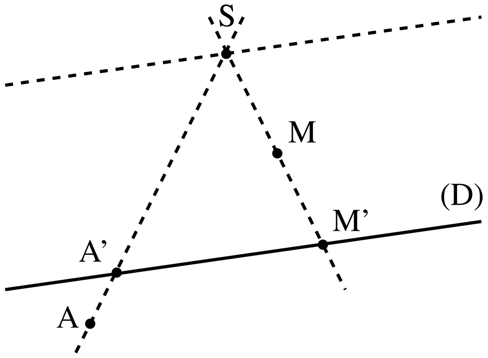
• **Bannañ a-genstur war un eeunenn :**



M′ zo delvad M er *bannadur* p war an eeunenn (D) a-genstur da (Δ) mmard emañ M′ war (D) ha mmard eo (MM′) kenstur da (Δ). Pep poent eus (MM′) anvet *bannerenn* zo dezho an un *bannad* M′. Neuze ez eo kentoradoù M′ holl boentoù ar vannerenn. Da heul ned eo ket p un arloadur kesaezhat ha ned eo ket un "treuzfurmadur" er ster strizh. Delvad ar blaenenn zo an eeunenn (D). Delvad (D) eo (D) : anargemmat eo poent ha poent.

Anv a reer a *serzhvannañ* mard eo (Δ) a-serzh war (D).

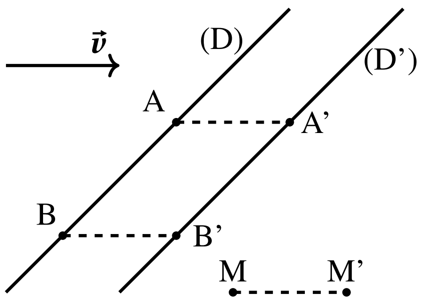
• **Bannañ kreizel :**



Bezet (D) un eeunenn hag S ur poent er-maez eus (D). M' zo delvad M er bannadur a greiz S war an eeunenn (D) mmard emañ M' war (D) ha mar tremen an eeunenn (MM') dre S. *Diarsell* a reer ivez eus ar bannadur-se. S a anver ivez *sellboent*. (D) zo *eeunenn ar bannadoù*. (SM) a vez graet *bannerenn* ar poent M.

E se e weler ez eus da M' un anvevennad kentoradoù ha ned eo ket an diarsell ur c'hesaezhadur. Mard eo (SM) kenstur da (D) n'eus delvad ebet da M ha lavaret e vez ez eo bannet e zelvad d'an anvevenn. Ar sellboent S n'en deus delvad ebet hag anargemmat eo (D) poent ha poent.

• **Treuzkludañ a sturiadell $\vec{v}$:**



An arloadur $M \longmapsto M'$, hevelep ma'z eo $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$, eo an treuzkludadur a sturiadell $\vec{v}$. Mard eo f un treuzkludañ ha mard eo A ha B daou boent a'r blaenenn, hevelep ma'z eo : $f(A) = A'$ ha $f(B) = B'$, neuze $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

Perzh naouus d'an treuzkludañ eo. An treuzkludañ a gevandalc'h an hedoù, a zezgerier dre lavarout ez eo ur *c'heitventadur*.

~ Delvad un eeunenn (D) zo un eeunenn (D') a un roud.

~ Un eeunenn kenroud gant $\vec{v}$ zo anargemmat a-vloc'h.

~ Delvad ur c'helc'h zo ur c'helc'h a un skin.

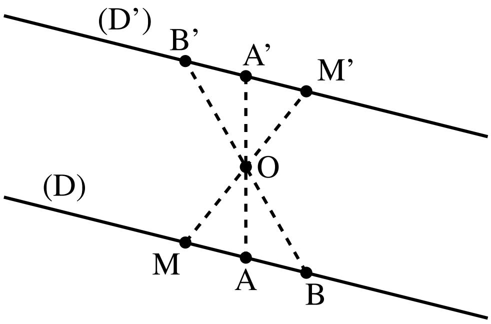
~ Delvad ur c'horn durc'haet zo ur c'horn durc'haet kenvuzul : an treuzkludañ a gevandalc'h ar c'hornioù durc'haet.

Evezhiadenn :

~ Mard eo $\vec{v} = \vec{0}$ ez eo an treuzkludadur an arunadur.

~ Mard eo $\vec{v} \neq \vec{0}$, poent ebet ned eo anargemmat.

• **Kemparzhiñ kreizel :**



M$'$ zo delvad M er c'hemparzhadur a greiz O mmard eo O kreiz ar ranneeunenn [MM$'$]. Lavarout a reer : kemparzhad M eo M$'$ pe : kemparzhek eo M ha M$'$ e-keñver O, anvet kreiz kemparzh. Bezet f ar c'hemparzhadur a greiz O. Mard eo : A$'$ = f(A) ha B' = f(B), ez eus : $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

Ar pellderioù A$'$B$'$ hag AB zo par hag ur c'heitventadur eo ar c'hemparzhadur kreizel.

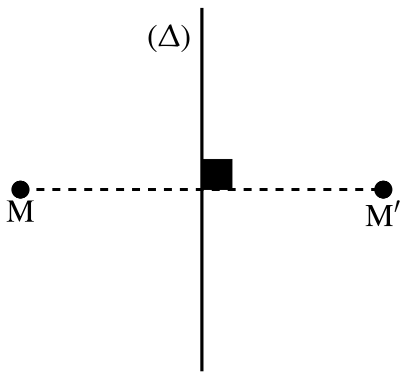
~ Delvad un eeunenn (D) zo un eeunenn (D$'$) kenroud.

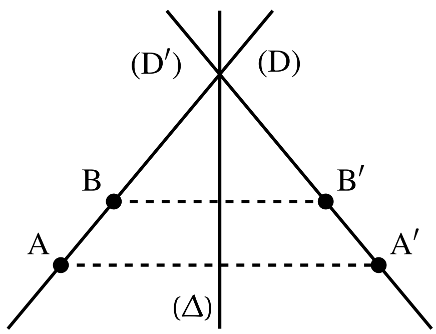
~ Delvad ur c'horn durc'haet zo ur c'horn par.

~ Un eeunenn o tremen dre O zo anargemmat a-vloc'h. Ar c'hreiz O zo ar poent anargemmat nemetañ.

~ Un atroadur eo ar c'hemparzhadur kreizel : $f^{-1} \circ f = \mathrm{I_p}$.

• **Kemparzhiñ diaskouer (e-keñver un eeunenn) :**





Kemparzhad M e-keñver an eeunenn (Δ) eo M$'$ (pe : kemparzhek eo M ha M$'$ e-keñver (Δ)) mmard eo (Δ) kreizserzhenn ar ranneeunenn [MM$'$].

An ahel kemparzh eo (Δ) hag an holl boentoù eus (Δ) zo anargemmat. Bezet f ar c'hemparzhadur-se. Mard eo :
$A' = f((A)$, ez eus : $A'B' = AB$ ha neuze ez eo ar c'hemparzhiñ ahelel ur c'heitventadur.

~ Delvad un eeunenn (D) zo un eeunenn (D'). Mar skej (D) an ahel (Δ) e skej ivez (D') an ahel (Δ) en un poent (anargemmat).

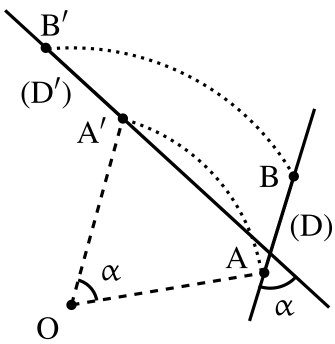
~ Mard eo (D) kenstur da (Δ) ez eo (D') kenstur da (Δ) ivez.

~ Mard eo (D) diaserzh ouzh (Δ) ez eo he delvad (D') en arun gant (D) : e se ez eo (D) anargemmat a-vloc'h.

~ Delvad ur c'horn durc'haet zo ur c'horn gourzharouez : ur c'heitventadur o kemmañ tu ar c'hornioù durc'haet eo ar c'hemparzhiñ diaskouer, a zezgerier dre lavarout ez eo ur c'heitventadur leiel.

~ Un atroadur eo ar c'hemparzhadur ahelel : $f^{-1} \circ f = I_p$.
<u>Evezhiadenn</u> : Ar c'hemparzhiñ diaskouer zo un degouezh dibarek eus ar c'hemparzhiñ a-veskell, nad eo-hi ket ur c'heitventadur, a gevandalc'h ar gorreadoù avat. Da heul, e-lec'h kemparzhiñ diaskouer (-ad, -adur) e lavarer ivez drec'hiñ (drec'had, drec'hadur).

• **C'hwelañ :**



Ar c'hweladur a greiz O hag a gorn α zo an arloadur $M \longmapsto M'$, hevelep ma'z eo :

$$OM' = OM \text{ ha muz } \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})} = \alpha.$$

Ar c'horn α-se zo ur c'horn sturiadelloù : savelet eo e vuzul modulo 2π e radianoù.

~ Mard eo $\alpha = 0$ (mod. 2π) ez eo ar c'hweladur an arunadur.

~ Mard eo $\alpha \neq 0$ (mod. 2π) ez eo ar c'hreiz c'hwelañ ar poent anargemmat nemetañ.

~ Delvad un eeunenn (D) zo un eeunenn (D'), hevelep ma'z eo :

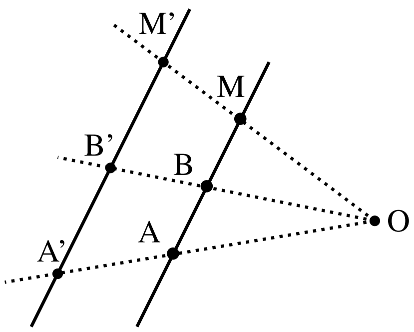
$\widehat{(D, D')} = \alpha + h\pi$ $(h \in \mathbb{Z})$ (Korn durc'haet div eeunenn andurc'haet).

~ Delvad ur regenn eeun [AB] zo un regenn eeun $[A'B']$, hevelep ma'z eo $A'B' = AB$.

~ Kevandalc'het eo ar c'hornioù durc'haet en ur c'hweladur :
ur c'heitventadur eo enta.

Evezhiadenn : Ar c'hemparzhiñ a greiz O zo ur c'hwelañ a greiz O hag a gorn π rad.

• **Heñvelstalañ :**

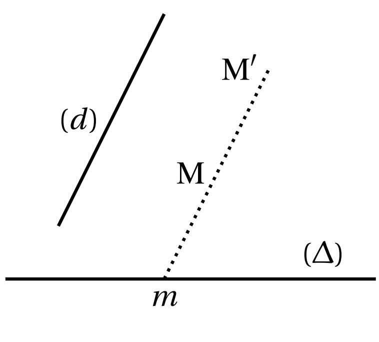


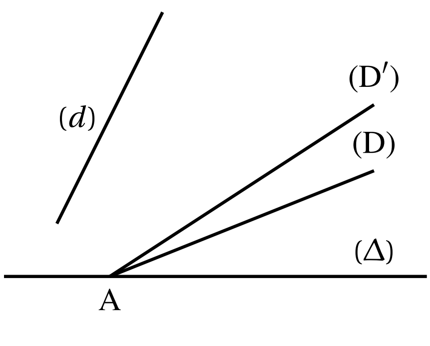
An heñvelstalañ a greiz O hag a geñver k (gwerc'hel anvannel) zo an arloadur $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}'$, hevelep ma'z eo :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = k \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

~ Mard eo $k = 1$ ez eo anargemmat pep poent a'r blaenenn. An arunadur eo an heñvelstalañ neuze.
~ Mard eo $k = -1$ ez eo an heñvelstalañ ar c'hemparzhiñ a greiz O.
~ Evit k diforzh ez eo delvad un eeunenn (D) un eeunenn (D′) kenroud. Mar tremen (D) dre O ez eo anargemmat a-vloc'h en heñvelstaladur. O eo ar poent anargemmat nemetañ mard eo $k \neq 1$.
~ Delvad ur regenn [AB] zo ur regenn [A′B′], hevelep ma'z eo : $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} = k \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Perzh naouus d'an heñvelstalañ eo mard eo $k \neq 1$. Bez' ez eus : $\mathrm{A}'\mathrm{B}' = |k| \cdot \mathrm{AB}$. An heñvelstalañ ned eo ur c'heitventadur nemet mard eo $|k| = 1$ (eleze an aruniñ pe ar c'hemparzhiñ kreizel).
~ evit $k \neq 1$, ned eo ket an heñvelstalañ ur c'heitventiñ.
~ Muiel eo an heñvelstalañ mard eo muiel k ha leiel mard eo leiel k.
~ Kevandalc'het eo ar c'hornioù durc'haet dre un heñvelstalañ.

• **Keouennañ :**





Ar c'heouennadur a ahel (Δ), a roud (d) hag a geñver k (gwerc'hel anvannel) zo an arloadur $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}'$, hevelep ma'z eo : $\overrightarrow{m\mathrm{M}'} = k \cdot \overrightarrow{m\mathrm{M}}$, m o vezañ bannad M war (Δ) a-genstur da (d). Ned eo savelet ar c'heouennañ nemet ma ned eo ket (d) kenstur da (Δ).

~ $k = 1$: an aruniñ eo ar c'heouennañ.

~ $k = -1$: ar c'hemparzh a-veskell a roud (d) hag a ahel (Δ) eo.

~ Mard eo (d) diaserzh ouzh (Δ) ez eo diaskouer ar c'heouennañ.

~ Pep poent eus (Δ) zo anargemmat.

~ Delvad un eeunenn (D) zo un eeunenn (D$'$).

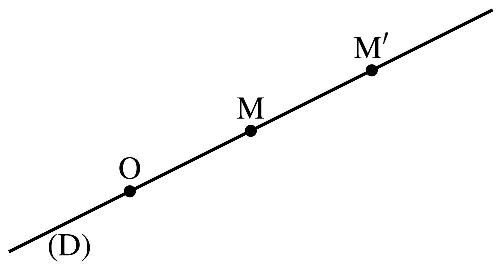
~ Mar skej (D) an ahel (Δ) en A e tremen he delvad (D$'$) dre A ivez, a zo anargemmat.

~ Mard eo (D) kenstur da (Δ) ez eo he delvad kenstur ivez.

~ Mard eo (D) kenstur da (d) ez eo anargemmat a-vloc'h.

~ Nag an hedoù, nag ar c'hornioù, nag ar gorreadoù ne vezont kevandalc'het ent hollek.

• **Ginañ :**



Ar ginadur a greiz O (anvet blein ivez) hag a c'halloud p zo an arloadur $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}'$, hevelep ma'z eo :

$$\begin{cases} \mathrm{M}' \text{ zo war an eeunenn (OM)} \\ \overline{\mathrm{OM}}.\overline{\mathrm{OM}'} = p \end{cases}$$

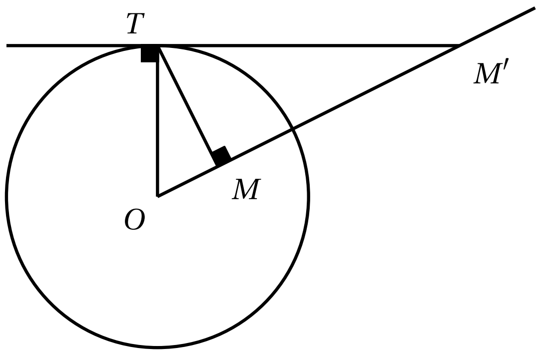
Gant $p \neq 0$:
Mard eo $p > 0$: muiel eo ar ginadur.
Mard eo p < 0 : leiel eo ar ginadur.

Ar poent nemetañ hep delvad dre ar ginadur zo ar blein O. Anat eo : mard eo $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}'$, dre an un ginadur hon eus ivez $\mathrm{M}' \longmapsto \mathrm{M}$. E se ez eo ar ginadur un arloadur atroat, un atroadur. Lavarout a reer ez eo M ha M$'$ keveleboù er ginadur (O, p) pe, kenginadoù. Mar tremen un eeunenn (D) dre O, pep poent eus (D), nemet O, en deus da zelvad ur poent eus (D) : (D) – {O} zo anargemmat a-vloc'h er ginadur.

~ Mard eo $p < 0$ emañ M ha M' a bep tu da O ha ne c'hellont ket bezañ en arun : n'eus poent anargemmat ebet enta.

~ Mard eo $p > 0$ emañ M ha M' en un tu eus O. Anargemmat eo nep poent M_0 mard eus : $\overline{\mathrm{OM}_0}\cdot\overline{\mathrm{OM}_0} = p$, eleze $\overline{\mathrm{OM}_0} = \sqrt{p}$. Bez' ez eus neuze poentoù anargemmat a zo o lec'h mentoniel ar c'helc'h kreizet en O a skin $\mathrm{R} = \sqrt{p}$.

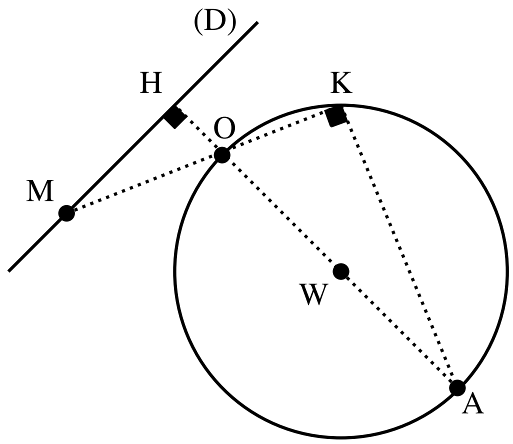
~ Evit daou boent M ha M' kenginadoù ez eus neuze : $\overline{\mathrm{OM}}\cdot\overline{\mathrm{OM'}} = \mathrm{R}^2$.



Ar c'helc'h (O,R) a savel mat tre neuze ar ginadur (O, p) : graet e vez kelc'h ginañ anezhañ ha lavaret e vez ez eo M ha M' kenginadoù e-keñver ar c'helc'h-se. Al lun a ziskouez penaos sevel ginad ur poent bennozh d'ar c'helc'h ginañ.
Hervez despizadur al liesâd skeuliadel ez eus :

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = (\overrightarrow{\mathrm{OT}})^2 = \mathrm{R}^2$$

~ Delvad un eeunenn na dremen ket dre ar blein O.



Bezet (D) un eeunenn na dremen ket dre ar blein O, H serzhvannad O war (D) hag A delvad H er ginadur (O, p). Bez hon eus enta :

$$\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{OA}} = p$$

Bezet ur poent M diforzh eus (D), K serzhvannad A war an eeunenn (OM). O tewerzhañ al liesâd sturiadel hervez daou hent e teu :

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OM}} \times \overline{\mathrm{OK}}.$$

Dezren a reer : $\overline{\text{OM}} \times \overline{\text{OK}} = p$. Neuze ez eo K delvad M er ginadur (O, p). Mar red M an eeunenn (D) e red K ar c'helc'h a skin [OA], pa'z eo serzh $\widehat{\text{OKA}}$. Delvad (D) er ginadur zo neuze ar c'helc'h a skin [OA], hep ar poent O (A o vezañ delvad dre ar ginadur eus serzhvannad O war (D)).

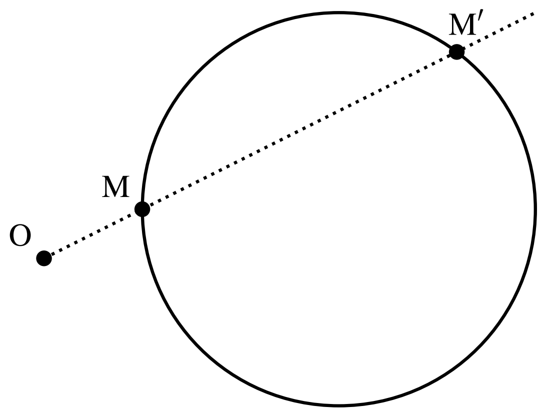
Delvad un eeunenn na dremen ket dre O (blein ar ginadur) zo ur c'helc'h o tremen dre O, tennet er-maez anezhañ ar poent O. Pa'z eo atroat ar ginadur e c'haller diogeliñ ez eo delvad ur c'helc'h o tremen dre O un eeunenn a-serzh war skin (OΩ) ar c'helc'h.

Evezhiadenn :

Delvad ur c'helc'h na dremen ket dre O zo ur c'helc'h. Ent dibarek, mard eo p galloud ar poent O e-keñver ar c'helc'h e ouzer ez eo troc'het ar c'helc'h e daou boent M ha M′ gant nep skejenn d'ar c'helc'h, hevelep ma'z eo

$$\overline{\text{OM}}.\overline{\text{OM}'} = p.$$

Ginad M zo M′ enta, hag a-geveskemm. Anargemmat a-vloc'h eo neuze ar c'helc'h er ginadur (O, p).



214 ARLOADURIOÙ HEÑVELSKRIV

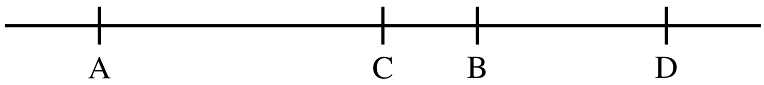
• Graet e vez arloadur heñvelskriv eus an arloañ ur parzh a'r blaenenn P war P, dezhañ an ataladoù-mañ :

$$x' = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma} \quad \text{hag} \quad y' = \frac{mx+ny+p}{\alpha x+\beta y+\gamma}$$

Ar rannoù kemezel a zo en eil kazel an ataladoù zo dezho termenoù kentañ derez en x ha y hag an un anver.

Mard emañ $\mathrm{M}(x,y)$ war an eeunenn $\alpha x+\beta y+\gamma$ n'en deus delvad ebet. An arloadurioù heñvelskriv kesaezhat o deus ar perzh heverk da gevanderc'hel derez ar c'hrommennoù aljebrel : da skouer, delvad un eeunenn zo un eeunenn. Ouzhpenn se e kevandalc'hont uegeñver (pe c'hoazh keñver ankemblac'hek) pevar foent a-eeun A, B, C, D kemeret en urzh-se ha notet :

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CB}}} : \frac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{DB}}}$$



Mard eo $(\mathrm{ABCD}) = -1$, eleze mard eo $\dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CB}}} = -\dfrac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{DB}}}$, e lavarer ez eo kemblac'hek ar rannadur (ABCD), pe c'hoazh e rann ar poentoù C ha D ent kemblac'hek ar regenn eeun [AB].

• Mard eo f un arloadur heñvelskriv ez eus neuze, oc'h envel A' B' C' D' delvadoù ketep ABCD :

$$(\mathrm{A'B'C'D'}) = (\mathrm{ABCD})$$

(An adanv heñvelskriv a verk kevandalc'h an uegeñver)

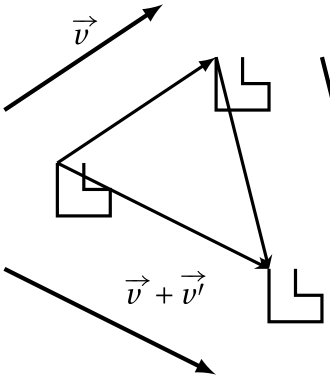
<u>Evezhiadennoù</u> :

An arloadurioù linennek : $\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = mx+ny \end{cases}$ ha keouenn : $\begin{cases} x' = ax+by+c \\ y' = mx+ny+p \end{cases}$

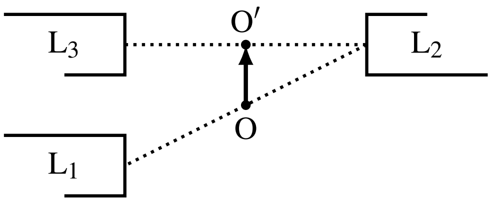
zo arloadurioù heñvelskriv dibarek ($\alpha = \beta = 0$) hag an hevelep perzhioù zo dezho : delvad un eeunenn zo un eeunenn hag uegeñver pevar foent a chom kevandalc'h.

215 KEDIADUR DAOU ARLOADUR POENTEL

• Despizet eo bet kediadur daou arloadur, eleze $f \circ g(a) = f\left[g(a)\right]$, evit un elfenn a a c'henezh diforzh (niver, poent, sturiadell...). A-wechoù e lavarer ivez "liesadur (kediañ)" hag arabat eo e gemmeskañ gant al liesadur niverel $f \cdot g$ pe $f \times g$ pe fg.

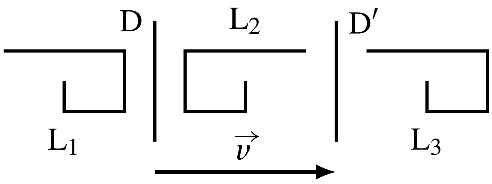


~ Kediad daou dreuzkludadur a sturiadell $\vec{v}$ ha $\vec{v'}$ zo an treuzkludadur a sturiadell $\vec{v} + \vec{v'}$.



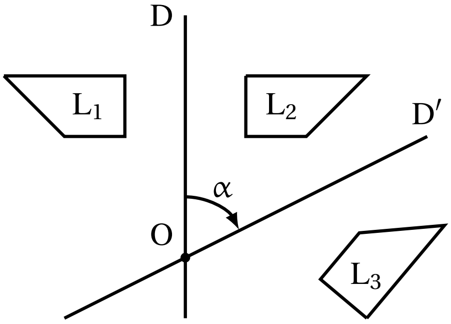
~ Kediad daou gemparzhadur kreizel a greiz O hag O′ zo un treuzkludadur a sturiadell $2\overrightarrow{OO'}$:

$$K_{O'} \circ K_O = T_{2\overrightarrow{OO'}}$$



~ Kediad daou zrec'hadur kenstur o aheliou zo un treuzkludadur :

$$K_{D'} \circ K_D = T_{2\vec{v}}$$



~ Kediad daou zrec'hadur kenskej o ahelioù en O zo ur c'hweladur kreizet en O :

$$K_{D'} \circ K_D = C\text{'}h_{2\alpha}$$

~ Kediad daou c'hweladur a un kreiz O hag a gorn α ha β zo ur c'hweladur a greiz O hag a gorn $\alpha + \beta$.

~ Kediad daou heñvelstaladur (O_1, k_1) hag (O_2, k_2) zo :

≈ Un heñvelstaladur a geñver $k_1 k_2$ mard eo $k_1 k_2 \neq 1$.

≈ Un treuzkludadur mard eo $k_1 k_2 = 1$, direet d'an arunadur mard eo $O_1 = O_2$.

≈ Ned eo ket kantamsavat kediad daou heñvelstaladur.

216 STROLL TREUZFURMIÑ AR BLAENENN

• Bezet E un teskad hag un niñvadur $*$ o pourveziñ dezhañ ul luniadur a stroll. Bezet ivez ur parzh A angoullo eus E. Lavarout a reer ez eo A un isstroll eus E mard eo A ur stroll evit $*$ ivez. E gerioù all : A zo un isstroll eus $(\mathrm{E}, *)$ mard eo $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ ha mard eo $(\mathrm{A}, *)$ ur stroll.

• Evit dienaat ez eo A un isstroll eus $(\mathrm{E}, *)$ ez arverer an delakadenn diazez-mañ :

Evit ma ve ur parzh angoullo A eus ur stroll $(\mathrm{E}, *)$
un isstroll eus E e spir :
1. Ma ve kloz (stabil) A evit an niñvadur $*$.
2. Ma ve enbeziat en A kemparzhegoù e holl elfennoù.

Mard eo kloz A evit an niñvadur $*$ e talvez ez eo un niñvadur diabarzh. Strollatat eo $*$ en E ha da heul en A ivez. Bezet a un elfenn eus A : a' kemparzheg a zo en A ivez (2.), heñvel dra evit $a * a'$ (1.).

Hogen $a * a' = e$, elfenn neptu an niñvadur $*$. Emañ e en A neuze. Ar parzh A zo dezhañ holl aksiomennoù ar stroll.

• Graet e vez kevamsavadur un teskad E eus nep arloadur kesaezhat eus E da E.

• Teskad kevamsavadurioù un teskad E zo ur stroll evit dezv gediañ an arloadurioù :

~ Mard eo f ha g daou gevamsavadur eus E, eleze daou gesaezhadur eus E da E, ar c'hediad $f \circ g$ zo ur c'hesaezhadur eus E da E ivez, eleze ur c'hevamsavadur.

~ Strollatat eo an dezv gediañ : $(f \circ g) \circ k = f \circ (g \circ k)$

~ Un elfenn neptu zo dezhi, arunadur E : $f \circ \mathrm{I_E} = \mathrm{I_E} \circ f = f$

~ f o vezañ ur c'hevamsavadur eus E ez eo kesaezhat ha da heul ez eus dezhañ ur c'hesaezhadur keveskemm f^{-1} a zo ivez ur c'hevamsavadur eus E.

Neuze, nep elfenn f eus teskad ar c'hevamsavadurioù zo dezhi ur c'hemparzheg f^{-1}, hevelep ma'z eo : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{I_E}$.

• Bezet P ur blaenenn. Un arloadur poentel *kesaezhat* e P zo ur c'hevamsavadur eus P. Teskad an *holl* arloadurioù kesaezhat eus P da P, dezhañ an dezv gediañ $\circ$, zo ur stroll enta : bez' ez eo stroll kevamsavadurioù P.

• Bezet A teskad arloadurioù kesaezhat 'zo eus P da P (da skouer : an treuzkludadurioù, pe teskad ar c'hweladurioù, pe ar c'hemparzhadurioù kreizel hag an treuzkludadurioù, h.a.) :

Evit ma ve $(\mathrm{A}, \circ)$ ur stroll, eleze un isstroll eus stroll kevamsavadurioù ar blaenenn, ez eo spirus :

1. Ma ve kloz A evit an niñvadur $\circ$ ($f \circ g \in \mathrm{A}$).
2. Ma ve en A kemparzheg f^{-1} nep elfenn f enbeziat ennañ.

<u>Skouerioù</u> :

~ Teskad kemparzhadurioù kreizel ar blaenenn P ned eo ket ur stroll, rak ned eo ket kloz evit an niñvadur $\circ$.

~ Teskad c'hweladurioù ar blaenenn P ned eo ket ur stroll, rak kediad daou c'hweladur a greiz diforc'h a c'hell bezañ un treuzkludadur.

~ Teskad kemparzhadurioù diaskouer ar blaenenn ned eo ket ur stroll, rak kediad daou gemparzhadur diaskouer zo un treuzkludadur pe ur c'hweladur.

~ Teskad an treuzkludadurioù, teskad ar c'hweladurioù a un kreiz, teskad an heñvelstaladurioù a un kreiz zo strolloù.

KEMPLEZHION

217 TESKAD AR C'HEMPLEZHION

• Luniadur teskad an ogedoù 2 × 2 dezho termenoù gwerc'hel :

Despizadur : Un oged karrezek a'n urzh 2, dezhi termenoù gwerc'hel, zo ur rezi karrezek amparet gant pevar niver gwerc'hel notet :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ (Amparet eo ar rezi gant div rez ha daou vann)

~ Bezet div oged $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha M'=$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ elfennoù eus $\mathscr{M}$.

~ Bez' ez eus dre zespizadur : $M = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases}$

~ Bezet div oged M=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ elfennoù eus $\mathscr{M}$.

Despizañ a reer : $M + M' = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$

O vezañ ma'z eo termenoù an ogedoù gwerc'helion ez eo :

~ sammadur an ogedoù un dezv gediañ diabarzh e $\mathscr{M}$, kantamsavat ha strollatat.

~ an oged $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, oged vann(el), elfenn neptu evit ar sammadur e $\mathscr{M}$.

~ an oged $-M = \begin{pmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{pmatrix}$, oged c'hourzharouez M, kemparzheg M.

Dezren a reer ez eo $(\mathscr{M},+)$ ur stroll kantamsavat (abelel).

~ Bezet $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ elfenn eus $\mathscr{M}$ ha λ ur gwerc'hel.

Despizañ a reer : $\lambda \cdot M = \begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda c & \lambda d\end{pmatrix}$

Dezren a reer ez eo $(\mathscr{M},+,\cdot)$ un egor sturiadel a vent 4 war $\mathbb{R}$ ganet gant ar peder oged dizalc'h ent linennek :

$$E_1^1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} ;\ E_1^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} ;\ E_2^1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} ;\ E_2^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

~ Bezet div oged $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ha $M' = \begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$ elfennoù eus $\mathscr{M}$.

Despizañ a reer : $M \times M' = \begin{pmatrix}aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}$

Kouneiad :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}a' & \quad\quad b'\\ c' & \quad\quad d'\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}aa'+bc' & ab'+bd'\\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}\end{array}$$

• Bezet $\mathscr{F}$ teskad an arloadurioù linennek f a'r blaenenn sturiadel $\mathscr{P}$ etrezek ennañ e unan ha bezet $\mathscr{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un diazez renket eus $\mathscr{P}$. Savelet eo an arloadur linennek f adalek ma anavezer :

$$\overrightarrow{i'} = f\left(\overrightarrow{i}\right) = a\,\overrightarrow{i} + c\,\overrightarrow{j} \quad \text{ha} \quad \overrightarrow{j'} = f\left(\overrightarrow{j}\right) = b\,\overrightarrow{i} + d\,\overrightarrow{j}.$$

Aroueziomp dre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ daouac'h daveennoù, en diazez $\mathscr{B}$, ur sturiadell $\vec{v}$ eus $\mathscr{P}$ ha dre $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ daouac'h daveennoù, en diazez-se, ar sturiadell $\vec{v}' = f(\vec{v})$. Linennegezh f a empleg :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad \text{a noter : } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

~ Ouzh pep arloadur f eus $\mathscr{F}$ ez eus kevredet neuze dre un arloadur ϕ un oged $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eus $\mathscr{M}$. Termenoù bann kentañ M zo daveennoù $f\left(\overrightarrow{i}\right)$ en diazez $\mathscr{B}$, termenoù an eil bann o vezañ daveennoù $f\left(\overrightarrow{j}\right)$.

~ E se ez eo ar c'hesaezhadur ϕ ur c'hendelvadur eus $\mathscr{F}$, dezhañ an dezv gediañ an arloadurioù, war $\mathscr{M}$, dezhañ liesadur an ogedoù. Da heul ez eo liesadur an ogedoù 2×2 un niñvadur diabarzh, strollatat, ankantamsavat. An oged $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kevredet gant ϕ ouzh an arunadur zo elfenn neptu al liesadur en $\mathscr{M}$. Ouzhpenn se ez eo dasparzhat al liesadur e-keñver ar sammadur : evit μ, M ha M' diforzh eus $\mathscr{M}$

$$\mu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{pmatrix}, \; M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

e wirier : $\mu(M+M') = \mu M + \mu M'$

Dezren a reer ez eo $(\mathscr{M},+,\times)$ ur walenn unanek.

Evezhiadenn : Bezet $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elfenn eus $\mathscr{M}$. Un amplegad spirus evit m'he defe an oged M un oged kemparzhek evit an dezv liesadel zo : anvannel eo didermenant an oged M, $ad - bc$. Da skouer, an oged $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ n'he deus ket a gemparzheg evit an dezv liesadel. Da neuze ned eo ket $(\mathscr{M},+,\times)$ ur c'horf. Emaomp o vont da welout amañ dindan un iswalenn eus $\mathscr{M}$ a zo ur c'horf.

• **Studi teskad an ogedoù $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$**

Mard eo didermenant M par da 1 : det $M = 1$. Diazez $\mathscr{B}$ ar blaenenn sturiadel $\mathscr{P}$ o vezañ reizhreolel, M zo oged ur c'hweladur sturiadel eus $\mathscr{P}$. Amañ e vo gwelet an ogedoù a un rizh hep ma ve kefleuniet an amveziad $a^2 + b^2 = 1$. Desellomp an isteskad $\mathbb{C}$ eus M :

$$\mathbb{C} = \left\{ M \in \mathscr{M} \middle| M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; ; \; a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

~ Parder : Bezet $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ha $M' = \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ elfennoù eus $\mathbb{C}$.

$$M = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases}$$

~ Luniadur a egor sturiadel : Bezet M ha M' elfennoù eus $\mathbb{C}$.

$$\forall (\lambda,\mu),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ [\lambda M + \mu M'] \in \mathbb{C}.$$

Dezren a reer ez eo $(\mathbb{C},+,\cdot)$ un isegor sturiadel eus $(\mathcal{M},+,\cdot)$.
Da heul ez eo $(\mathbb{C},+)$ un isstroll abelel eus $(\mathcal{M},+)$.

~ Ment an egor sturiadel $(\mathbb{C},+,\cdot)$: Nep elfenn $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ eus $\mathbb{C}$ a c'hell bezañ skrivet

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pe}$$

$$M = a \cdot I + b \cdot J, \quad \text{gant} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ha} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alese $a \cdot I + b \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = 0$. Dizalc'h ent linennek eo neuze an ogedoù I ha J eus $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ha pep oged M eus $\mathbb{C}$ zo ur c'hedaozadur linennek eus I ha J hag a-geveskemm ez eo $\mathbb{C}$ ganet gant an teskad $\{I, J\}$.

Dezren a reer ez eo $(\mathbb{C},+,\cdot)$ un egor sturiadel a vent 2 war $\mathbb{R}$ ganet gant $\{I, J\}$.

~ Luniadur a gorf : Bezet $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ha $M = \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix}$ elfennoù eus $\mathbb{C}$.

$$M \times M' = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \beta\beta' & -(\alpha\beta' + \beta\alpha') \\ \beta\alpha' + \alpha\beta' & -\beta\beta' + \alpha\alpha' \end{pmatrix}$$

An oged $M \times M'$ zo elfenn eus $\mathbb{C}$, al liesadur zo neuze un niñvadur diabarzh e $\mathbb{C}$. Strollatat, dasparzhat e-keñver ar sammadur e $\mathcal{M}$ eo al liesadur ha da heul e $\mathbb{C}$ ivez. Kantamsavat eo al liesadur e $\mathbb{C}$ hag an oged unanenn :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, elfenn neptu eus al liesadur zo elfenn eus $\mathbb{C}$.

Dezren a reer ez eo $(\mathbb{C}, +, \times)$ un iswalenn gantamsavat hag unanek eus $(\mathscr{M}, +, \times)$.

Ouzhpenn se pep elfenn M eus $\mathbb{C}$ zo dezhi ur c'hemparzheg e $\mathbb{C}$, anvet oged c'hin M ha notet M^{-1} :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} & \dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ \dfrac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix}$$

Dezren a reer ez eo $(\mathbb{C}, +, \times)$ ur c'horf kantamsavat.

• **Kendelvegezh un iskorf eus $\mathbb{C}$ da $\mathbb{R}$:**

~ Desellomp an isteskad $\mathbb{C}_1$ eus $\mathbb{C}$ a zo e elfennoù ogedoù M_1, hevelep ma'z eo :

$M_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ gant $a \in \mathbb{R}$. Gwiriañ a reer ez eo $(\mathbb{C}_1, +, \times)$ un iskorf eus $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Bezet u an arloadur eus $\mathbb{C}_1$ da $\mathbb{R}$ despizet dre :

$$M_1 \longmapsto u(M_1), u(M_1) = a \quad \text{(da skouer } I \longmapsto u(I),\ u(I) = 1\text{)}.$$

An arloadur u zo :

~ kesaezhat.

~ kembez gant ar sammadur war $\mathbb{C}_1$ ha war $\mathbb{R}$, eleze :

$\forall M_1,\ M_1 \in \mathbb{C}_1,\ \forall M_1',\ M_1' \in \mathbb{C}_1, u(M_1 + M_1') = u(M_1) + u(M_1')$.

~ kembez gant al liesadur war $\mathbb{C}_1$ ha war $\mathbb{R}$, eleze :

$\forall M_1,\ M_1 \in \mathbb{C}_1,\ \forall M_1',\ M_1' \in \mathbb{C}_1, u(M_1 \times M_1') = u(M_1) \times u(M_1')$.

Dezren a reer ez eo ar c'hesaezhadur u ur c'hendelvadur etre ar c'horfoù $(\mathbb{C}_1, +, \times)$ ha $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Evezhiadennoù :

1. Gwiriañ a reer aes ez eo ar c'hesaezhadur u ur c'hendelvadur eus an egor sturiadel $(\mathbb{C}_1, +, \times)$ war an egor sturiadel $(\mathbb{R}, +, \times)$.

2. Mar noter $\mathbb{C}_1^*$ teskad an ogedoù $M_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, hevelep ma'z eo $a \neq 0$, e wirier ez eo $(\mathbb{C}_1, \times)$ ur stroll kantamsavat, kendelvek da stroll an heñvelstaladurioù sturiadel eus $\mathscr{P}$.

3. Desellomp an isteskad $\mathbb{C}_2$ eus $\mathbb{C}$ a zo e elfennoù ogedoù M_2, hevelep ma'z eo :

$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, gant $b \in \mathbb{R}$. Gwiriañ a reer ez eo $(\mathbb{C}_2, +)$ un isstroll eus $(\mathbb{C}, +)$. En enep, bezet $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elfenn eus $\mathbb{C}_2$. Karrez J zo : $J^2 = J \times J = J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, nad eo ket elfenn eus $\mathbb{C}_2$. Ned eo ket al liesadur un niñvadur e diabarzh $\mathbb{C}_2$ enta.

Gwiriañ a reer ez eo J^2 un elfenn eus $\mathbb{C}_1$, ha dre u : $J^2 \longmapsto u\left(J^2\right), u\left(J^2\right) = -1$.

- **Korf ar c'hemplezhion**

~ Kendivizad :

Ar c'hesaezhadur u a zespiz daou gendelvadur :

~ Kendelvek eo ar c'horf $(\mathbb{C}_1, +, \times)$ d'ar c'horf $(\mathbb{R}, +, \times)$.

~ Kendelvek eo an egor sturiadel $(\mathbb{C}_1, +, \cdot)$ da $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ egor sturiadel war $\mathbb{R}$.

Kendivizout a reer hevelebiñ $\mathbb{C}_1$ ha $\mathbb{R}$, eleze e toder : $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$.

Ent dibarek : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, ha $J^2 = -1$. Da heul, $(\mathbb{R}, +, \times)$ zo un iskorf eus $(\mathbb{C}, +, \times)$ ha $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ un isegor sturiadel eus $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. An teskad $\mathbb{C}$ a vez anvet teskad an niveroù kemplezh (ur c'hemplezh *ls.* kemplezhion). Evit eeunaat e vez notet elfennoù $\mathbb{C}$ ha $\mathbb{C}_1$ gant ul lizherenn hepken :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = z \quad \text{ha} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i$$

Er c'horf $(\mathbb{R}, +, \times)$ n'eus elfenn ebet a zo he c'harrez par da (-1). Hogen e $\mathbb{C}$, an elfenn notet i zo he c'harrez par da (-1) : $i^2 = -1$.

~ Perzhioù $\mathbb{C}$ egor sturiadel war $\mathbb{R}$:
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ zo un egor sturiadel war $\mathbb{R}$ hag an hevelebadur a empleg ez eo $\{1, i\}$ un diazez eus an egor struriadel-se. Pa'z eo :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

nep kemplezh a c'hell bezañ skrivet er rezh : $z = a \cdot 1 + b \cdot i$. Bezet $z = a + b \cdot i$ ha $z' = a' + b' \cdot i$. Dre zespizadur :

~ parder : $z = z' \iff a = a' \quad \text{ha} \quad b = b'$
~ sammadur : $z + z' = (a + a') + (b + b') \cdot i$
~ liesadur dre ur gwerc'hel : $\lambda \cdot z = \lambda a + (\lambda b) \cdot i$
~ $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$
~ $z + z' = z' + z$
~ $z + 0 = 0 + z = z$
~ gourzharouez : $-z = -a - b \cdot i$.

Despizañ a reer diforc'h daou gemplezh : $z' - z = (a' - a) + (b' - b) \cdot i$

Dezren a reer ez eo $(\mathbb{C}, +)$ ur stroll abelel.

~ Perzhioù ar c'horf $(\mathbb{C}, +, \times)$

Bezet z ha z', elfennoù eus $\mathbb{C}$: $z = a + b \cdot i$ ha $z' = a' + b' \cdot i$. Dienaat a reer :

$$(a + b \cdot i) \times (a' + b' \cdot i) = aa' - bb' + (ab' + ba') \cdot i$$

Evezhiadenn bouezus :

An oged $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ a c'hell bezañ skrivet e div rezh :

≈ Kentañ rezh : $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

≈ Eil rezh : $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Neuze :

$b \cdot \mathrm{i} = b \times \mathrm{i}$ hag evit eeunaat e noter : $\boldsymbol{z = a + b}\mathrm{i}$. E se e c'haller dizamant hevelebiñ an niñvadur diavaez $(\cdot)$ hag an niñvadur diabarzh $(\times)$.

Ar rezh $\boldsymbol{z = a + b}\mathrm{i}$ a anver rezh kartezel (pe aljebrel) an niver kemplezh, a o vezañ *lodenn werc'hel* ar c'hemplezh z ha b al *lodenn derc'hel*.

Elfennoù $\mathbb{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = b\mathrm{i},\ b \in \mathbb{R}\}$ a lavarer derc'helion glez. $(\mathbb{C}_2, +)$ zo un isstroll abelel eus $(\mathbb{C}, +)$.

Da heul an notadur nevez e c'haller skrivañ :

~ $\forall (z, z', z''),\ (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, z(z'z'') = (zz')z''$

~ $\forall (z, z'),\ (z, z') \in \mathbb{C}^2, zz' = z'z$

~ Neptu eo ar gwerc'hel 1 : $z \times 1 = 1 \times z = z$

~ Ar c'hemplezh z anvannel en deus ur ginad unel notet z^{-1} pe $\dfrac{1}{z}$, hevelep ma'z eo : $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}$

~ Notomp $\mathbb{C}^*$ an teskad $\mathbb{C} - \{0\}$: $(\mathbb{C}^*, \times)$ zo ur stroll abelel.

$\frac{z'}{z}$ a anver keñver an daou gemplezh z ha z'. Gwiriañ a reer $\frac{z'}{z} = \frac{\lambda z'}{\lambda z}$

~ Dasparzhat eo al liesadur e-keñver ar sammadur :
$\forall (z, z', z''), (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, z(z' + z'') = (z' + z'')z = zz' + zz''$

Da heul : $\mathrm{i}^2 = -1$; $\mathrm{i}^0 = +1$; $\mathrm{i}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{i}}$

hag hollekoc'h : $\forall n, n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{i}^{4n} = +1$; $\mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}$; $\mathrm{i}^{4n+2} = -1$; $\mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$

218 JEDADURIOÙ E TESKAD AR C'HEMPLEZHION

• Studi un unandelvadur eus $\mathbb{C}$:

Desellomp an arloadur f eus $\mathbb{C}$ da $\mathbb{C}$ a gevred ouzh ar c'hemplezh $z = a + b\mathrm{i}$ ar c'hemplezh $a - b\mathrm{i}$, anvet keveilad z ha notet $\overline{z}$:

$$z \longmapsto f(z), f(z) = \overline{z}.$$

Gwiriañ a reer ar perzhioù-mañ :

~ kesaezhat eo f,

~ $\forall (z, z'), (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z + z') = f(z) + f(z')$, eleze $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,

~ $\forall (z, z'), (z, z') \in \mathbb{C}^2, f(z \times z') = f(z) \times f(z')$, eleze $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

Dezren a reer ez eo f un unandelvadur eus ar c'horf $(\mathbb{C}, +, \times)$ warnañ e unan.

Evezhiadennoù :

1. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$; $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

2. Atroat eo an arloadur f.

3. Mard eo $z = a + \mathrm{i}b$, neuze $z + \overline{z} = 2a$ ha $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$

4. $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$, ha neuze : $\dfrac{a' + \mathrm{i}b'}{a + \mathrm{i}b} = \dfrac{aa + bb'}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\dfrac{ab' - ba'}{a^2 + b^2}$

• **Moll ur c'hemplezh :**

Desellomp an arloadur g eus $\mathbb{C}$ da $\mathbb{R}^+$ o kevrediñ ouzh ar c'hemplezh $z = a+\mathrm{i}b$ ar gwerc'hel muiel pe vannel $\sqrt{a^2 + b^2}$ anvet moll ar c'hemplezh z ha notet $|z|$. Gwiriañ a reer ar perzhioù-mañ :

$$\forall (z, z'),\ (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ g(zz') = g(z) \times g(z'),\ \text{ eleze } |zz'| = |z| \times |z'|.$$

Dezren a reer ez eo strishâd g^* an arloadur g da $\mathbb{C}^*$ un heñveldelvadur eus ar stroll $(\mathbb{C}^*, \times)$ war ar stroll $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Studiet e vo amañ dindan kraoñell an heñveldelvadur g^*-se. Kavout a reer ar perzhioù all-mañ :

~ $\forall z, z \in \mathbb{C},\ |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\overline{z}}$

~ $\forall z, z \in \mathbb{C},\ z = a + \mathrm{i}b,\ |a| \leqslant |z|$ hag $|b| \leqslant |z|$.

~ $\forall (z, z'), (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

• **Stroll liesadel ar c'hemplezhion moll 1 :**

Degaset hon eus amañ diaraok an arloadur g^* eus $\mathbb{C}^*$ da $\mathbb{R}_+^*$ o kevrediñ e voll ouzh ar c'hemplezh anvannel $z = a + \mathrm{i}b$. An arloadur g^*-se zo un heñveldelvadur eus ar stroll $(\mathbb{C}^*, \times)$ er stroll $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Kraoñell ρ an arloadur-se zo teskad ar c'hemplezhion dezho da zelvad ar gwerc'hel 1, elfenn neptu eus $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. An isteskad ρ eus $\mathbb{C}$ zo neuze teskad ar c'hemplezhion moll 1, eleze :

$$\rho = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = a + \mathrm{i}b,\ a^2 + b^2 = 1\}$$

$(\rho, \times)$ zo un isstroll eus $(\mathbb{C}^*, \times)$, kantamsavat, kendelvek da $O^+(\mathscr{P})$, teskad ar c'hweladurioù sturiadel a'r blaenenn sturiadel euklidel $\mathscr{P}$, pe geitventadurioù muiel $\mathscr{P}$. An teskad-se, dezhañ an niñvadur diabarzh $\circ$ kediadur an arloadurioù, zo ur stroll kantamsavat notet $O^+(\mathscr{P})$.

Un diazez reizhreolel o vezañ dibabet e $\mathscr{P}$ e kevreder teskad ar c'hweladurioù sturiadel eus $\mathscr{P}$, dre ar c'hesaezhadur ϕ ouzh teskad an ogedoù a'r rizh :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ gant } \det(M) = 1$$

An teskad-se a gevreder e unan ouzh ρ, dre ar c'hesaezhadur ν.

Bez' ez eus ur c'hesaezhadur eus ar stroll $O^+(\mathscr{P})$ war stroll $(\mathscr{A},+)$ ar c'hornioù, pe war stroll $(U,+)$ gwarennoù ar c'helc'h tric'hornventouriel. Ar c'hesaezhadur-se zo ur c'hendelvadur etre strolloù. O tezanviñ $\widehat{\theta}$ korn ar c'hweladur sturiadel kevredet ouzh ar c'hemplezh $z = a + ib$ a voll 1 hon eus dienaet :

$$a = \mathrm{Cos}\widehat{\theta} \quad \text{ha} \quad b = \mathrm{Sin}\widehat{\theta}, \quad \text{eleze} \quad z = \mathrm{Cos}\widehat{\theta} + i\mathrm{Sin}\widehat{\theta}$$

Degaset eo bet ivez ar c'heal a "muzul" evit ar c'hornioù pe ar gwarennoù : bez' ez eus ur c'hesaezhadur eus an teskad $\mathscr{A}$ war deskad $\mathbb{R}/2\pi\cdot\mathbb{Z}$ an dereoù kevatalder modulo 2π en $\mathbb{R}$. Ar c'hesaezhadur-se zo ur c'hendelvadur eus ar stroll $(\mathscr{A},+)$ war ar stroll $(\mathbb{R}/2\pi\cdot\mathbb{Z},+)$. E se, daou deskad diforzh eus an daolenn-mañ da heul, gant an dezv verket, zo strolloù kendelvek.

Teskad	**Dezvoù**
Ogedoù karrezek $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, gant $\det(M) = 1$	$\times$
Kemplezhion z moll 1	$\times$
C'hweladurioù sturiadel ar blaenenn euklidel	$\circ$
Kornioù daouac'hoù sturiadelloù anvannel	$+$
Gwarennoù ar c'helc'h U	$+$
Teskad $\mathbb{R}/2\pi.\mathbb{Z}$ an dereoù kevatalder modulo 2π en $\mathbb{R}$.	$+$

Mard eo ar gwerc'hel θ ur muzul eus ar c'horn $\widehat{\theta}$ pe eus ar warenn $\vec{\theta}$, ur muzul diforzh eus $\widehat{\theta}$ zo $\theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ hag ar c'hemplezh $z = a + \mathrm{i}b$ **a voll 1**, kevredet ouzh $\widehat{\theta}$ a c'hell bezañ skrivet :

$$\boxed{z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$$

• **Rezh tric'hornventouriel ur c'hemplezh anvannel :**

Bezet $z = a + \mathrm{i}b$ un elfenn diforzh eus $\mathbb{C}^*$ ha ρ he moll :

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \rho > 0$$

Ar c'hemplezh z_1, hevelep ma'z eo $z = \rho z_1$, zo unel : $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$ gant

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ b_1 = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

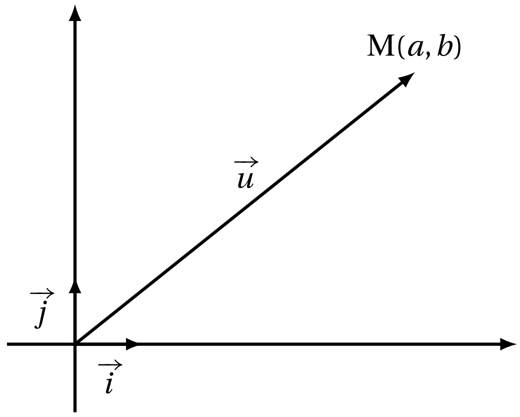
Moll z_1 zo par da 1. Dezanvomp dre $\widehat{\theta}$ korn ar c'hweladur sturiadel kevredet ouzh z_1 ha dre θ unan eus muzulioù $\widehat{\theta}$; ar gwerc'hel θ a anver arguzenn ar c'hemplezh z. Nep gwerc'hel $\theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ zo c'hoazh arguzenn ar c'hemplezh z, a c'hell bezañ skrivet :

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)} \qquad \boxed{\rho = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$|z| = \rho, \ \operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$. Ansavelet eo arguzenn ar c'hemplezh 0. E voll zo 0.

• **Desteriadur mentoniel un niver kemplezh :**



Er blaenenn sturiadel euklidel, daveet d'an diazez reizhreolel $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, ouzh ar c'hemplezh $z = a + \mathrm{i}b$ ez eo kevredet ar sturiadell $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Anvet e vez ar blaenenn-se : ar blaenenn gemplezh.

An arloadur $z \longmapsto \vec{u}$ zo ur c'hesaezhadur eus an teskad $\mathbb{C}$ war ar blaenenn sturiadel euklidel. Ar sturiadell $\vec{u}$ zo *delvad sturiadel* ar c'hemplezh z. A-geveskemm ez eo ar c'hemplezh z *steudenn* ar sturiadell $\vec{u}$. Bezet (O,M) an daouboent a orin O a zerc'henn ar sturiadell $\vec{u'}$ er blaenenn ventel euklidel, daveet d'an dealf reizhreolel $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$. *Delvad poentel z* eo ar poent M ha steudenn ar poent M eo z.

<u>Dianlenadoù</u> :

1. Ar gwerc'helion a ha b zo daveennoù delvad sturiadel $\left(\vec{u}\right)$ pe delvad poentel (M) ar c'hemplezh $z = a + \mathrm{i}b$.

2. Daou gemplezh zo par mmard eo o delvadoù poentel en arun.

3. Teskad delvadoù poentel ar gwerc'helion zo an ahel $\left(\mathrm{O},\vec{i}\right)$. An ahel diazremm-se a reer *ahel ar gwerc'helion* anezhañ. Teskad delvadoù poentel an derc'helion glez zo an ahel $\left(\mathrm{O},\vec{j}\right)$. An ahel diazerc'h-se a reer *ahel an derc'helion glez* anezhañ.

4. Keveilet eo daou gemplezh mmard eo kemparzhek o delvadoù poentel e-keñver ahel ar gwerc'helion. An unandelvadur eus $(\mathbb{C},+,\times), z \longmapsto \overline{z}$ zo kevredet ouzh an arloadur poentel (a-getep sturiadel) : kemparzhadur e-keñver an ahel $\left(\mathrm{O},\vec{i}\right)$ (a-getep kemparzhadur e-keñver an eeunenn sturiadel ganet gant $\vec{i}$).

5. Gourzharouez eo daou gemplezh mmard eo kemparzhek o delvadoù poentel e-keñver orin an dealf. An unandelvadur eus $(\mathbb{C},+,\times), z \longmapsto -z$ zo kevredet ouzh an arloadur : kemparzhadur e-keñver O.

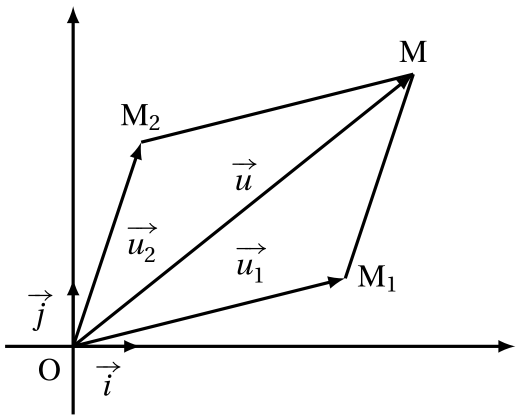
6. Moll ur c'hemplezh z (mannel pe anvannel) zo reolad euklidel ar sturiadell $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, delvad z, pe ar pellder etre ar poentoù O ha M. Notet e vez :

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \|\vec{u}\| = \mathrm{OM}$$

Un arguzenn eus ar c'hemplezh z anvannel zo ur muzul eus korn ar sturiadelloù $\vec{i}$ hag $\vec{u}$ pe $\vec{i}$ hag $\overrightarrow{OM}$. Notet e vez :

$$\operatorname{Arg} z = \overline{\left(\vec{i},\vec{u}\right)} = \overline{\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)} \pmod{2\pi}$$

• **Desteriadur sammadur daou gemplezh :**



Gwiriañ a reer aes kenan e savel ar c'hesaezhadur $z \longmapsto \vec{u}$ ur c'hendelvadur eus ar stroll $(\mathbb{C},+)$ war stroll sammadel sturiadelloù ar blaenenn gemplezh.

$\vec{u_1}$ pe M_1 : delvad z_1

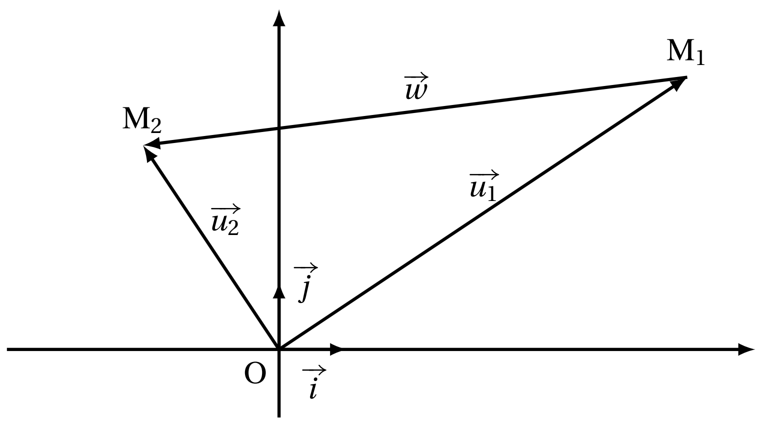
$\vec{u_2}$ pe M_2 : delvad z_2

$$\left.\begin{array}{c} \vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2} \\ \text{pe M, hevelep ma'z eo} \\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} \end{array}\right\} : \text{ delvad } (z_1+z_2)$$

<u>Evezhiadenn</u> :

Pep hini eus an daou stroll usveneget zo kendelvek da stroll an treuzkludadurioù struriadel (a-getep : an treuzkludadurioù poentel) eus ar blaenenn gemplezh, dezhañ dezv gediañ an arloadurioù.

• **Desteriadur diforc'h daou gemplezh :**



Ar c'hendelvadur eus $(\mathbb{C},+)$ war stroll sammadel sturiadelloù ar blaenenn gemplezh a empleg en deus $z_2 - z_1$ da zelvad sturiadel (a-getep : poentel) ar sturiadell $\vec{w}$, pe $\overrightarrow{M_1M_2}$, hevelep ma'z eo :

$$\vec{w} = \vec{u_2} - \vec{u_1} \text{ pe } \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

Da heul :

$$|z_2 - z_1| = \|\vec{w}\| = M_1M_2.$$

$$\operatorname{Arg}(z_2 - z_1) = \overline{\left(\vec{i}, \vec{w}\right)} = \overline{\left(\vec{i} - \overrightarrow{M_1M_2}\right)}, \ [2\pi]$$

Delakadenn :

• Moll liesâd daou gemplezh zo liesâd o molloù.

• Arguzenn liesâd daou gemplezh anvannel zo sammad o arguzennoù.

$$\forall (z_1, z_2),\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{*2}, \begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}\ z_1 + \operatorname{Arg}\ z_2 \end{cases}$$

Delakadenn : $\forall z,\ z \in \mathbb{C}^*, \begin{cases} \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} \\ \operatorname{Arg}\ \dfrac{1}{z} = -\operatorname{Arg}\ z,\ [2\pi] \end{cases}$

Delakadenn :

$$\forall (z_1, z_2),\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{*2}, \begin{cases} \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} \\ \text{Arg } \dfrac{z_2}{z_1} = \text{Arg } z_2 - \text{Arg } z_1 \end{cases}$$

• **Reollun Moivre ha dedalvezadurioù :**

Evit nep niver kemplezh anvannel ha nep kevan naturel n anvannel e c'haller skrivañ :

$$\left[\rho(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)\right]^n = \rho^n(\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha)$$

~ Mar lakaer $z^0 = 1$ ez eo gwir ivez an daveadur usveneget.

~ Evit n naturel leiel ($n = -p$), an disoc'h o tennañ d'ar ginad a gevaraez skrivañ :

$$[\rho(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)]^{-p} = \frac{1}{[\rho(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)]^p} = \rho^{-p}[\cos(-p\alpha) + \mathrm{i}\sin(-p\alpha)]$$

En degouezh ma'z eo $\rho = 1$ e teu an daveadur-mañ da heul, anvet reollun Moivre :

$$\forall\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall n,\ n \in \mathbb{Z},\ (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha$$

• Bennozh da reollun Moivre e c'haller jediñ $\cos n\alpha$ ha $\sin n\alpha$. Da skouer :

≈ $n = 2$:

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2\mathrm{i}\sin\alpha.\cos\alpha + \mathrm{i}^2\sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha$$

Eleze $\forall\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$

≈ $n = 3$: $\forall\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \end{cases}$

$\approx$ $n = 4 : \forall \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ \sin 4\alpha = 4\cos^3 \alpha \sin \alpha - 4\cos \alpha \sin^3 \alpha \end{cases}$

• **Linennekadur polinomoù tric'hornventouriel :**

Bezet z ur c'hemplezh a voll 1 hag a arguzenn α. Diwar reollun Moivre, $n \in \mathbb{N}$ hag $\alpha \in \mathbb{R}$:

Gwiriañ a reer aes kenan e savel ar c'hesaezhadur $z \longmapsto \vec{u}$ ur c'hendelvadur eus ar stroll $(\mathbb{C}, +)$ war stroll sammadel sturiadelloù ar blaenenn gemplezh.

~ $\left.\begin{aligned} z^n &= \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha \\ \frac{1}{z^n} &= \cos n\alpha - \mathrm{i}\sin n\alpha \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= 2\cos n\alpha \\ z^n - \frac{1}{z^n} &= 2\mathrm{i}\sin n\alpha \end{aligned}\right.$ ....(1)

~ Hag ivez : $\left.\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= 2\cos \alpha \\ z - \frac{1}{z} &= 2\mathrm{i}\sin \alpha \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n &= 2^n \cos^n \alpha \\ \left(z - \frac{1}{z}\right)^n &= 2^n \mathrm{i}^n \sin n\alpha \end{aligned}\right.$ ....(2)

Dre arloañ reollun ar binom da gentañ kazel an daveadurioù (2) amañ diaraok hag o tennañ korvo eus an daveadurioù (1) e teuer a-benn, evit $n \in \mathbb{N}$ hag $\alpha \in \mathbb{R}$, da linennekaat $\cos^n \alpha$ ha $\sin^n \alpha$.

Da skouer :

~ $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3}$. A-se $2^3 \cos^3 \alpha = 2\cos 3\alpha + 3 \times 2\cos \alpha$.

Ha da heul : $\cos^3 \alpha = \dfrac{\cos 3\alpha + 3\cos \alpha}{4}$.

~ $\left(z - \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 - 3z + \frac{3}{z} - \frac{1}{z^3}$.

Neuze : $2^3 \mathrm{i}^3 \sin^3 \alpha = 2\mathrm{i}\sin 3\alpha - 3 \times 2\mathrm{i}\sin \alpha$.

Ha da heul : $$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}.$$

~ Heñvel dra evit $\cos^4\alpha$ ha $\sin^4\alpha$.

~ Bennozh d'ar reollunioù tric'hornventouriel e c'haller linennekaat polinomoù tric'hornventouriel er rezh $a\sin^p\alpha\cos^q\alpha$.

• ***n*-vonadoù ur c'hemplezh :**

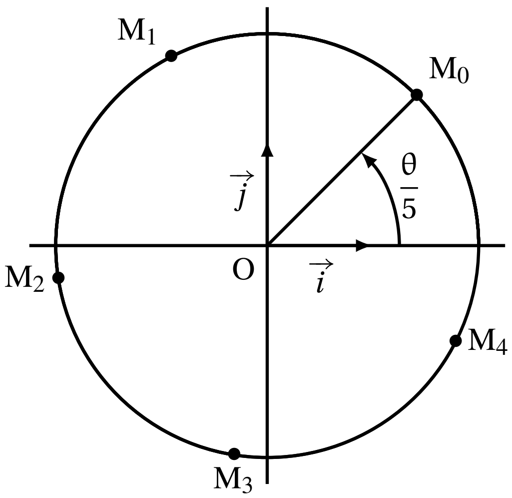
Delakadenn :

Nep kemplezh anvannel, ρ e voll ha θ e arguzenn, zo dezhañ n n-vonad skrivet er rezh tric'hornventouriel :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Jediñ a reer an n n-vonad dre reiñ da k ar gwerzhadoù kevan kenheuilh eus 0 da $(n-1)$.

~ Derc'hennadur mentoniel :



Er blaenenn gemplezh ez eo delvadoù poentel M_k n-vonadoù z_k ar c'hemplezh $\rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ poentoù a'r c'helc'h (C) kreizet en O, a skin $\sqrt[n]{\rho}$. Ar poentoù M_k zo begoù ul liestueg reoliek argeinek kaeet e (C). Al lun a glot gant $n = 5$, $\rho = 32$ ha $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

~ perzhioù n-vonadoù 1 : eleze $z^n = 1$. Bezet E teskad n-vonadoù 1. Diskouez a reer ez eo $(\mathrm{E}, \times)$ un isstroll eus $(\mathbb{C}, \times)$. Diskouez a reer ivez ez eo sammad n-vonadoù 1 par da vann.

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = 0$$

• **Diskoulm ataladoù kentañ derez hag eil derez war C :**

~ Kentañ derez : Bezet a ha b daou gemplezh. Klaskomp ar c'hemplezhion z, hevelep ma'z eo :

$$az + b = 0$$

≈ Ma ned eo ket mannel a ez eus un diskoulm unel d'an atalad : $-\frac{b}{a}$.

≈ Mard eo mannel a ha b anvannel, n'eus diskoulm ebet.

≈ Mard eo mannel a ha b ez eo $\mathbb{C}$ teskad an diskoulmoù.

~ Eil derez : Bezet an trinom $T = az^2 + bz + c$, gant $a \neq 0$. Gallout a reer rezhiennañ T evel-henn :

$$T = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],\ \Delta = b^2 - 4ac$$

Ar c'hemplezh Δ zo disparzhant T.

≈ Mard eo $\Delta \neq 0$: ar c'hemplezh Δ zo dezhañ daou zaouvonad δ ha $-\delta$. Neuze e c'haller periata T :

$$T = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)$$

≈ Mard eo $\Delta = 0$: $T = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$

Dezren a reer : Mannel eo ar polinom T pa roer da z unan eus an div werzhad kemplezhmañ :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{pe} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

z_1 ha z_2 zo *mannoù* an trinom eil derez. Daou vann anpar ez eus mard eo $\Delta \neq 0$.

Mard eo $\Delta = 0$ ez eo par ar mannoù. Lavaret e vez en deus T ur mann daouel.

E se, an atalad eil derez $az^2 + bz + c = 0$, a, b ha c o vezañ kemplezhion roet, gant $a \neq 0$, zo dezhañ daou ziskoulm war $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a},\ z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

Degouezh ar gwezhiaderioù gwerc'hel :

Mard eo a, b ha c (gant $a \neq 0$) gwerc'helion ez eo an disparzhant Δ ur gwerc'hel.

~ $\Delta > 0$: an diskoulmoù zo $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

~ $\Delta = 0$: par eo an diskoulmoù : $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

~ $\Delta < 0$: an diskoulmoù zo an daou gemplezh keveilet

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

• **Rezh argemmvac'hel un niver kemplezh :**

Despizadur :

Evit nep gwerc'hel θ e toder : $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Mard eo z un niver kemplezh anvannel ρ e voll ha θ e arguzenn e reer rezh argemmvac'hel ar c'hemplezh z eus ar skrivad :

$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Skouerioù :

~ $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$;

~ $\cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi} = -1.$

~ $\sin\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$

~ $e^{i0} = 1$

~ $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{(i\theta+i2k\pi)} = e^{i\theta}$

~ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{\theta-\theta'}$ hag $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

• **Reollun Moivre a skriver :**

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},\ n \in \mathbb{Z}}$$

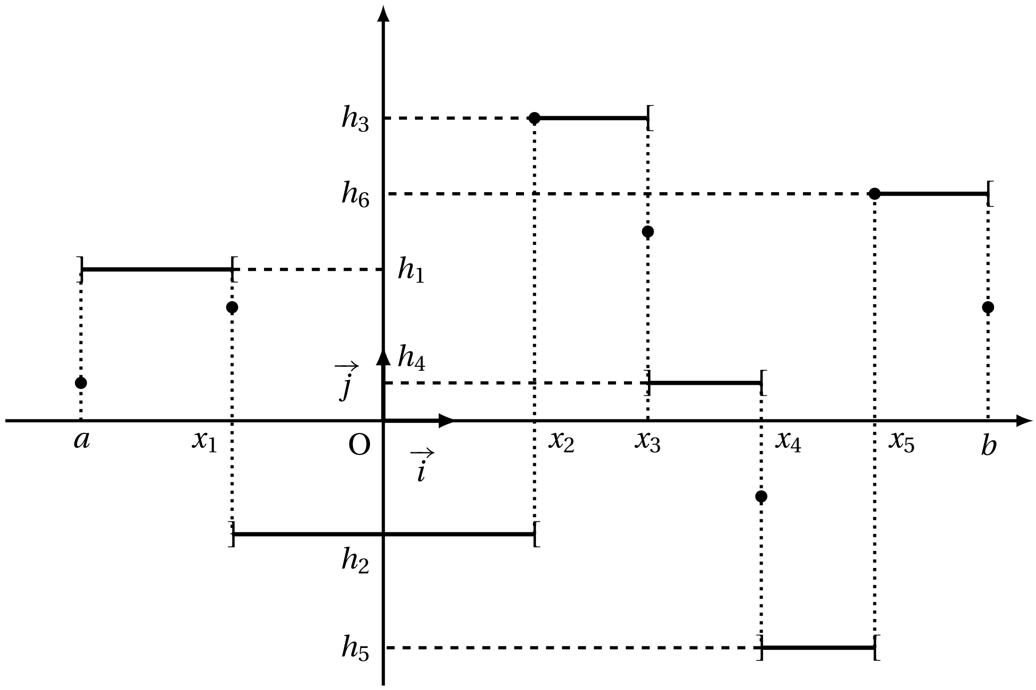
• **Reollunioù Euler :** Evit nep gwerc'hel θ ez eus :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{ha} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

SAMMEGAÑ

219 SAMMEGENN UR GEVREIZHENN NIVEREL

• **Sammegañ ur gevreizhenn war bazinier :**



Bez' ez eus un heuliad bevennek war gresk :

$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = b$ a elfennoù eus $[a,b]$, hevelep ma'z eo strishâd f da bep hini eus an n entremez $]x_{i-1},\ x_i[$ kendalc'hek, par da h_i. Gwerzh $f(x_i)$ n'emañ ket e dalc'h h_i ha h_{i+1}.

$$\text{Bezet ar sammad : } S = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i - x_{i-1}).$$

Evezhiadenn : An un sammad a gaver evit ur gevreizhenn war bazinier g, bet dre gemmañ gwerzh f en unan eus he foentoù, c. Bezet :

$$\begin{cases} \forall x, x \in [a,c[\cup]c,b],\ f(x) = g(x) \\ g(c) = \lambda \end{cases}$$

E gwir, mard eo c unan eus termenoù an heuliad (x_i), ar c'hemm-se n'en deus delanvad ebet war ar sammad S ; ma n'eo ket c unan eus termenoù an heuliad, emañ neuze en unan eus an entremezioù $]x_{i-1},\ x_i[$. Er sammad nevez S' ez erlerc'hier $h_i(c - x_{i-1}) + h_i(x_i - c)$ ouzh $h_i(x_i - x_{i-1})$. Ha da heul : $S = S'$.

E se e kaver an un sammad S evit ur gevreizhenn war bazinier g, bet o kemmañ gwerzh f en un niver *bevennek* a boentoù. An daou berzh-se a gevaraez dezrevellañ an despizadurmañ :

Bezet ur gevreizhenn f war bazinier savelet war an entremez $[a, b]$ ha bezet an heuliad war gresk a werc'helion :
$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = b$ hevelep ma ve da f ur werzh kendalc'hek h_i war nep entremez $]x_{i-1}, x_i[$. Graet e vez *sammegenn Riemann* ar gevreizhenn f, war an entremez $[a, b]$, eus ar gwerc'hel S, dizalc'h diouzh an heuliad desellet :

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i - x_{i-1})}$$

Mar taoler evezh ez eo $h_i = f(\xi_i)$, gant $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$ ha mar noter
$(\Delta x_i) = x_i - x_{i-1}$, e teu :

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\Delta x_i)}$$

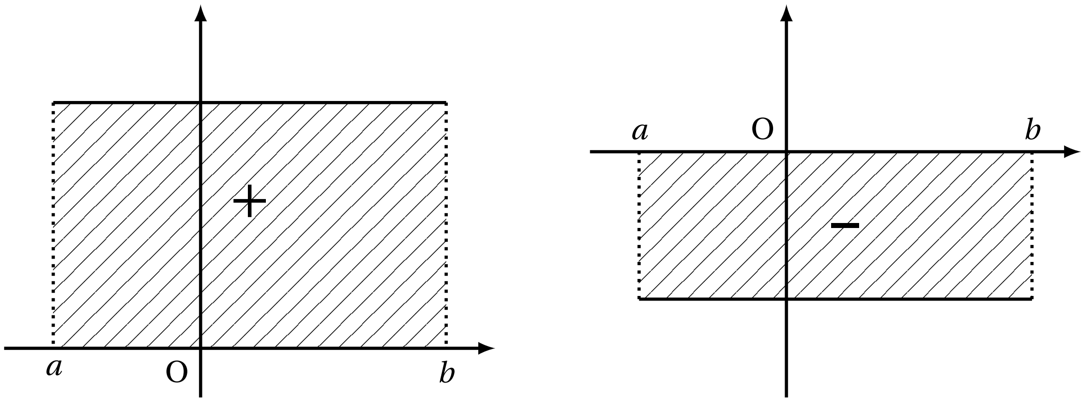
Derc'hennañ a reer ar sammegenn-se dre an arouez : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ a lenner “sammegenn *f(x) dx* eus a da b”. Teurel evezh : mut eo an argemmenn x :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(.)\,\mathrm{d}.$$

• **Desteriadur ar sammegenn :** gorread aljebrel un domani plaen.
Bezet, evit ur gevreizhenn f war bazinier, an domani plaen teskad ar poentoù $\mathrm{M}(x, y)$, hevelep ma'z eo x endalc'het etre a ha b ha y endalc'het etre 0 ha $f(x)$.

Graet e vez gorread aljebrel an domani-se eus ar gwerc'hel :

$$\mathcal{G} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Mar eroler amregenn an domani war an tu muiel a'r blaenenn durc'haet o vont eus a da b ez eo muiel gorread aljebrel an domani. Mar eroler amregenn an domani war an tu leiel o vont eus a da b ez eo leiel gorread aljebrel an domani.

• Sammegenn ur gevreizhenn :

Ur gevreizhenn niverel f savelet ha bonnet war un entremez serr $[a, b]$ a vez lavaret sammegadus war an entremez-se mar ampar teskad sammegennoù ar c'hevreizhennoù war bazinier o leiantiñ f ha teskad ar c'hevreizhennoù war bazinier o vuiantiñ f daou deskad kefin eus $\mathbb{R}$. Neuze, mard eo sammegadus f e reer sammegenn ar gevreizhenn f war an entremez $[a, b]$ eus gwerzhad boutin bonnoù sammegennoù ar c'hevreizhennoù war bazinier o sternañ f, ha notañ a reer :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}s,$$

Bezet an domani plaen, teskad ar poentoù $\mathrm{M}(x, y)$, hevelep ma'z eo endalc'het x etre a ha b, ha y endalc'het etre 0 ha $f(x)$. Gorread aljebrel an domani-se a reer eus ar gwerc'hel :

$$\mathcal{G} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Delakadennoù :
~ Sammegadus war an entremez serr $[a, b]$ eo nep kevreizhenn savelet, unton war $[a, b]$.
~ Sammegadus eo ar c'hevreizhennoù bonnet, unton a entremezioù.
~ Sammegadus eo ar c'hevreizhennoù kendalc'hek.

• **Perzhioù ar sammegañ :**

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\ ;\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

~ Linennegezh ar sammegañ :

$\approx$ Sammadezh : $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

$\approx$ Ungenezhded : $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

E se, teskad ar c'hevreizhennoù sammegadus a ampar un egor sturiadel war $\mathbb{R}$ hag ur furm linennek muiel war an egor sturiadel-se eo ar sammegenn (mard eo $a < b$ ha mard eo f ur gevreizhenn vuiel ha sammegadus war $[a, b]$, neuze ez eo muiel $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

• **Perzhioù o tennañ d'an daveadur urzhiañ :**

Delakadenn : Mard eo f sammegadus war $[a, b]$ gant $a < b$, muiel pe vannel war $[a, b]$, neuze :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Delakadenn : Mard eo f ha g sammegadus war $[a, b]$ gant $a < b$, ha mard eo $f \geqslant g$ war $[a, b]$, neuze :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Delakadenn: Mard eo f sammegadus war $[a,b]$ gant $a<b$ ha mard eus eus ur gwerc'hel M muiel pe vannel, hevelep ma'z eo $\forall x, x \in [a,b], \left|f(x)\right| \leqslant M$, neuze :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M(b-a)$$

• **Reollun ar c'heitad :**

Delakadenn : Mard eo f sammegadus war $[a,b]$ ha mar arouez m ha M a-getep isvonn hag usvonn f war $[a,b]$, neuze ez eus ur gwerc'hel µ eus $[m,\mathrm{M}]$, hevelep ma'z eo :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$$

Ar gwerc'hel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a vez graet gwerzh keitat ar gevreizhenn f war $[a,b]$. Emañ etre nep leiant ha nep muiant eus f war $[a,b]$.

En degouezh ma'z eo kendalc'hek f war $[a,b]$ ez eo dedalvezadus an delakadenn diwezhañ hag, hervez delakadenn diazez ar gendalc'hegezh, ez eus un niver c eus an entremez $[a,b]$, hevelep ma'z eo :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$$

• **Kevreizhenn savelet dre ur sammegenn :**

~ Bezet ur gevreizhenn f sammegadus war $[a,b]$. Hervez despizadur ar sammegenn, evit c diforzh festet eus $[a,b]$ hag evit x diforzh eus $[a,b]$ e kevred ar sammegadur ouzh ar gwerc'hel x ar gwerc'hel $\displaystyle\int_c^t f(t)\,\mathrm{d}t$. Da heul, c o vezañ festet, sammegadur f a gevaraez savelañ ur gevreizhenn F, hevelep ma'z eo, evit nep x eus $[a,b]$: $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad c \in [a,b]$.

~ Perzhioù : ar gevreizhenn F zo kendalc'hek war $[a,b]$.

Delakadenn :
Mard eo f ur gevreizhenn kendalc'hek war $[a, b]$, ar gevreizhenn F savelet war $[a, b]$ dre $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ c \in [a, b]$ zo kendalc'hek ha diarroudadus war $[a, b]$.
Diarroudenn F eo f.

220 KEVREIZHENN GENTEK UR GEVREIZHENN NIVEREL

• **Despizadur :**

Bezet ur gevreizhenn f savelet war un entremez I. Graet e vez kevreizhenn gentek (pe c'hoazh : kentegenn) f war an entremez I eus nep kevreizhenn F a zo an diarroudenn gentañ F' anezhi, war an entremez I, ar gevreizhenn f he unan. Da neuze ez eo heñvelster ar bommoù : "f eo diarroudenn F" hag "F zo ur gentegenn eus f".

~ Mard eo kendalc'hek f war $[a, b]$ ha mard eo α ur gwerc'hel diforzh festet eus $[a, b]$, ar gevreizhenn F_α savelet war $[a, b]$ dre :

$F_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$ zo ur gentegenn eus f.

~ Mard eo F ur gentegenn eus f war un entremez I eus $\mathbb{R}$, nep kevreizhenn gentek eus f zo savelet dre $(F + C)$ ma'z eo C ur gevreizhenn arstalek (un arstalenn).

• **Daveadur etre sammegenn ha kentegenn :**

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Gwerzh sammegenn ar gevreizhenn f war $[a, b]$ zo par d'an diforc'h etre gwerzh ur gentegenn F eus f evit b hag evit a.

Evezhiadenn : Pep hini eus kentegennoù ar gevreizhenn f kendalc'hek war I a vez notet, hevelep ma'z eo :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$$

N'eus nemet ur gentegenn dezhi ur werzh roet en ur poent roet eus I.

- **Kentegennoù boas :**

Entremez	**Kevreizhenn**	**Kentegenn**
War $\mathbb{R}$	0	C
War $\mathbb{R}$	a (arstalenn)	$ax+C$
War $\mathbb{R}$ mard eo $\alpha \in \mathbb{N}$ War $\mathbb{R}^*$ mard eo α kevan <-1 War $\mathbb{R}_+^*$ mard eo $\alpha \in (\mathbb{R}-\mathbb{Z})$	x^{α}	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
War $\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
War $\mathbb{R}$, mard eo $a \neq 0$	$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
War $\mathbb{R}$, mard eo $a \neq 0$	$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad k \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x+C$
War $]k\pi, \pi+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\mathrm{cotan}^2 x$	$-\mathrm{cotan} x+C$
f ha g o deus da gentegennoù F ha G war un entremez I	$f+g$	$F+G+C$
λ gwerc'hel roet, F kentegenn f war I	λf	$\lambda F+C$
f' ha g' zo diarroudennoù f ha g war I	$f'g+fg'$	$fg+C$
f' ha g' zo diarroudennoù f ha g war I ha ned eo ket mannel g war I	$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$	$\dfrac{f}{g}+C$

Entremez	Kevreizhenn	Kentegenn
f he deus da ziarroudenn f' ha f^α zo savelet war I hag $\alpha \neq -1$	$f^\alpha f'$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
f he deus f' da ziarroudenn war I ha f ned eo ket mannel war I	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
f' eo diarroudenn f war I	$f'\mathrm{e}^f$	$\mathrm{e}^f + C$

• **Sammegadur trezarnat :**

Bezet u ha v div gevreizhenn diarroudadus, dezho da ziarroudennoù u' ha v' kendalc'hek war un entremez I. Diarroudenn al liesâd uv war I zo :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

E se evit nep t eus I : $u(t)v'(t) = (uv)'(t) - u'(t)v(t)$.

Alese :

$$\boxed{\int_a^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^x - \int_a^x v(t)u'(t)\,\mathrm{d}t}$$

• **Kentegennoù ar c'hevreizhennoù kelc'hel :**

$$\boxed{f(x) = \cos(ax+b) \Longrightarrow F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C}$$

$$\boxed{f(x) = \sin(ax+b) \Longrightarrow F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C}$$

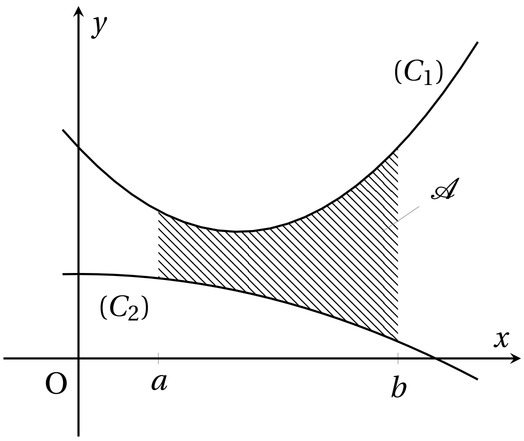
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \Longrightarrow F(x) = \tan(ax+b) + C}$$

221 DEDALVEZADUR AR SAMMEGAÑ

• **Kounañ :**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

Gorreadoù :



Bezet f ha g kevreizhennoù sammegadus war $[a,b]$, $a<b$, hevelep ma'z eo :

$$\forall x, x \in [a,b], g(x) \leqslant f(x).$$

Dezanvomp dre (C_1) ha (C_2) ar c'hrommennoù o terc'hennañ a-getep f ha g war $[a,b]$ en un dealf reizhreolel.

Gorread niveroniel $\mathscr{A}$ an domani plaen, teskad ar poentoù $\mathrm{M}(x,y)$, hevelep ma'z eo : $a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$ zo :

$$\boxed{\mathscr{A} = \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x \text{ unanenn c'horread}}$$

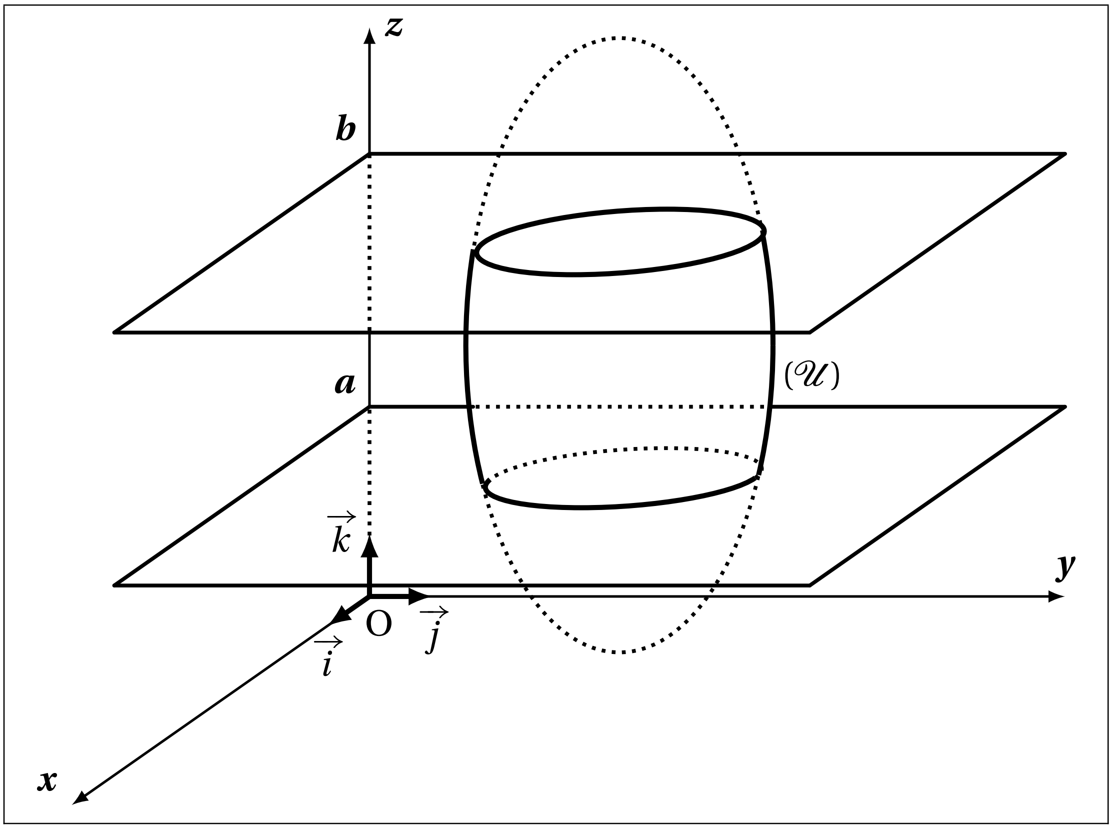
• **Ec'honadoù :**

En egor alvezel, a zo an egor keouenn euklidel teirment un delvan anezhañ, e c'haller despizañ ec'honenn diabarzh ur c'horreenn serr $(\mathscr{U})$.

Bezet un dealf reizhreolel $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Dezanvomp dre V ec'honad diabarzh ar c'horreenn $(\mathscr{U})$ endalc'het etre ar plaenennoù a ha b o savennoù, $a<b$. Bezet un isrannadur eus $[a,b]$:

$z_0 = a,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{i-1},\ z_i,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = b$ ha bezet $S(\zeta_i)$ gorread skejad $(\mathscr{U})$ gant ar blaenenn a savenn ζ_i $\left(z_{i-1} \leqslant \zeta_i \leqslant z_i\right)$. An ec'honad ΔV bevennet gant ar c'horreenn $(\mathscr{U})$ hag ar plaenennoù z_{i-1} ha z_i zo sternet gant ec'honadoù div granenn a zo o diazoù savlec'hiet er plaenennoù-se hag o sav boutin : $(z_i - z_{i-1})$.



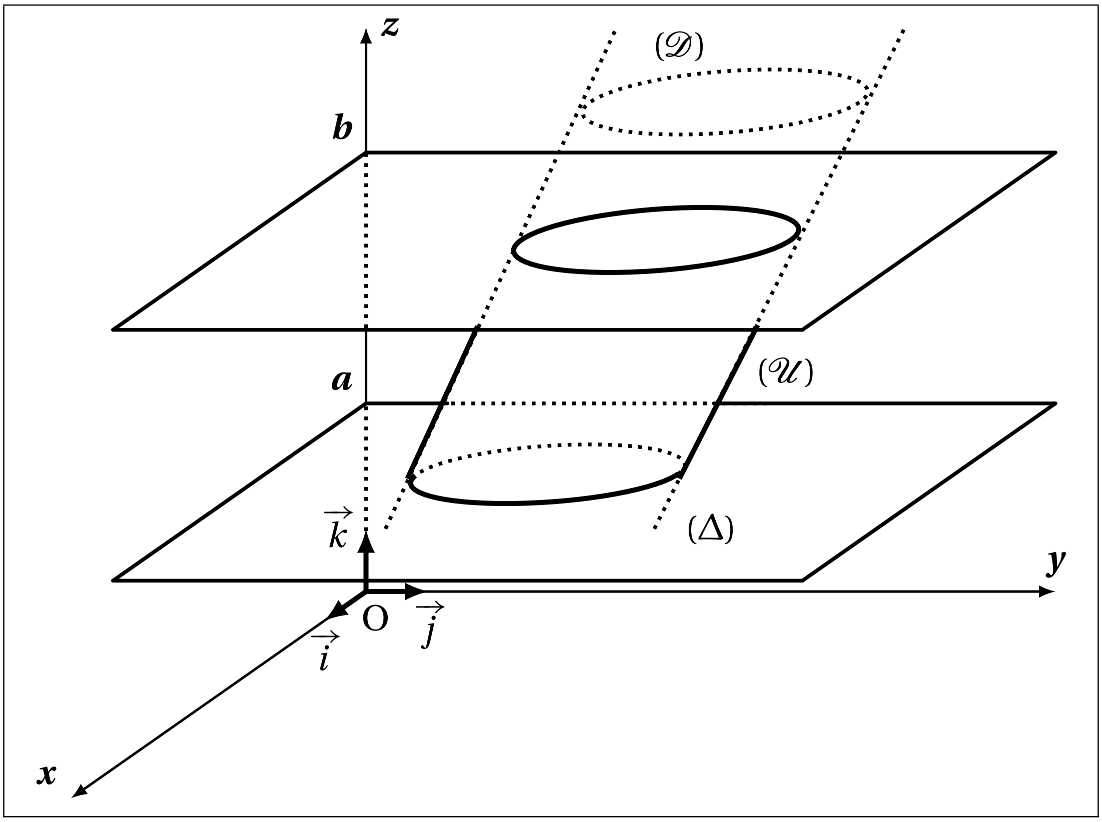
E se ez adkaver an hentenn arveret da savelañ sammegenn ur gevreizhenn sternet gant div gevreizhenn war bazinier. Darbenn a reomp ez eo ur werzhad arnesadek eus V :

$$\sum_{i=1}^{n} S(\zeta_i)(z_i - z_{i-1})$$

Darbenn a reomp ivez enta :

$$\boxed{V = \int_a^b S(z)\,\mathrm{d}z}$$

~ Bezet ur c'horreenn blaen $(\mathscr{D})$ hag un eeunenn (Δ) ankenstur d'ar blaenenn gannet gant $(\mathscr{D})$. Graet e vez gorreenn granennek (pe: kranc'horreenn) eus teskad poentoù an eeunennoù kenstur da (Δ) harp ouzh $(\mathscr{D})$. Ul levierenn eus ar granc'horreenn eo $(\mathscr{D})$. Ur c'hanerenn eus ar c'horreenn granennek eo nep kensturienn da (Δ) harp ouzh $(\mathscr{D})$. Goulakaomp (Δ) ankenstur d'ar blaenenn $(x\mathrm{O}y)$. Graet e vez kranenn (kranec'honenn) eus teskad ar poentoù diabarzh d'ar granc'horreenn $(\mathscr{U})$ ha dalc'het etre div blaenenn kenstur d'ar blaenenn $(x\mathrm{O}y)$, o savennoù ketep a ha b, $a < b$.



Evezhiadenn :

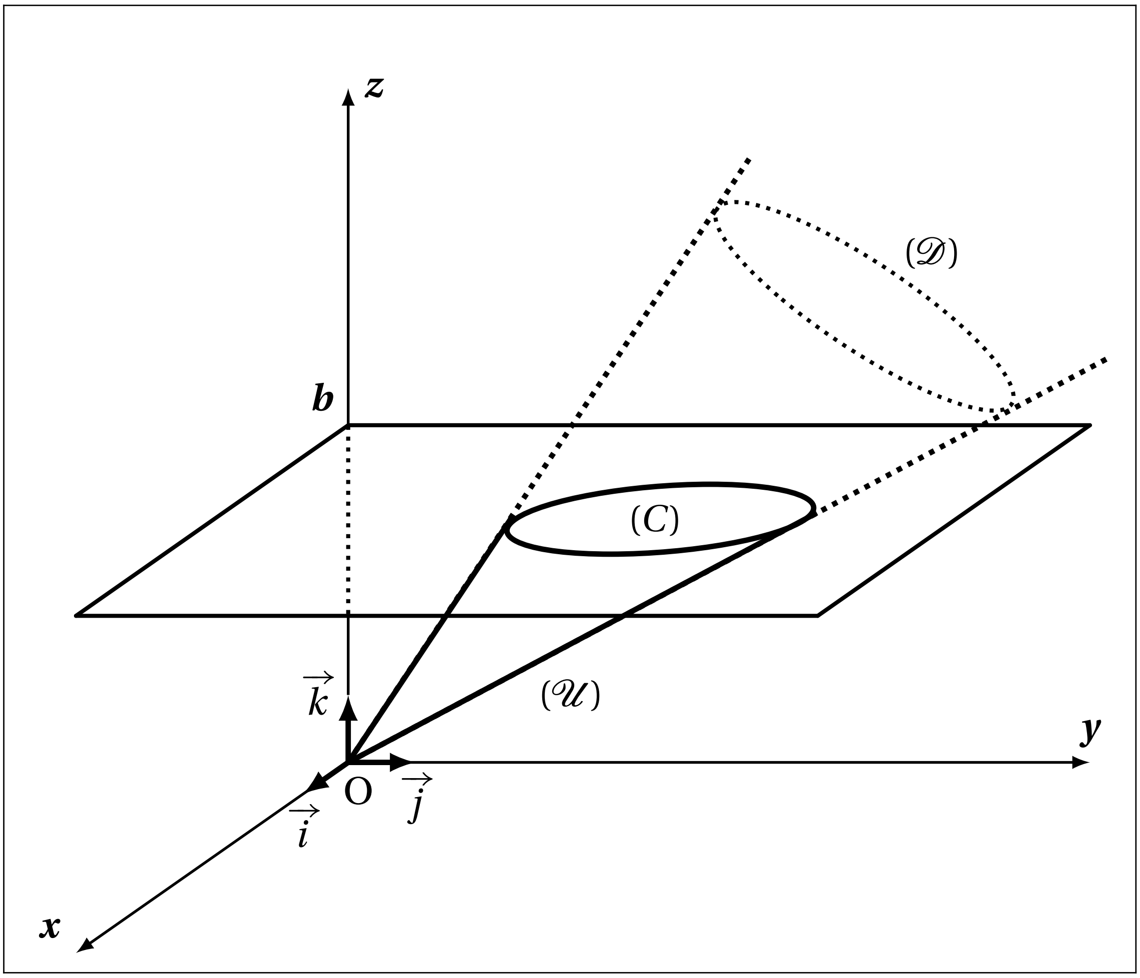
Mard eo ($\mathscr{D}$) ul liestueg e vez lavaret ez eo ($\mathscr{U}$) ur c'horreenn gengerek (kengerc'horreenn ivez) ha neuze e teu ar granenn da vezañ ur c'hengereg. Div blaenenn genstur d'ar blaenenn (xOy) a skej ($\mathscr{U}$) hervez div grommenn gevelep dre un treuzkludadur. Pa argemm z e chom $S(z)$ arstalek enta, par da S_0. Ec'honad ar granenn (pe ar c'hengereg) zo neuze :

$$V = \int_a^b S_0 \, \mathrm{d}z$$

$$\boxed{V = S_0(b-a)}$$

ma'z eo S_0 gorread diaz ar granenn (pe ar c'hengereg) ha $(b-a)$ sav ar granenn (pe ar c'hengereg).

~ Bezet ur grommenn blaen ($\mathscr{D}$) hag ur poent O diavaez d'ar blaenenn gannet gant ($\mathscr{D}$). Graet e vez gorreenn gernennek — pe c'hoazh : kernc'horreenn — eus teskad poentoù an eeunennoù o tremen dre O ha harp ouzh $(\mathscr{D})$. Ar grommenn $(\mathscr{D})$ zo ul levierenn eus ar gernc'horreenn. Un eeunenn o tremen dre O ha harp ouzh $(\mathscr{D})$ zo ur c'hanerenn eus ar gernc'horreenn. Ar poent O a vez anvet "kern". Orin an dealf o vezañ O e reer kernenn (kernec'honenn) eus teskad ar poentoù diabarzh d'ar gernc'horreenn $(\mathscr{U})$ endalc'het etre ar blaenenn $(x\mathrm{O}y)$ he savenn 0 hag ur blaenenn genstur he savenn b, $b > 0$.



Evezhiadenn :

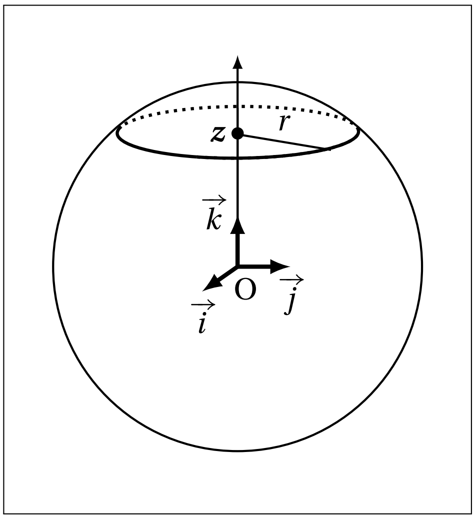
~ Mard eo $(\mathscr{D})$ ul liestueg e teu ar c'horreenn $(\mathscr{U})$ da vezañ ur c'horreenn gerndalek hag ar gernenn a zeu da vezañ ur c'herndaleg. Ar grommenn (C) kenskejadur ar blaenenn atalad $z = b$ hag ar c'horreenn gernennek (pe gerndalek) zo diaz ar gernenn (pe ar c'herndaleg) hag ar gwerc'hel muiel b zo sav ar gernenn (pe ar c'herndaleg).

~ Ur blaenenn genstur d'ar blaenenn $(x\mathrm{O}y)$, he savenn z $(0 \leqslant z \leqslant b)$ a skej $(\mathscr{U})$ hervez ur grommenn (C'), keveleb (C) dre an heñvelstaladur $(\mathrm{O}, z/b)$.

Mard eo (C) ur c'harrez, e du λ hag e c'horread $S_0 = \lambda^2$, (C') zo ur c'harrez ivez e du par da $\dfrac{\lambda z}{b}$ hag e c'horread $S(z) = \dfrac{\lambda^2 z^2}{b^2} = \dfrac{S_0 z^2}{b^2}$. Darbenn a reomp ez eo gorread $S(z)$ eus (C'), evit (C) diforzh he gorread diabarzh S_0 : $S(z) = S_0 \dfrac{z^2}{b^2}$.

Ec'honad ar gernenn (pe ar c'herndaleg) a jeder neuze :

$$\mathrm{V} = \int_a^b S_0 \frac{z^2}{b^2} \mathrm{d}z = \frac{S_0}{b^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^b = \frac{S_0 b}{3}$$



Bezet ur bellenn kreizet en O he skin a. Orin an dealf eo O.

Ar blaenenn a sav z, $-a \leqslant z \leqslant a$, kenstur d'ar blaenenn $(x\mathrm{O}y)$ a skej ar bellenn hervez ur c'helc'h a skin r, hevelep ma'z eo :

$$r^2 + z^2 = a^2$$

Gorread ar c'helc'h-se zo :

$$\boxed{S(z) = \pi\left(a^2 - z^2\right)}$$

Ec'honad diabarzh V ar bellenn, anvet pellennec'honad, zo :

$$V = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - z^2)\,\mathrm{d}z = \pi\left[a^2 z - \frac{z^2}{3}\right]_{-a}^{a} = 2\pi\left[a^3 - \frac{a^3}{3}\right]$$

$$\boxed{V = \frac{4\pi a^3}{3}}$$

• **Lankadoù anniñv :**

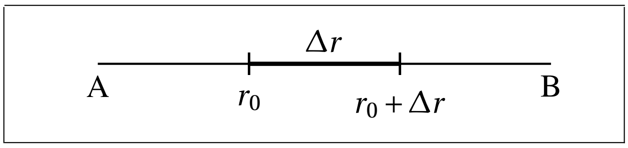
O vezañ roet ur poent O (pe un eeunenn (Δ), pe ur blaenenn (P)), dezanvomp dre r_i ar pellder eus ar poent A_i d'ar poent O (pe d'an eeunenn (Δ), pe d'ar blaenenn (P)).

Graet e vez lankad anniñv un teskad poentoù $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ o zolz ketep $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ e-keñver ar poent O (pe an eeunenn (Δ), pe ar blaenenn (P)), eus ar gwerc'hel :

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Ar sammegañ a gevaraez jediñ lankadoù anniñv sonnennoù ungenezh :

~ <u>Skouer 1</u> :



Jedomp da skouer lankad anniñv ur c'harenn ungenezh AB e-keñver ar poent A, he hirder l hag he zolzder ec'honel regel μ.

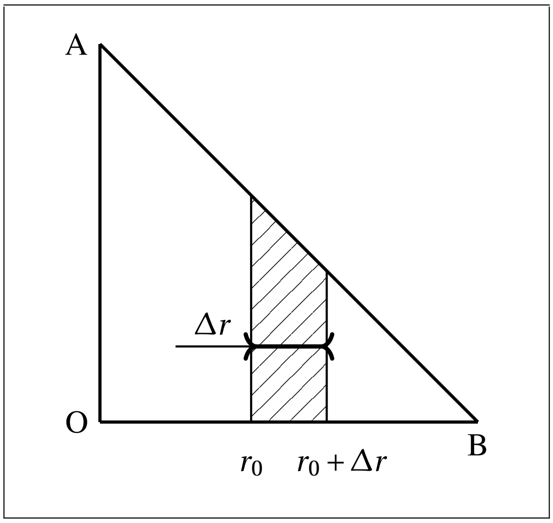
Evit nep elfenn eus ar c'harenn a hirder Δr, endalc'het etre ar poentoù r_0 ha $r_0 + \Delta r$ ez eo $\mu \Delta r$ an tolz. He lankad anniñv e-keñver ar poent A, orin an dealf, zo endalc'het etre $\mu \cdot \Delta \cdot r_0^2$ ha $\mu \cdot \Delta \cdot (r_0 + \Delta r)^2$ (adkavout a reer an hentenn da savelañ sammegenn ur gevreizhenn sternet gant div gevreizhenn war bazinier). Lankad anniñv ar c'harenn AB e-keñver ar poent A zo :

$$I = \int_0^l \mu r^2 \, \mathrm{d}r. \quad \text{Alese : } I = \mu \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^l = \mu \frac{l^3}{3}$$

Tolz ar c'harenn o vezañ $M = \mu l$, e teu :

$$\boxed{I = \frac{Ml^2}{3}}$$

~ <u>Skouer 2</u> :

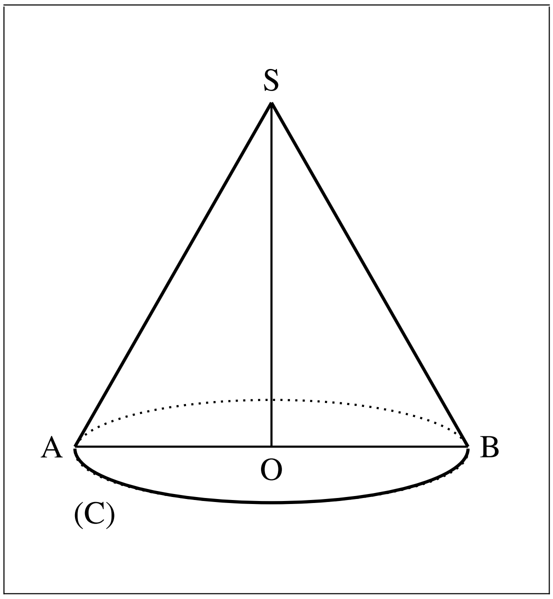


Heñveldra evit ur blakenn ungenezh (OAB) dezhi stumm un tric'horn serzh keitgarek (OA = OB = l) e c'haller jediñ he lankad anniñv e-keñver (OA). Bezet μ an tolzder ec'honel gorreel.

$$I = \int_0^l \mu(l-r)r^2\,\mathrm{d}r$$

$$\boxed{\text{Alese : } I = \mu\frac{l^4}{12}}$$

~ <u>Skouer 3</u> :



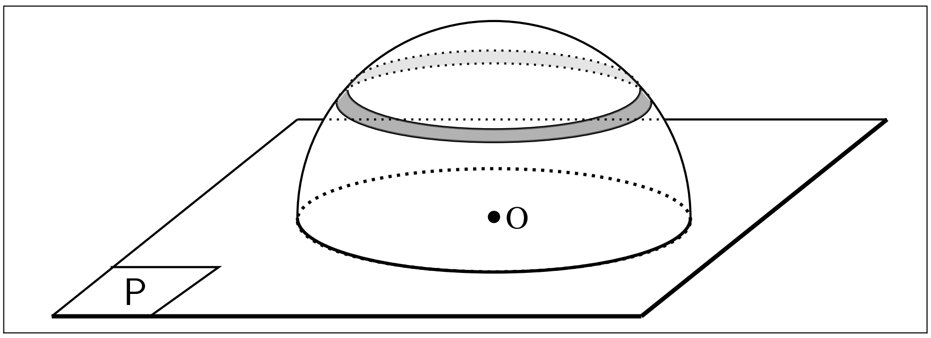
Lankad anniñv ur gernenn ungenezh, μ he zolzder ec'honel, S he c'hern, he levierenn ur c'helc'h (C) a skin a kreizet en O, (SAB) o vezañ un tric'horn keittuek, zo e-keñver an eeunenn (SO) :

$$\boxed{I = \frac{3Ma^2}{10}}$$

Gant :

$$M = \mu V = \frac{\pi\mu a^3\sqrt{3}}{3}$$

~ <u>Skouer 4</u> :



Bezet un hantervoull ungenezh a dolzder ec'honel μ, bevennet gant un hanterbellenn kreizet en O, a skin a ha gant ur c'helc'h bras a'r bellenn.

Tolz an hantervoull zo : $M = \dfrac{2\pi a^3 \mu}{3}$.

Ur blaenenn (Q) a zo r, $r \leqslant a$, he fellder diouzh ar blaenenn (P), a skej ar bellenn hervez ur c'helc'h (Γ a skin $\sqrt{r^2 - a^2}$. Diskouez a reer e c'hell lankad anniñv an elfenn amparet gant teskad ar poentoù a'n hantervoull, a zo o fellder diouzh ar blaenenn (P) er gavael r_0 ha $r_0 + \Delta r$, bezañ sternet evel er skoueriοù diaraok hag ur werzhad arnesadek zo neuze $\pi\mu(a^2 - r_0^2) r_0^2 \Delta r$. Lankad anniñv an hantervoull e-keñver (P) zo :

$$I = \int_0^a \pi\mu(a^2 - r^2) r^2 \, \mathrm{d}r.$$

Neuze :

$$I = \pi\mu \left[a^2 \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^a \Longrightarrow I = \frac{Ma^2}{5}$$

$$\boxed{I = \frac{Ma^2}{5}}$$

LOGARITMOÙ HAG ARGEMMVAC’HENNOÙ

222 KEVREIZHENN LOGARITM NEPEREL

• Despizadur :

Graet e vez logaritm neperel eus ar gevreizhenn a zo, war an entremez $]0,+\infty[$, ur gent-egenn eus ar gevreizhenn $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ hag a zo par da vann evit ar werzhad 1 eus x.

Ar gevreizhenn-se zo savelet war $\mathbb{R}^{+*}$ ha notet :

$$\boxed{\forall x,\ x \in \mathbb{R}^{+*} :\ \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}$$

~ Ar gevreizhenn $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ o vezañ savelet ha kendalc'hek war $]0,+\infty[$ ez eo ar gevreizhenn $x \longmapsto \ln x$ savelet, kendalc'hek ha diarroudadus war an un entremez.

~ Diarroudenn ar gevreizhenn logaritm zo, dre zespizadur, ar gevreizhenn $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Hogen $\dfrac{1}{x}$ zo muiel strizh war $]0,+\infty[$. Da heul ez eo ar gevreizhenn logaritm kengresk strizh war an entremez $]0,+\infty]$.

• Desteriadur kevregat :

Reizhreolel eo an dealf. Bezet ar skourr hiperbolenn o terc'hennañ graf ar gevreizhenn savelet dre $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ evit $t > 0$. Gorread $\mathscr{A}$ ar c'horreenn blaen bevennet gant an eeunenn (Ot), ar grommenn (H), an eeunenn atalad $t = 1$ hag an eeunenn atalad $t = x$ zo :

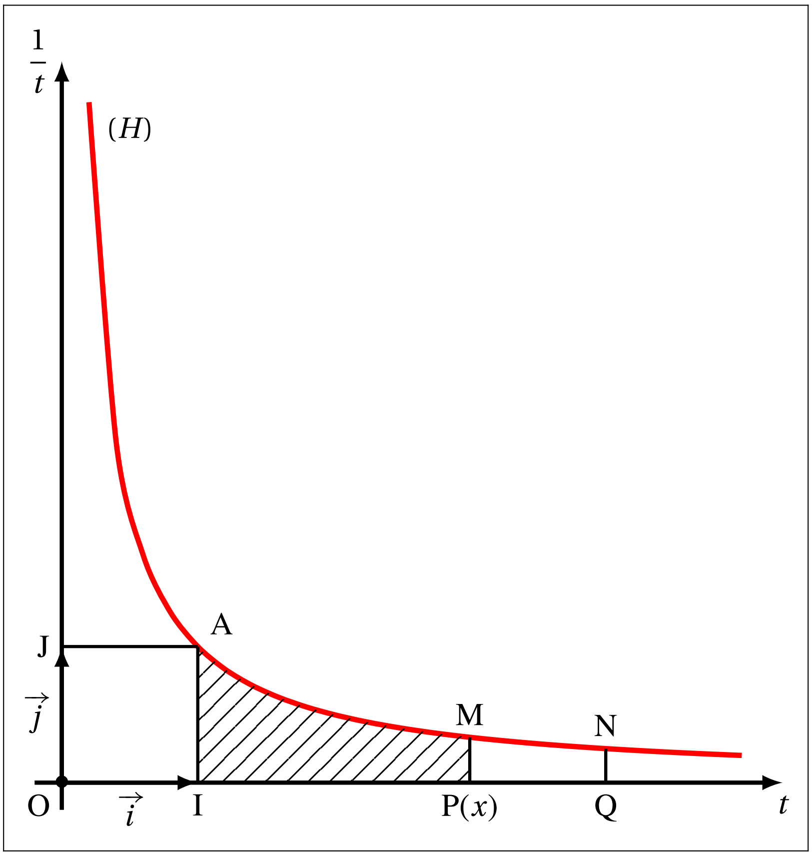
$\mathscr{A} = \int_t^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_t^x = \ln x - \ln 1$. Hogen $\ln 1 = 0$, neuze $\mathscr{A} = \ln x$.

Ar gwerc'hel $\ln x$ zo gorread an domani IPMA.

~ Mard eo $x > 1$ ez eo muiel ar gorread : $x > 1 \Longrightarrow \ln x > 0$.

~ Mard eo x endalc'het etre 0 hag 1 ez eo leiel ar gorread :

$$0 < x < 1 \Longrightarrow \ln x < 0$$



• **Perzhioù :**

~ Diarroudenn $x \longmapsto \ln\left|u(x)\right|$: $\left(\ln\left|u(x)\right|\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

~ War nep entremez I ma ne vannela ket u ez eo kentegennoù $\dfrac{u'}{u}$: $\ln|u| + C$

~ Logaritm neperel ul liesâd :

$$\forall a,\ a \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x, x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln ax = \ln a + \ln x$$

<u>Evezhiadenn</u> : $\ln ab = \ln|a| + \ln|b|,\ ab > 0$.

~ Logaritm neperel ur c’heñver :

$$\forall a,\ a \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall b,\ b \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

<u>Evezhiadenn</u> : $\ln\frac{a}{b} = \ln|a| - \ln|b|,\ \frac{a}{b} > 0.$

~ Logaritm un n-vac’had, n kevan :

$$x \in \mathbb{R}^{+*},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ln x^n = n \ln x$$

~ Logaritm ur mac’had, ar mac’her o vezañ ur c’hemezel :

$$x \in \mathbb{R}^{+*},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ \ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\ln x$$

• **Diarroudenn logaritmek :**

Bezet u ur gevreizhenn niverel, diarroudadus war un entremez I hag anvanneladus war I.

Diarroudenn logaritmek u war I zo ar c’heñver $\frac{u'}{u}$.

Bez’ ez eo diarroudenn $\ln\left|u(x)\right|$ war I.

Diskouez a reer, u ha v o vezañ diarroudadus hag anvanneladus war I :

$$z = uv \Longrightarrow \frac{z'}{z} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} \quad \text{hag} \quad y = \frac{u}{v} \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

~ Bezet $y = u^n$ ma ’z eo u ur gevreizhenn x diarroudadus hag anvannel, hag n ur c’hevan daveel festet :

$$y = u^n \Longrightarrow \frac{y'}{y} = n\frac{u'}{u}$$

• **Harzoù :**

Diskouez a reer an harzoù-mañ da heul :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(\ln x) = +\infty} \quad \boxed{\lim_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty} \quad \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0^+}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0^-} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

• Ar gwerc'hel e :

An atalad $\ln x = 1$ zo dezhañ un diskoulm hepken : **e** (ar gevreizhenn logaritm neperel zo savelet ha kendalc'hek war $\mathbb{R}^{+*}$, unton kengresk war an kez entremez. Amparañ a ra ur c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}^{+*}$ war $\mathbb{R}$). Ur werzhad arnesadek eus **e** zo :

$$\mathrm{e} \approx 2,718282$$

• Studi ar gevreizhenn logaritm neperel :

~Savelva : $\mathbb{R}^{+*}$.

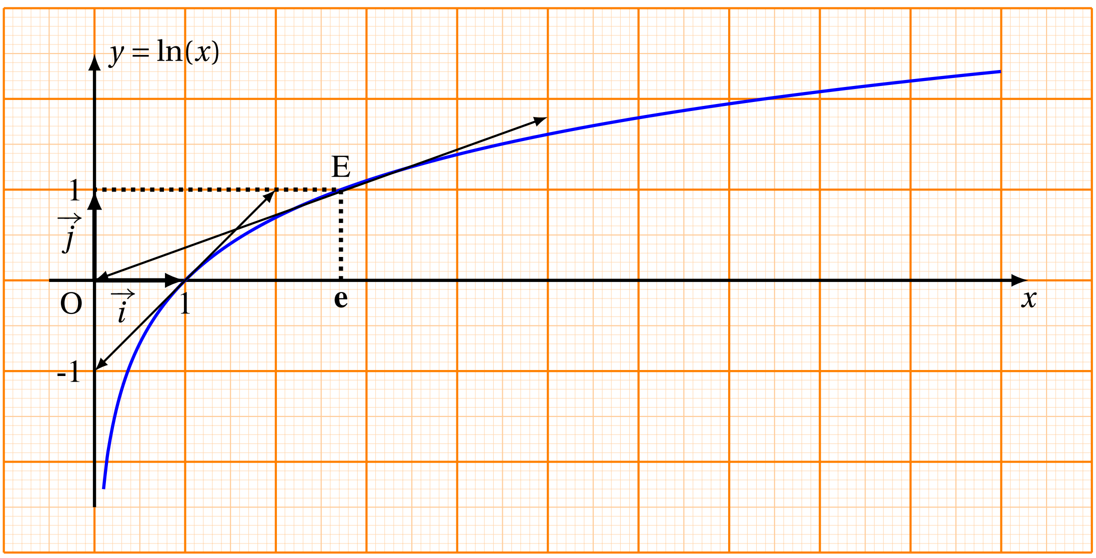
~ Studi ar gevreizhenn ouzh he bonnoù :

$\lim_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty$ hag $\lim_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty$

~Taolenn an argemmoù :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖		$+$		
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

~ Krommenn o terc'hennañ ar gevreizhenn :



~ Evit $x = 1$: $\ln 1 = 0$; diarroudad $f'(1) = 1$, atalad ar spinenn er poent I : $y = x - 1$.

~ Evit $x = \mathrm{e}$, $\ln \mathrm{e} = 1$, diarroudad $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, atalad ar spinenn er poent E : $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Ar spinenn-se a dremen dre orin ahelioù an daveennoù.

~ Evit $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$: $\ln \dfrac{1}{\mathrm{e}} = -1$, diarroudad $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e}$.

Klozadur : An arloadur logaritm neperel zo :

~ ur c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}^{+*}$ war $\mathbb{R}$.

~ hevelep ma'z eo evit a ha b gwerc'helion muiel strizh :

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$$

~ Ouzhpenn se $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ hag $(\mathbb{R}, +)$ zo daou stroll. Da heul :

> Ur c'hendelvadur eus ar stroll liesadel $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ war ar stroll sammadel $(\mathbb{R}, +)$ eo an arloadur logaritm neperel ln.

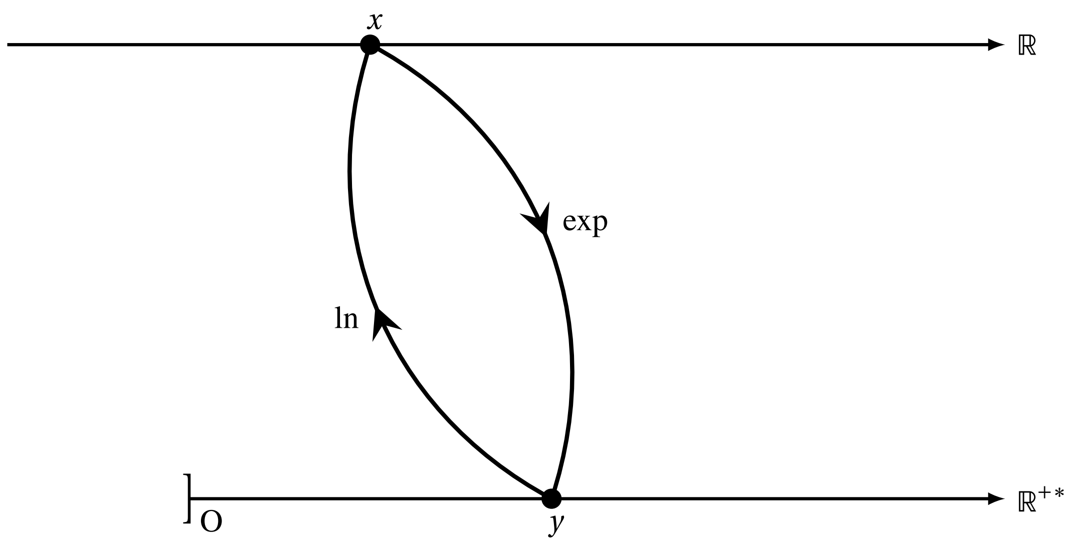
Dastumomp perzhioù pennañ ar c'hendelvadur :

	$(\mathbb{R}^{+*}, \times)$		$(\mathbb{R}, +)$
Dezv	$c = a \times b$	$\xrightarrow{\ln}$	$\ln c = \ln a + \ln b$
Elfenn neptu	1		$\ln 1 = 0$
Elfenn gemparzhek	$b = \dfrac{1}{a}$		$\ln b = -\ln a$

223 KEVREIZHENN ARGEMMVAC'HEL DIAZEZ e

• **Despizadur :**

Ar gevreizhenn logaritm neperel zo ur c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}^{+*}$ war $\mathbb{R}$. Ar gevreizhenn-se zo savelet, kendalc'hek ha kengresk strizh war $\mathbb{R}^{+*}$; teskad ar gwerzhadoù eo $\mathbb{R}$. Dezhi ez eus enta ur gevreizhenn geveskemm savelet war $\mathbb{R}$, teskad he gwerzhadoù o vezañ $\mathbb{R}^{+*}$.



Graet e vez kevreizhenn argemmvac'hel (pe argemmvac'henn) diazez **e** eus kevreizhenn geveskemm ar gevreizhenn logaritm neperel.

Notañ a reer exp x ha lenn "argemmvac'henn x".

$$x \longmapsto \exp x$$

$$\boxed{\text{E se } x \in \mathbb{R}, y = \exp x \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R}^{+*},\ x = \ln y}$$

Dezastum a reer ar perzhioù-mañ da heul diwar an despizadur :

~ An argemmvac'henn zo ur c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}$ war $\mathbb{R}^{*+}$. Da neuze ez eus evit pep gwerc'hel x ur gwerc'hel unel, $\exp x$, muiel strizh.

~ Kendalc'hek ha kengresk strizh war $\mathbb{R}$ eo an argemmvac'henn.

~ $\ln 1 = 0 \Longrightarrow \exp 0 = 1$ hag $\ln e = 1 \Longrightarrow \exp 1 = e$.

~ Goût a ouzer ez eo kediad ur c'hesaezhadur gant e geveskemmenn arunadur ur parzh eus $\mathbb{R}$ warnañ e unan :

$\forall x, x \in \mathbb{R}^{+*}, \exp(\ln x) = x$ hag $\forall x, x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = x$.

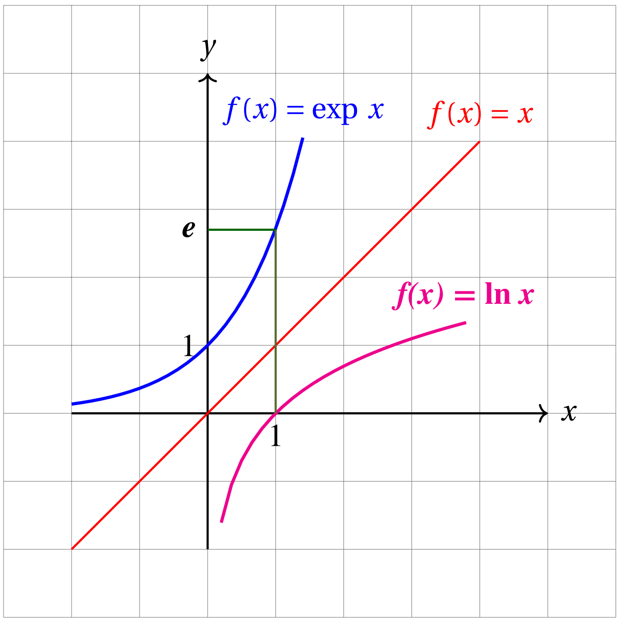
~ O vezañ ma'z eo $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x) = +\infty$, neuze $\lim\limits_{x \to \infty} (\exp x) = +\infty$.

~ O vezañ ma'z eo $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x) = -\infty$, neuze $\lim\limits_{x \to -\infty} (\exp x) = 0^+$

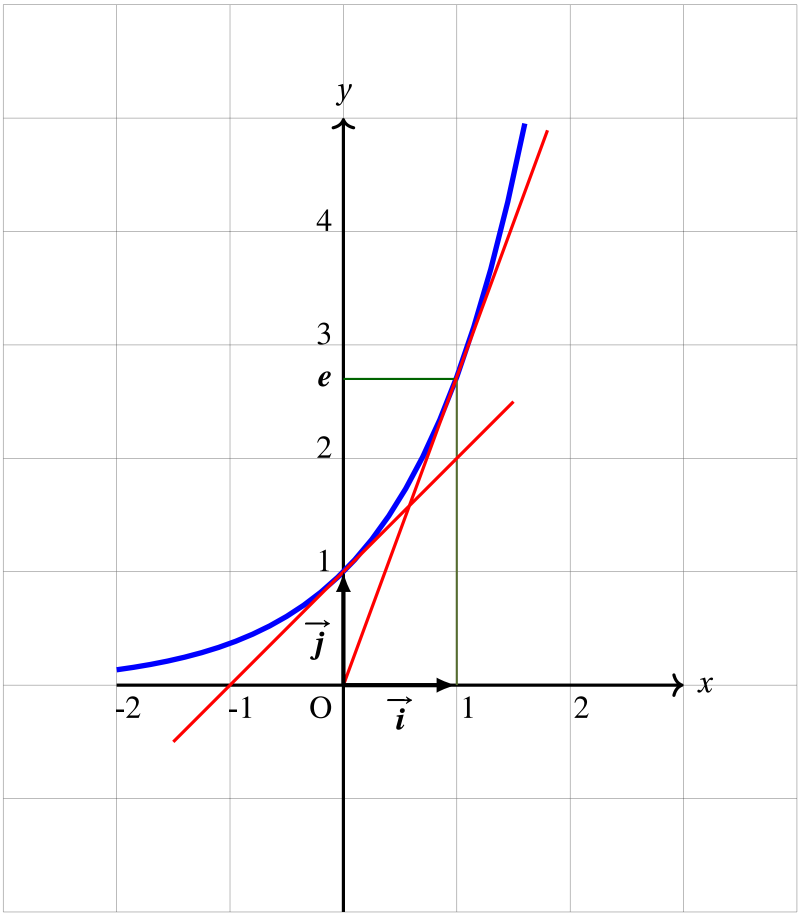
~ Taolenn argemmoù ar gevreizhenn exp x :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp x$	0^+	1	e	$+\infty$

~ Krommenn derc'hennañ ar gevreizhenn exp x :



An dealf $(O, \vec{i}, \vec{j})$ o vezañ reizhreolel ez eo ar grommenn o terc'hennañ graf ar gevreizhenn argemmvac'hel kemparzhek d'ar grommenn o terc'hennañ graf ar gevreizhenn logaritm e-keñver kreizkornenn al ledeeunennoù (Ox) hag (Oy).



• **Perzhioù :**

~ Perzh diazez :

Delakadenn :
an argemmvac'henn diazez **e** zo ur c'hendelvadur eus ar stroll ($\mathbb{R}^{+*}$) war ar stroll ($\mathbb{R}^{+*}$, $\times$). Eleze :

$$\forall\ (a,b),(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \exp(a+b)=\exp a\times\exp b$$

~ Ouzh elfenn neptu ar stroll ($\mathbb{R}$, $+$), 0, ez eo kevredet dre ar c'hendelvadur exp elfenn neptu ar stroll ($\mathbb{R}^{+*},\times$), 1 : eleze $\exp 0=1$.

~ Ouzh daou werc'hel gourzharouez ar stroll ($\mathbb{R}$, $+$) ez eo kevredet dre ar c'hendelvadur exp div elfenn c'hin a'r stroll ($\mathbb{R}^{+*},\times$) ; bezet :

$$\boxed{\exp(-a)=\frac{1}{\exp a}}$$

• Notadur e^x :

Savelet ez eus bet evit logaritm neperel ur gwerc'hel α muiel strizh savet d'ur mac'h kemezel :

$$(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, r \in \mathbb{Q} : \beta = \alpha^r \Longrightarrow \ln\beta = r \ln\alpha.$$

Arouezomp dre a ha b ar gwerc'helion $a = \ln\alpha$ ha $b = \ln\beta$. Dre zespizadur an argemmvac'henn :

$$a = \ln\alpha \Longleftrightarrow \alpha = \exp a \quad \text{ha} \quad b = \ln\beta \Longleftrightarrow \beta = \exp b.$$

Alese : $$\exp b = (\exp a)^r.$$

Hag ivez : $$\ln\beta = r\ln\alpha \Longrightarrow b = r\,a.$$

Dezren a reer :

$$\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall r, r \in \mathbb{Q}, \exp(r\,a) = (\exp a)^r$$

Ent dibarek, mard eo $a = 1$, eleze $\alpha = \mathrm{e}$: $\exp r = (\exp 1)^r = \mathrm{e}^r$. Alese :

$$\boxed{\forall r, r \in \mathbb{Q},\ \exp r = \mathrm{e}^r}$$

Desellomp bremañ ar parder $\exp r = \mathrm{e}^r$. Eil kazel ar parder-se n'he deus ur ster nemet mard eo kemezel r ; en enep he deus ar gazel gentañ ur ster evit r gwerc'hel diforzh, kemezel pe get. Da gendivizad e vo skrivet evit nep gwerc'hel x :

$$\exp x = \mathrm{e}^x.$$

Savelet eo an argemmvac'henn diazez **e** dre :

$$\boxed{x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}}$$

Alese an anv "argemmvac'henn" :

Ar mac'her eo an argemmenn, ar mac'hed eo an diazez **e**. E se hon eus astennet ar mac'hañ da vac'h ur gwerc'hel diforzh, evit an niver **e** hepken. Adkavout a reer ar perzhioù usveneget dre zedalvezout perzhioù boas ar mac'hoù :

$e^0 = 1$	$e^1 = e$
$\ln e^x = x$	$e^{\ln x} = x$
$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
Mard eo $b \in \mathbb{Q}, \left(e^a\right)^b = e^{ab}$	

• **Diarroudenn :**

Diarroudenn an argemmvac’henn e^x zo e^x ivez. Da heul ez eo an n-vet diarroudenn :

$$\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$$

• **Kentegennoù :**

$$\int_a^x e^t \, dt + C = e^x + C_1$$

$$\int_a^x e^{u(t)} \cdot u^{'}(t) \, dt + C = e^{u(x)} + C_1$$

• **Harzoù :**

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \quad \boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = +\infty} \quad \boxed{\lim_{x \to -\infty} (xe^x) = 0^-}$$

224 KEVREIZHENNOÙ LOGARITM

• **Despizadur :**

Kounaomp perzhioù naouus d’ar gevreizhenn logaritm neperel.

Evit a ha b gwerc’helion diforzh :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\frac{1}{a} = -\ln a \quad ; \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^r = r\ln a,\ r \in \mathbb{Q}$$

Bezet k ur gwerc'hel anvannel ha f_k ar gevreizhenn savelet dre : $f_k(x) = k\ln x$. O liesaat dre k an div gazel eus ar parderioù amañ diaraok e teu pemp parder nevez o tezverkañ perzhioù ar gevreizhenn f_k, en o zouez :

$$f_k(a \times b) = f_k(a) \times f_k(b)$$

Nep kevreizhenn eus ar rizh-se a anver kevreizhenn logaritm.

Evel ln ez eo f_k savelet ha kendalc'hek war $\mathbb{R}^{+*}$.

• **Kendelvadur a bouez :**

~ Ar gevreizhenn $f_k(x) = k\ln x$ he deus da ziarroudenn $f_k^{'}$, hevelep ma'z eo :

$$f_k^{'}(x) = \frac{k}{x}$$

Mard eo k muiel ez eo f_k kengresk strizh war $\mathbb{R}^{+*}$.

Mard eo k leiel ez eo f_k gingresk strizh war $\mathbb{R}^{+*}$.

~ Diwar an disoc'hoù savelet evit harzoù ar gevreizhenn logaritm neperel e teu diouzhtu :

$k > 0$	$k < 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f_k = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f_k = +\infty$

E se e savel nep kevreizhenn logaritm ur c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}^{+*}$ war $\mathbb{R}$.

Ouzhpenn se ez eo $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ hag $(\mathbb{R}, +)$ daou stroll. Da heul, evel al logaritm neperel :

Nep kevreizhenn logaritm zo ur c'hendelvadur eus ar stroll liesadel $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ war ar stroll sammadel $(\mathbb{R}, +)$.

• Diazez ur gevreizhenn logaritm :

Ar c'hesaezhadur usveneget a gevaraez diogeliñ ez eus ur gwerc'hel unel a muiel strizh, hevelep ma 'z eo $f_k(a) = 1$. Ar gwerc'hel-se a vez graet diazez ar gevreizhenn logaritm f_k.

$$f_k(a) = 1 \Longleftrightarrow k \ln a = 1$$

Ar gwerc'hel a zo diforc'h diouzh 1 ha $\ln a \neq 0$. Neuze : $k = \dfrac{1}{\ln a}$ hag alese :

$$f_k(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

~ Despizadur :

Ur gwerc'hel a muiel strizh diforc'h diouzh 1 o vezañ roet ez anver kevreizhenn logaritm diazez a ar c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}^{+*}$ war $\mathbb{R}$ savelet dre :

$$x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$

Notañ a reer : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

• Diazezoù pennañ :

~ Al logaritmoù neperel diazez **e** : $\log_e x = \dfrac{\ln x}{\ln e} = \ln x$.

~ Al logaritmoù diazez 10 : $\log_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

(an arstalenn $M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0,43429$).

• **Studi ar gevreizhenn logaritm diazez *a* :**

~ Savelva : $\mathbb{R}^{+*}$.

~ Harzoù : $\begin{cases} a > 1 \ (k > 0) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a = -\infty \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a < 1 \ \ (k < 0) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a = +\infty \end{cases}$

~ Taolenn an argemmoù :

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

E se, mard eo a brasoc'h eget unan ez eo ar gevreizhenn kengresk strizh war $\mathbb{R}^{+*}$; mard eo a endalc'het etre mann hag unan ez eo ar gevreizhenn gingresk strizh war $\mathbb{R}^{+*}$. Sed an taolennoù :

$a > 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

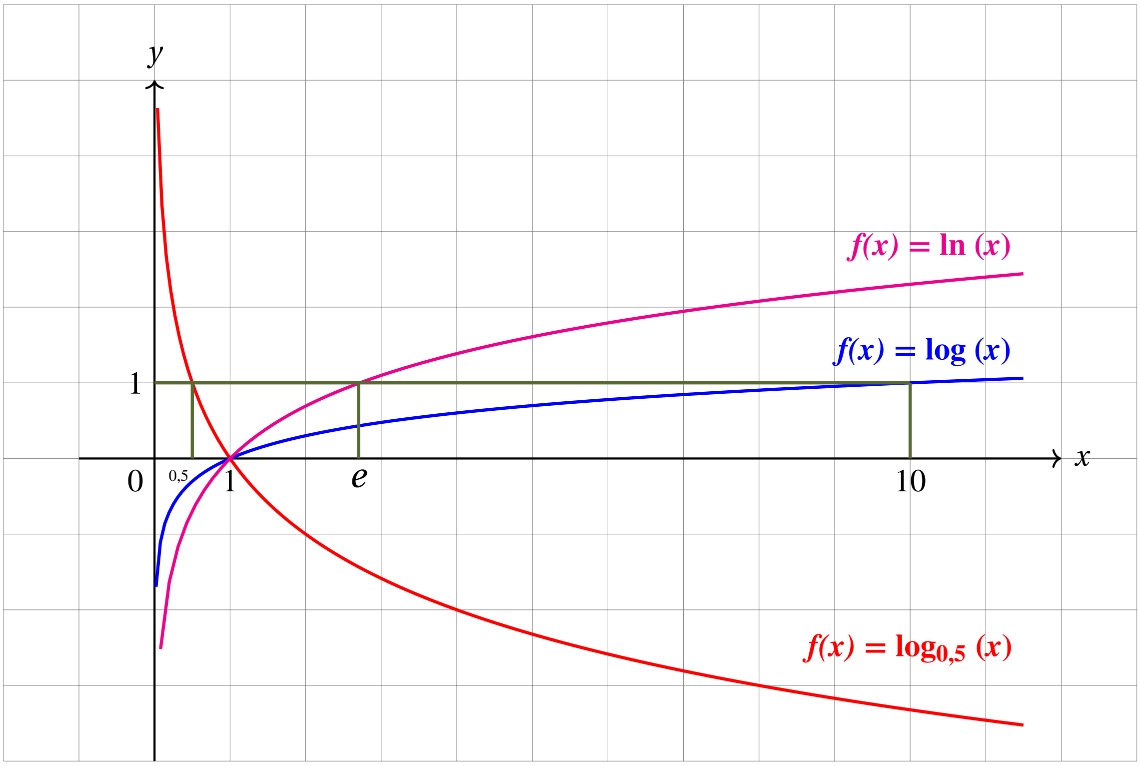
$0 < a < 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$		
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Evit ar werzhad 1 roet da x ez eo par ar gevreizhenn da 0 hag an diarroudad zo : $\dfrac{1}{\ln a}$.

Evit ar werzhad a roet da x ez eo par ar gevreizhenn da 1 hag an diarroudad zo : $\dfrac{1}{a \ln a}$.

~ Krommenn derc'hennañ :



~ Kemmañ diazez : $\log_b x = \log_b a \times \log_a x$

225 KEVREIZHENNOÙ ARGEMMVAC'HEL

• Despizadur :

Bezet a ur gwerc'hel muiel diforc'h diouzh 1. Gwelet hon eus ez eo ar gevreizhenn logaritm diazez a ur c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}^{+*}$ war $\mathbb{R}$. Savelet, kendalc'hek hag unton war $\mathbb{R}^{+*}$. Kengresk strizh eo mard eo $a > 1$ ha gingresk strizh mard eo $0 < a < 1$. Dezhi ez eus enta ur gevreizhenn geveskemm savelet war $\mathbb{R}$, teskad he gwerzhadoù o vezañ $\mathbb{R}^{+*}$.

Graet e vez argemmvac'henn diazez a eus keveskemmenn ar gevreizhenn logaritm diazez a.

$$x \in \mathbb{R},\ y = \exp_a x \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R}^{+*},\ x = \log_a y$$

• **Dianlenadoù :**

~ Ar gevreizhenn $\exp a$ zo ur c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}$ war $\mathbb{R}^{+*}$. Da heul, evit nep x gwerc'hel ez eus ur gwerc'hel unel, $\exp_a x$, muiel strizh.

~ Kendalc'hek hag unton war $\mathbb{R}$ eo an argemmvac'henn diazez a.

~ $\log_a 1 = 0 \Longrightarrow \exp_a 0 = 1 \quad : \quad \log_a a = 1 \Longrightarrow \exp_a 1 = a$

~ O kediañ ar c'hesaezhadur $\log_a$ hag e geveskemmenn $\exp_a$ e tisoc'her gant an arunadur eus ur parzh eus $\mathbb{R}$ warnañ e unan :

$$\forall x, x \in \mathbb{R},\ \log_a(\exp_a)x = x$$

$$\forall x, x \in \mathbb{R},\ \exp_a(\log_a x) = x$$

• **Notadur all $\exp_a$:**

Dre zespizadur :

$$y = \exp_a x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \log_a y \\ y > 0 \end{cases}. \text{ Neuze :}$$

$$y = \exp_a x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\ln y}{\ln a} \\ y > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln y = x \ln a, \quad \ln a \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Alese : $y = \exp_a x \Longleftrightarrow y = \mathrm{e}^{x \ln a}$

$$\boxed{\exp_a x = \mathrm{e}^{x \ln a}}$$

(Dre gendivizad $\forall x, x \in \mathbb{R}, \exp_1 x = \mathrm{e}^0 = 1$)

• **Perzhioù :**

~ Perzh diazez : An argemmvac'henn diazez a zo ur c'hendelvadur eus ar stroll $(\mathbb{R}, +)$ war ar stroll $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$. Eleze :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a x_1 \times \exp_a x_2}$$

~ Ouzh elfenn neptu 0 ar stroll $(\mathbb{R},+)$ ez eo kevredet dre ar c'hendelvadur $\exp_a$ elfenn neptu ar stroll $(\mathbb{R}^{+*},\times)$, eleze : $\exp_a 0 = 1$.

Ouzh daou werc'hel gourzharouez a'r stroll $(\mathbb{R},+)$ ez eo kevredet dre ar c'hendelvadur $\exp_a$ div elfenn c'hin eus ar stroll $(\mathbb{R}^{+*},\times)$, eleze :

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a x}$$

• **Notadur a^x :**

Dre gendivizad, evit nep gwerc'hel x e lakaer : $\exp_a x = a^x$. Savelet eo an argemmvac'henn diazez a dre : $x \longmapsto a^x, x \in \mathbb{R}$. Neuze : $\boldsymbol{a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}}$.

Evel reizh ez eo kembez ar c'hendivizad-se gant perzhioù boas ar mac'hoù. En notadur $\boldsymbol{a^x}$ e kaver an argemmenn evel mac'her, alese an anv a "argemmvac'henn".

<u>Evezhiadenn</u> : An daveadur $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{ab}$ zo bet astennet evit nep a ha nep b gwerc'hel.

• **Studi an argemmvac'henn diazez a :**

~ Savelva : $f(x) = a^x$ zo savelet, kendalc'hek ha muiel strizh war $\mathbb{R}$.

~ Harzoù :

$a > 1$	$0 < a < 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0^+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0^+$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

~ Diarroudenn :

$$\boxed{f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a}$$

~ Taolenn an argemmoù :

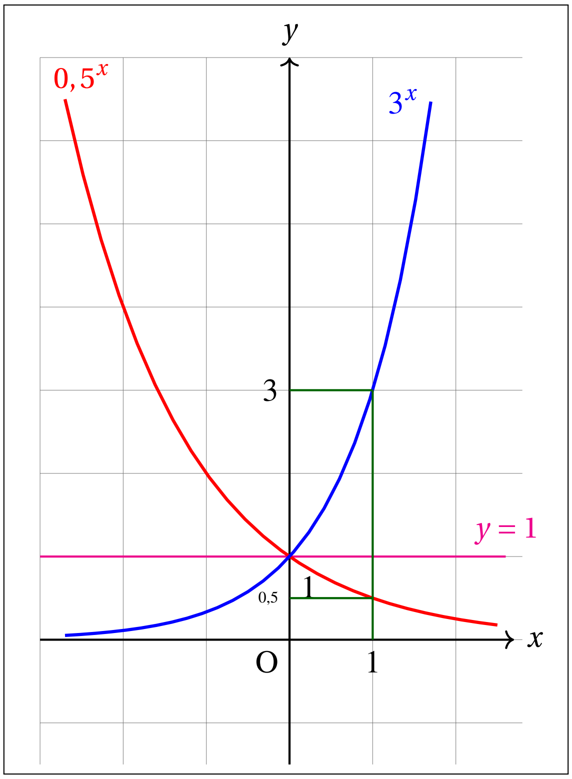
$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0^+ \nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0^+

~ Krommenn derc'hennañ :



Kounañ :

Krommennoù derc'hennañ ar c'hevreizhennoù $y = \log_a x$ hag $y = a^x$ zo kemparzhek e-keñver kreizkornenn al ledeeunennoù (Ox) hag (Oy).

Evezhiadenn :

Evit an diazez $a = 1$ hon eus kendivizet ez eo an argemmvac'henn diazez a ar gevreizhenn arstalek $y = 1$.

• **Dedalvezaduriоù :**

~ Kentegennoù $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

Ar gevreizhenn $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ he deus da ziarroudenn $f'(x) = a^x \ln x$.

Da neuze, ar gevreizhenn g savelet dre :

$g(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}$ he deus da ziarroudenn $g'(x)=\dfrac{a^x\ln a}{\ln a}=a^x$. Ur gentegenn eus $f(x)=a^x$ eo g enta.

$$\boxed{\text{Kentegennoù ar gevreizhenn } f(x)=a^x \text{ zo } F(x)=\dfrac{a^x}{\ln a}+C}$$

• **Kevreizhennoù $x\longmapsto x^a, a\in\mathbb{R}^*$:**

~ Despizadur : Evit nep gwerc'hel a ha nep gwerc'hel x muiel strizh ez eo ar gevreizhenn $x\longmapsto x^a$ savelet dre : $x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$.

~ Diarroudenn : $f'(x)=ax^{a-1}$.

~ Taolenn an argemmoù :

$a>1$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ 0^+	$\nearrow$	$+\infty$

$a=1$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	1	
$f(x)$	$\|$ 0^+	$\nearrow$	$+\infty$

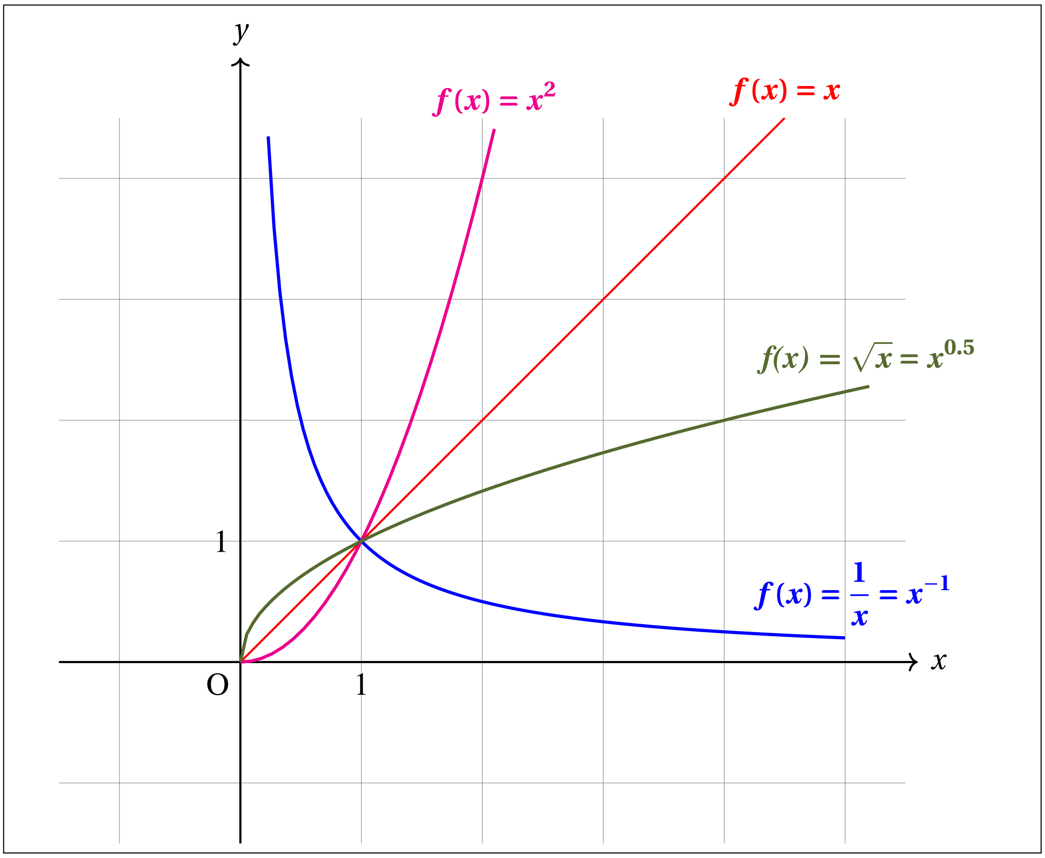
$0<a<1$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ 0^+	$\nearrow$	$+\infty$

$a<0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0^+

~ Krommenn derc'hennañ :



- An holl grommennoù a dremen dre ar poent $(1, 1)$.
- Ar c'hrommennoù o klotañ ouzh $a = 0$ hag $a = 1$ zo a-getep al ledeeunennoù savelet dre :

$$\begin{cases} y = 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{hag} \quad \begin{cases} y = x \\ x > 0 \end{cases}$$

- Mard eo $\alpha < 0$ he deus ar grommenn an aheliou da gehelc'hennoù.

- Mard eo $\alpha > 1$ he deus ar grommenn, pa denn x war-du $+\infty$, an ahel $(O, \vec{j})$ da roud kehelc'hat ; ur skourr parabolek eo neuze ar skourr anvevenn desellet.

- Mard eo $0 < \alpha < 1$ he deus ar grommenn, pa denn x war-du $+\infty$, an ahel $(O, \vec{i})$ da roud kehelc'hat ; ur skourr parabolek eo neuze ar skourr anvevenn desellet.

ATALADOÙ ORGEMMEL

226 ATALADOÙ ORGEMMEL

• **Despizadur :**

Bezet ur gevreizhenn niverel d'an argemmenn x diarroudadus n gwech war I, $n \in \mathbb{N}^*$, (mard eo $n = 1$, ez eo f diarroudadus war I). Graet e vez atalad orgemmel a'n n-vet urzh eus nep atalad eus ar rezh : $\forall x \in \mathrm{I}, \Phi\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^n(x)\right) = 0$; eleze ur parder ma ne engwerc'her nemet an argemmenn x pe kevreizhennoù x (ent dibarek arstalennoù) hag ar gevreizhenn f pe he diarroudennoù.

~ Notadur : War-benn eeunaat ar skrivañ e vez boaziet an notadurioù-mañ da heul : $y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$ e-lec'h ar gwerc'helion :

$$f(x), f'(x), f''(x), f^{(3)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

hag ivez a-wechoù ar c'hevreizhennoù

$$f, f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}, \text{ pa na vez forc'hellegezh ebet.}$$

Diskoulmañ (pe sammegañ) an atalad orgemmel

$$f\left(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

zo savelañ an holl gevreizhennoù $x \longmapsto y$ a wir an atalad.

• **Despizadur :**

Nep atalad orgemmel savelet dre un atalad $\Phi\left(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$ hag a c'haller skrivañ er rezh :

$$\forall x \in \mathrm{I}, a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

a vez graet atalad orgemmel linennek anezhañ. Ennañ ez eo $a_0, a_1, \dots, a_n, g$ kevreizhennoù niverel d'an argemmenn x savelet war I. An $n+1$ kevreizhenn $a_0, a_1, \dots, a_n$ a vez anvet : gwezhiaderioù an atalad.

Mard eo ar c'hevreizhennoù-se arstalennoù e lavarer neuze ez eo un atalad orgemmel linennek gant gwezhiaderioù arstalek.

Mard eo ar gevreizhenn g ar gevreizhenn arun gant mann e vez lavaret ez eo ungenezh an atalad. Eleze : un atalad orgemmel linennek ungenezh gant gwezhiaderioù arstalek a'n urzh n zo un atalad orgemmel a'n urzh n savelet dre :

$$\boxed{\forall x \in I, a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = 0}$$

• **Perzhioù ataladoù orgemmel linennek an urzh $n, n \in \mathbb{N}$:**

~ Teskad diskoulmoù un atalad linennek ungenezh a'n urzh n a ampar un egor sturiadel (isegor sturiadel egor sturiadel ar c'hevreizhennoù diarroudadus n gwech war $\mathbb{R}$). Eleze, mard eo $x \longmapsto y_1$ hag $x \longmapsto y_2$ daou ziskoulm diforzh war **I** eus an atalad linennek ungenezh :

$$x \longmapsto y \text{ diskoulm an atalad} \Longleftrightarrow a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = 0 \quad \forall x \in I$$

(gant $a_0 \neq f_0$, f_0 kevreizhenn arun gant mann), neuze nep atalad $x \longmapsto y$ savelet dre gedaozadur linennek y_1 hag y_2 : $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, ma 'z eo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ zo un diskoulm eus an atalad ivez.

Evezhiadennoù :

~ Ar gevreizhenn arun gant mann f_0 : $x \longmapsto 0$ zo zo un diskoulm eus an holl ataladoù ungenezh.

~ Teskad diskoulmoù un atalad linennek diungenezh a'n urzh n zo teskad ar c'hevreizhennoù $x \longmapsto y_0 + z$ ma'z eo y_0 un diskoulm dibarek eus an atalad roet (diungenezh) :

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = g(x)$$

ha $z \in S$, teskad sammegennoù (diskoulmoù) an atalad ungenezh kevredet :

$$a_0(x) z + a_1(x) z' + \cdots + a_n(x) z^{(n)} = 0$$

~ O vezañ ma'z eo $x \longmapsto \mathrm{e}^x = y$ un diskoulm eus an atalad orgemmel ungenezh $y - y' = 0$, an holl gevreizhennoù $x \longmapsto \alpha \mathrm{e}^x$ gant $\alpha \in \mathbb{R}$ zo diskoulmoù ivez.

Heñvel dra : $y = e^{ax} \Longrightarrow y' = ae^{ax}$ ha neuze $ay - y' = 0$. Da heul, an ataladoù er rezh $ay - y' = 0$ gant $a \in \mathbb{R}$ o deus da ziskoulmoù ar c'hevreizhennoù $y = \alpha e^{ax}$ gant $\alpha \in \mathbb{R}$.

~ $x \longmapsto \sin x = y \Longrightarrow y' = \cos x,\ y'' = -\sin x = -y$

$x \longmapsto \cos x = y \Longrightarrow y' = -\sin x,\ y'' = -\cos x = -y$

Da heul ez eo an div gevreizhenn $x \longmapsto \sin x$ hag $x \longmapsto \cos x$ daou ziskoulm dibarek eus an atalad orgemmel a'n eil urzh $y' + y'' = 0$. Setu perak ez eo nep kedaozadur linennek eus an div gevreizhenn-se un diskoulm eus an kez atalad :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ : x \longmapsto \alpha \sin x + \beta \cos x.$$

Heñvel dra : $y = \cos ax$ pe $y = \sin ax$ a empleg $y'' = -a^2 y$ pe $a^2 y + y'' = 0$. Neuze an atalad $a^2 y + y'' = 0$ en deus da ziskoulmoù an holl gevreizhennoù :

$$x \longmapsto \alpha \sin ax + \beta \cos ax \quad \text{gant} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ (mard eo } a \neq 0).$$

227 ATALADOÙ ORGEMMEL AR GENTAÑ URZH GANT GWEZHIADERIOÙ ARSTALEK : $ay' + by = q(x), (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (A)

• $\boldsymbol{ay' + by = 0, (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}}$: ataladoù linennek ungenezh ar gentañ urzh gant gwezhiaderioù arstalek :

> Teskad diskoulmoù an atalad $ay' + by = 0$ $(a \neq 0)$ zo :
>
> $$S_{(a,b)} = \left\{ x \longmapsto \alpha e^{-\frac{b}{a}x} / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Evezhiadenn</u> : Mard eo $b = 0$ $(a \neq 0)$ e kaver teskad an arstalennoù da ziskoulmoù $y' = 0$.

• **Perzhioù :**

~ Evit nep $a \in \mathbb{R}^*$ ha nep $b \in \mathbb{R}$, teskad $S_{(a,b)}$ diskoulmoù an atalad linennek ungenezh a'r gentañ urzh gant gwezhiaderioù arstalek $ay' + by = 0$ a ampar un egor sturiadel a vent 1 war $\mathbb{R}$ (eeunenn sturiadel) a zo un isegor sturiadel eus egor sturiadel $\mathscr{F}_1$ ar c'hevreizhennoù diarroudadus war $\mathbb{R}$.

An eeunenn sturiadel-se he deus da ziazez ar gevreizhenn : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$ (pe nep kevreizhenn $x \longmapsto \alpha\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$ mard eo $\alpha \neq 0$).

~ Bezet x_0 ur werzhad roet eus x, neuze $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ez eus un diskoulm hepken $(x \longmapsto y))$ eus an atalad (A) $ay' + by = 0$ a wir an amveziad $x_0 \longmapsto y_0$, ma'z eo y_0 ur gwerc'hel roet.

$$\text{An kez diskoulm zo : } x \longmapsto \left(y_0 \mathrm{e}^{\frac{b}{a}x_0}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$$

Ent dibarek : Mard eo $x_0 = 0$ hag $0 \longmapsto y_0$, neuze diskoulm nemetañ $ay' + by = 0$ o kemer ar werzhad y_0 e 0 zo $y = y_0\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$.

- **Skouerioù ataladoù diungenezh linennek a'r gentañ urzh gantgwezhiaderioù arstalek :**

$$\text{Bezet (A)} \iff ay' + by = g(x), \text{ gant } (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

$$\text{ha } g \neq f_0 \ (\exists x \in \mathrm{I} : g(x) \neq 0) \text{ ha } g \text{ kendalc'hek war I.}$$

~ Degouezh dibarek : $b = 0$: (A) $\iff ay' = g(x)$ gant $a \neq 0$ ha $g \neq f_0 \iff y' = \dfrac{1}{a}g(x)$, g o vezañ kendalc'hek war I zo dezhañ kentegennoù war I. Bezet G unan anezho. Neuze :

$$\forall x \in \mathrm{I}\, y = \frac{1}{a}\mathrm{G}(x) + C, \text{ ma'z eo } C \in \mathbb{R}.$$

Teskad diskoulmoù an atalad $ay' = g(x)$ zo teskad ar c'hevreizhennoù
savelet war I dre $x \longmapsto \frac{1}{a}\mathrm{G}(x) + C$ ma'z eo $C \in \mathbb{R}$
ha G ur gentegenn eus g war I.

~ Skouerioù ataladoù eus ar rizh $ay' + by = g(x),\ (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ha $g \neq f_0$:

≈ $ay' + by = c$ ($a \neq$ ha $b \neq 0$ ha c arstalenn anvannel) :

$$x \longmapsto \alpha e^{-\frac{b}{a}x} + \frac{c}{b}, \quad \text{ma'z eo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

≈ $ay' + by = e^x$ ($a \neq 0$ ha $b \neq 0$) :

$$x \longmapsto \frac{1}{a+b}e^x + \alpha e^{-\frac{b}{a}x} \text{ ma'z } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mard eo : $a = -b$, neuze e teu : $x \longmapsto y = e^x\left(\frac{1}{a}x + \alpha\right)$ ma'z eo $\alpha \in \mathbb{R}$.

228 ATALADOÙ LINENNEK AN EIL URZH GANT GWEZHIADERIOÙ ARSTALEK : $ay'' + by' + cy = g(x), a \neq 0$

• **Ataladoù ungenezh an eil urzh savelet dre :** $ay'' + by' + cy = 0, (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Bezet $\mathrm{S}_{(a,b,c)}$ teskad sammegennoù an atalad).

1 Degouezh dibarek : $b = 0$. An atalad zo neuze $y'' + \frac{c}{a}y = 0$.

~ Mard eo $c = 0$: an atalad a zeu da vezañ $y'' = 0$. Teskad an diskoulmoù zo :

$$y = \alpha x + \beta \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

~ Mard eo $c \neq 0$. $\frac{c}{a}$ a c'hell bezañ muiel pe leiel. Neuze $\frac{c}{a} = k^2$ pe $\frac{c}{a} = -k^2,\ k \in \mathbb{R}^*$.

$\boxed{\dfrac{c}{a} > 0}$: An atalad a c'haller skrivañ $y'' + k^2 y = 0,\ k \in \mathbb{R}^*$.

Mard eo $\dfrac{c}{a} > 0$:

$$S_{(a,0,c)} = \left\{x \longmapsto \alpha \cos\sqrt{\frac{c}{a}}x + \beta \sin\sqrt{\frac{c}{a}}x\ ;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

pe $S_{(1,0,k^2)} = \{x \longmapsto \alpha \cos kx + \beta \sin kx\ ;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$

pe $S_{(1,0,k^2)} = \{x \longmapsto r\cos(kx - \phi)\ ;\ r \in \mathbb{R},\ \phi \in [0,2\pi[\}$

$\boxed{\dfrac{c}{a} < 0}$: An atalad a c'haller skrivañ $y'' - k^2 y = 0,\ k \in \mathbb{R}^*$.

Mard eo $\dfrac{c}{a} < 0$:

$$S_{(a,0,c)} = \left\{x \longmapsto \alpha e^{\sqrt{-\frac{c}{a}}x} + \beta e^{-\sqrt{-\frac{c}{a}}x}\ ;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

pe $S_{(1,0,-k^2)} = \left\{x \longmapsto \alpha e^{kx} + \beta e^{-kx}\ ;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$

2 Degouezh hollek : ataladoù a'r rizh $ay'' + by' + cy = 0\ (a \neq 0) \Longleftrightarrow$ (A)

Klaskomp hag eñ zo diskoulmoù eus (A) er rezh $x \longmapsto e^{rx}$ ma'z eo $r \in \mathbb{R}$. Neuze $y' = re^{rx}$ hag $y'' = r^2e^{rx}$. Neuze e teu : $ay'' + by' + cy = ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx}$. Alese : $ar^2 + br + c = 0$ ha gwriziennoù gwerc'hel an atalad eil derez-se (anvet *atalad naouus d'an atalad orgemmel*), mar bez, a empleg e ve $r \in \mathbb{R}$, hevelep ma ve $x \longmapsto y = e^{rx}$ diskoulm (A). Neuze :

♦ $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0}$: Bez' ez eus div wrizienn $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ha $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

hag ar c'hevreizhennoù $x \longmapsto y_1 = e^{r_2 x}$ Hag $x \longmapsto y_2 = e^{r_1 x}$ zo diskoulmoù eus (A) ha nep kedaozadur $x \longmapsto y = \alpha y_1 + \beta y_2$ zo diskoulm eus (A) ivez. Hogen an div gevreizhenn $x \longmapsto y = \alpha y_1$ hag $x \longmapsto y = \alpha y_2$ a ampar ur reizhiad dizalc'h e teskad $\mathscr{F}_2$ ar c'hevreizhennoù dezho diarroudennoù a'n eil urzh, rak :

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = f_0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \alpha e^{r_1} + \beta e^{r_2} = 0.$$

Ent dibarek :

$$\begin{cases} \text{Evit nep } x = 0, \text{ ez eus } \alpha + \beta = 0 \\ \text{Evit nep } x = 1, \text{ ez eus } \alpha e^{r_1} + \beta e^{r_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{r_1} + \beta e^{r_2} = 0 \end{cases}$$

An didermenant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{r_1} & e^{r_2} \end{vmatrix} = e^{r_2} - e^{r_1}$.

Hogen mard eo $\Delta > 0$, neuze $r_2 \neq r_1$ hag o vezañ ma'z eo an argemmvac'henn ur c'hesaezhadur eus $\mathbb{R}$ war $\mathbb{R}^{+*}$ en hon eus $e^{r_1} \neq e^{r_2}$, ha da heul $D \neq 0$. E se he deus ar reizhiad un diskoulm hepken $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ hag an div gevreizhenn $x \longmapsto y_1$ hag $x \longmapsto y_2$ a ampar ur reizhiad dizalc'h eus $\mathscr{F}_2$. Ouzhpenn se e ouzer ez eo teskad diskoulmoù un atalad orgemmel ungenezh un egor sturiadel. Evit dezren ez eo divvent an egor sturiadel-se e ranker diskouez ez eo $x \longmapsto y_1$ hag $x \longmapsto y_2$ un diazez eus an egor sturiadel-se. Pa'z eo dizalc'h ar reizhiad e spir prouiñ ez eo ur reizhiad c'haner eus teskad an diskoulmoù, eleze $\forall (x \longmapsto y)$ diskoulm (A) ez eus $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, hevelep ma'z eo $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Troc'homp berr ha lavaromp hepken e c'haller skrivañ, mard eo y diskoulm (A), $y = f(x) \times (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$. Goude e jeder y' ha y'' hag e tiskouezer ez eo $f(x)$ un arstalenn mard eo y un diskoulm eus (A) $(ay'' + by' + cy = 0)$. Neuze ez eo $f(x)$ un arstalenn dre ret ha $y = k(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 k y_1 + \alpha_2 k y_2$ zo ur c'hedaozad linennek eus $x \longmapsto y_1$ hag $x \longmapsto y_2$.

Klozañ a reer :

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 : \text{ teskad diskoulmoù an atalad}$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \ (a \neq 0)$$

zo ur blaenenn sturiadel diazez

$$\{x \longmapsto y_1 \,;\, x \longmapsto y_2\}$$

ma'z eo $y_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ ha $y_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$, hevelep ma'z eo :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{hag} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Neuze $\mathrm{S}_{(a,b,c)} = \left\{x \longmapsto \alpha \mathrm{e}^{r_1 x} + \beta \mathrm{e}^{r_2 x} \ ; \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$

♦ $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$. An atalad naouus $ar^2 + br + c = 0$ zo dezhañ ur wrizienn daouel : $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ha neuze ez eo ar gevreizhenn $x \longmapsto y_1 = \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$ un diskoulm dibarek. Da heul ez eo ivez ar gevreizhenn $x \longmapsto \alpha y_1$ un diskoulm dibarek a'n atalad, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Klaskomp an amplegad evit f, hevelep ma ve $y = f(x)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$ diskoulm eus (A) : kavout a reer $y' = f'(x)\alpha x + \beta$. Holl ziskoulmoù an atalad (A) a zisoc'h neuze diwar:

$$\boxed{\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0} : y = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$$

$\mathrm{S}_{(a,b,c)}$ zo ur blaenenn sturiadel diazez :

$$\left\{y_1 : \left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}\right) \ ; \ y_2 : \left(x \longmapsto x\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}\right)\right\}$$

♦ $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$. An atalad naouus n'en deus ket a wriziennoù gwerc'hel, met mar klasker, e-lec'h diskoulmañ an atalad $ay'' + by' + cy = 0$ $(a \neq 0)$ e teskad ar c'hevreizhennoù niverel gwerc'hel $(t \longmapsto y, \ y \in \mathbb{R})$, diskoulmañ an kez atalad e teskad ar c'hevreizhennoù niverel kemplezh ($t \longmapsto \mathrm{F}(t)$, ma'z eo $\mathrm{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, savelet dre $\mathrm{F}(t) = f_1(t) + i f_2(t)$, f_1 hag f_2 diarroudadus div wech war $\mathbb{R}$) e c'haller diskoulmañ e $\mathbb{C}$ an atalad naouus ha savelañ evelse diskoulmoù F kevreizhennoù sturiadel, evel hon eus graet evit $\Delta > 0$ evit kevreizhennoù gwerc'hel.

E se, an atalad naouus en deus da ziskoulmoù daou gemplezh keveilet :

$$\boxed{r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{hag} \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

Neuze ez eo an div gevreizhenn niverel kemplezh :

$$\mathrm{F}_1 = t \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 t} = y_1 \text{ ha } \mathrm{F}_2 = t \longmapsto \mathrm{e}^{r_2 t} = y_2$$

daou ziskoulm eus an atalad $ay'' + by' + cy = 0$ e teskad ar c'hevreizhennoù niverel kemplezh hag, o vezañ ma'z eo $\mathbb{C}$ un egor sturiadel war $\mathbb{C}$, nep kedaozadur linennek $c_1{\cdot}\mathrm{F}_1 + c_2{\cdot}\mathrm{F}_2$ $(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ zo c'hoazh un diskoulm. Pezh zo en argraf eo savelañ (c_1 ha c_2, hevelep ma c'hallfemp danzen kedaozadoù linennek eus ar c'hevreizhennoù kemplezh-se a ve-int kevreizhennoù gwerc'hel diskoulmoù eus an atalad orgemmel gwerc'hel gant $\Delta < 0$.

Bezet neuze $y = c_1\mathrm{e}^{r_1 t} + c_2\mathrm{e}^{r_2 t}$, hevelep ma ve $t \longmapsto y$ diskoulm an atalad :

$$ay'' + by' + cy = 0, \text{ gant } r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ hag } r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Dodomp : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ ha $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Bez' hon eus enta : $\begin{cases} r_1 = \alpha - \beta i \\ r_2 = \alpha + \beta i \end{cases}$.

Hag :

$$y = c_1\mathrm{e}^{(\alpha-\beta i)t} + c_2\mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(c_1\mathrm{e}^{-\beta i t} + c_2\mathrm{e}^{\beta i t}\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{\alpha t}\left[c_1(\cos(-\beta t) + i\sin(-\beta t) + c_2(\cos\beta t + i\sin\beta t)\right]$$

$$
\begin{aligned}
y &= e^{\alpha t}\left[c_1(\cos\beta t - i\sin\beta t) + c_2(\cos\beta t + i\sin\beta t)\right] \\
&= e^{\alpha t}\left[(c_1+c_2)\cos\beta t + i(c_2-c_1)\sin\beta t\right]
\end{aligned}
$$

Da gaout diskoulmoù gwerc'hel e spir neuze dibab gwezhiaderioù c_1 ha c_2 e $\mathbb{C}$, hevelep ma ve $A = c_1 + c_2$ ha $B = i(c_1 - c_2)$ gwerc'helion. Da skouer $c_1 \in \mathbb{R}$ ha $c_2 \in \mathbb{R}$ ha $c_2 = c_1$, pe c_1 ha c_2 zo daou gemplezh keveilet : $c_1 + c_2 = 2\mathrm{Re}(c_1)$ ha $c_2 - c_1 = -2\mathrm{Im}(c_1)$, eleze $c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$ ha $c_2 - c_1 \in \mathbb{R}$. O vezañ ma c'haller dibab c_1 ha c_2 diforzh e $\mathbb{C}$ e vo gounezet dre an hentenn-se holl werzhadoù bezus A ha B en $\mathbb{R}$ hag e tisoc'himp gant un teskad kevreizhennoù niverel gwerc'hel savelet dre $t \longmapsto y = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$ma'z eo A ha B div arstalenn werc'hel diforzh. Neuze :

$$
\boxed{S = \left\{ t \longmapsto y = e^{-\frac{b}{2a}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t + B\sin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right) \; ; \; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}
$$

Hag evel en degouezhioù kent e tisoc'her war un teskad diskoulmoù a ampar un egor sturiadel divvent ganet gant an div gevreizhenn :

$$
f_1 : t \longmapsto e^{-\frac{b}{2a}t}\cdot\cos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t \text{ ha } f_2 : t \longmapsto e^{-\frac{b}{2a}t}\cdot\sin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t
$$

<u>Evezhiadenn</u> :

Bezet an atalad orgemmel $y'' + \omega^2 y = 0$. Un degouezh dibarek eo ha kavout a reer teskad an diskoulmoù :

$$
S = \left\{ t \longmapsto A\cos\omega t + B\sin\omega t \; ; \; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}
$$

229 ATALADOÙ LINENNEK AN EIL URZH DIUNGENEZH :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \ (a \neq 0)$$

(ma'z eo g ur gevreizhenn gendalc'hek war un entremez I, dezhi kentegennoù kendalc'hek war I).

• **Skouer :**

Bezet an atalad $ay'' = g(x)$ $(b = c = 0,\ a \neq 0)$ ma'z eo g kendalc'hek war I, dezhi ur gentegenn G kendalc'hek war I. O sammegañ e teu lerc'h ouzh lerc'h :

$$\forall x \in \mathrm{I}\ y'' = \frac{1}{a}g(x) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}\ y' = \frac{1}{a}\mathrm{G}(x) + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$
$$\Longleftrightarrow y = \frac{1}{a}\mathcal{G}(x) + \alpha x + \beta$$

ma'z eo $\mathcal{G}$ ur gentegenn eus G war I hag $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $(\mathcal{G}'' = \mathrm{G} = g)$.

• **Skouer :**

Evit diskoulmañ un atalad diungenezh $ay'' + by' + cy = g(x)$ $(a \neq 0)$ e kroger da savelañ un diskoulm dibarek y_0, ha goude e klasker un diskoulm diforzh eus an atalad ungenezh kevredet z. E se e teu : $x \longmapsto y_0 + z$, teskad an holl ziskoulmoù. Da gaout y_0 diskoulm dibarek a'n atalad e vo tu, ma ne weler diskoulm "anat" ebet, da glask $f(x)$, hevelep ma ve $y_0 = zf(x)$ ma'z eo z un diskoulm eus an atalad kevredet (hentenn anvet "lakaat an arstalenn da argemmañ", pa'z eo ivez un diskoulm eus an atalad ungenezh ur gevreizhenn er rezh $y = kz$. Graet e vez ouzh k evel ouzh ur gevreizhenn x).

Bezet an atalad $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x(x^2 + 1)$.

An atalad ungenezh kevredet $y'' - 2y' + y = 0$ en deus da atalad naouus :

$r^2 - 2r + 1 = 0$, dezhañ da wrizienn daouel $r = 1$. An diskoulm hollek zo neuze :

$x \longmapsto y = \mathrm{e}^x(\lambda x + \mu)$, λ ha μ o vezañ arstalennoù. Un diskoulm dibarek zo neuze $x \longmapsto y = \mu\mathrm{e}^x$. Lakaomp da "argemmañ" μ : $\mu = \mu(x)$ ha klaskomp ur sammegenn dibarek y_0 a'n atalad deroù er rezh : $y = \mu(x)\mathrm{e}^x$. An atalad orgemmel a zeu da vezañ : $\mu''(x) = x^2 + 1$.

Un diskoulm dibarek zo $y_0(x) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^2}{2}\right)$.

Da neuze ez eo sammegenn hollek an atalad kinniget :

$$\boxed{x \longmapsto y = \mathrm{e}^x\left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu x\right).}$$

GERVAOÙ

BREZHONEG-GALLEG

A

B

C

D

E

F

G

H

I, J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U, W

GALLEG-BREZHONEG

A

A inversé : *gin-A*

à droite : *a-zehou*

à ε près : *war-bouez ε*

à gauche : *a-gleiz*

abélien : *abelel*

aboutir à : *disoc'h gant*

abscisse : *ledenn* b.

abscisse curviligne : *ledenn grommregek*

absolu : *dizave*

absorbant : *gougemerus*

abus de notation : *kammarver* g. *notadur*

accolade : *briataenn* b.

accroissement : *kresk* g.

action (au sens général) : *gwezhiadur* g.

action (sur un ensemble) : *niñv* g.

addition : *sammadur* g.

addition de deux complexes : *sammadur daou gemplezh*

addition des matrices : *sammadur an ogedoù*

addition des réels : *sammadur ar gwerc'helion*

addition logique : *sammadur mezoniel*

addition vectorielle : *sammadur sturiadel*

addition vectorielle : *sammañ sturiadel*

additionner, faire la somme de : *sammañ*

additivité : *sammadezh* b.

adjacent : *kefin*

admettre, poser par hypothèse : *darbenn*

afficher (calculatrice, ...) : *gwereañ*

affine : *keouenn*

affinement indépendant (libre) : *dizalc'h ent keouenn*

affines par intervalles : *keouenn a entremezioù*

affinité (transformation) : *keouennañ*

affinité : *keouennadur* g.

affirmer : *diogeliñ*

affixe (du vecteur, du point) : *steudenn (ar sturiadell, ar poent)* b.

agir, opérer pour donner un produit de facteurs : *kedniñvañ*

aigu : *lemm*

aire : *gorread* g.

aire algébrique : *gorread aljebrel*

aire arithmétique : *gorread niveroniel*

aire du triangle : *gorread an tric'horn*

aire latérale : *gorread a-stlez*

aire totale : *gorread hollel*

ajouté à : *samm*

algèbre de Boole : *aljebr Boole*

algébrique : *aljebrel*

algorithme : *treol* g. *-ioù*

aligné : *a-eeun*, *areeun*

alternative : *dazeilad* g.

alterné : *pebeilat*

amplitude : *heled* g.

amplitude d'encadrement : *heled stern*

amplitude de l'intervalle : *heled an entremez*

analogie : *heñveliezh* b.

analyse : *dezrann* g.

analyse combinatoire : *kevosodouriezh* b.

analyser : *dezrannañ*

angle : *korn* g.

angle aigu : *korn lemm*

angle au centre : *korn kreizet*

angle au centre orienté (non orienté) : *korn kreizet durc'haet (andurc'haet)*

angle d'un arc capable : *gavael* g.

angle de rotation : *korn c'hwelañ*

angle des vecteurs : *korn ar sturiadelloù*

angle droit : *korn serzh*

angle géométrique : *korn mentoniel*

angle géométrique du triangle : *korn mentoniel an tric'horn*

angle géométrique généralisé : *korn mentoniel hollekaet*

angle inscrit : *korn kaeet*

angle inscrit et angle au centre : *korn kaeet ha korn kreizet*

angle inscrit orienté : *korn kaeet durc'haet*

angle non orienté : *korn andurc'haet*

angle nul : *korn mannel*

angle obtus : *korn tougn*

angle opposé : *korn ragenep*

angle orienté : *korn durc'haet*

angle orienté de deux axes : *korn durc'haet daou ahel*

angle orienté de deux demi-droites de même origine : *korn durc'haet div ledeeunenn kenorin*

angle orienté de deux directions orientées : *korn durc'haet daou roud durc'haet*

angle orienté de deux droites : *korn durc'haet div eeunenn*

angle orienté de deux vecteurs : *korn durc'haet div sturiadell*

angle plat : *korn sklat*

angström : *angstrom* g.

anguleux (point ~) : *kogn (poent ~)*

anharmonique : *ankemblac'hek*

anneau : *gwalenn* b.

anneau commutatif, unitaire et intègre : *gwalenn gantamsavat, unanek ha kevanled*

anneau intègre : *gwalenn gevanled*

anneau unitaire : *gwalenn unanek*

année lumière : *bloaziad* g. *luc'h*

annuler : *mannelaat*

antécédent (dans une transformation) : *treuzfurmed* g.

antécédent : *kentorad* g.

anticommutatif : *gourzhkantamsavat*

antiréflexif : *gourzhasplegat*

antisymétrique : *gourzhkemparzhek*

apotème : *apotem* g.

appartenance : *enbeziadezh* b.

appartenant à : *enbeziat (en)*

applatir : *skladañ*

applicable : *dedalvezadus*

application : *arloadur* g.

application : *dedalvezadur* g.

application affine : *arloadur keouenn*

application bijective : *arloadur kesaezhañ*

application bijective : *arloadur kesaezhat*

application composée : *arloadur kediat*

application constante : *arloadur arstalek*

application différentielle : *arloadur orgemmel*

application homographique : *arloadur heñvelskriv*

application identique : *arloadur aruniñ*

application injective : *arloadur ensaezhañ*

application injective : *arloadur ensaezhat*

application involutive : *arloadur atroat*

application linéaire : *arloadur linennek*

application logarithme népérien : *arloadur logaritm neperel*

application monôme : *arloadur monom*

application polynôme : *arloadur polinom*

application ponctuelle : *arloadur poentel*

application réciproque : *arloadur keveskemm*

application surjective : *arloadur arsaezhañ*

application surjective : *arloadur arsaezhat*

appliquer : *arloañ*

appliquer : *dedalv(ez)out*

approche mathématique : *denesadur* g. *jedoniel*

approché : *arnesadek*

approché par défaut : *isarnesadek*

approché par excès : *uc'harnesâdek*

approximation : *arnesâd* g.

approximation décimale : *arnesâd dekrannel*

approximation décimale d'ordre *n* par défaut : *isarnesâd dekrannel a'n urzh* n

approximation décimale par excès d'ordre *n* : *uc'harnesâd dekrannel a'n urzh* n :

approximation par défaut : *isarnesâd* g.

approximation par excès : *uc'harnesâd* g.

approximation rationnelle : *arnesâd kemezel*

arbitraire : *tidek*

arbitrairement : *ent tidek*

arbre : *gwezenn* b.

arc : *gwarenn* b.

arc adjacent : *gwarenn gefin*

arc capable : *keitgavaelenn* b.

arc capable d'un angle : *gwarenn geitgavael ur c'horn*

arc capable d'un angle non orienté : *gwarenn geitgavael ur c'horn andurc'haet*

arc de cercle : *gwarenn gelc'h*

arc de cercle orienté : *gwarenn gelc'h durc'haet*

arc de deuxième espèce : *gwarenn a'n eil spesad*

arc de première espèce : *gwarenn a'r spesad kentañ*

arc fermé : *gwarenn serr*

arc généralisé : *gwarenn hollekaet*

arc géométrique : *gwarenn ventoniel*

arc intercepté : *gwarenn etredalc'het*

arc nul : *gwarenn vannel*

arc orienté : *gwarenn durc'haet*

arc ouvert : *gwarenn digor*

arc plein : *gwarenn leun*

arc rentrant : *gwarenn askek*

arc saillant : *gwarenn valegek*

arcs associés : *gwarennoù kevredet*

arcs complémentaires : *gwarennoù serzhus*

arcs supplémentaires : *gwarennoù skladus*
are : *ar* g.
arête : *ker* g.
argument : *arguzenn* b.
argument d'un complexe : *arguzenn ur c'hemplezh*
arithmétique : *niveroniel*
arrangement : *arenkad* g.
arrêt : *arsav* g.
arrondi : *rontâd* g.
arrondir : *rontaat*
associatif : *strollatat*
associativité : *strollatadezh* b.
associer : *kevrediñ*
asymétrique : *ankemparzhek*
asymptote (à) : *kehelc'h (ouzh)*
asymptote : *kehelc'henn* b.
asymptote horizontale : *kehelc'henn a-zremm*
asymptote oblique : *kehelc'henn a-veskell*
asymptotique : *kehelc'hat*
attribuer : *ardaoliñ*
attribuer, assigner : *deverkañ*
attribution : *ardaoladur* g.
automorphisme : *unandelvadur* g.
avant (p) : *a-raok (freilh* g.)
avoir pour sommet commun : *kenvegañ*
axe : *ahel* g.
axe d'une symétrie orthogonale : *ahel ur c'hemparzh diaskouer*
axe de la parabole : *ahel ar barabolenn*
axe de symétrie : *ahel kemparzh*
axe des abscisses : *ahel al ledennoù*
axe des coordonnées : *ahelioù an daveennoù*
axe des cosinus : *ahel ar c'hosinuzioù*
axe des imaginaires purs : *ahel an derc'helion glez*
axe des ordonnées : *ahel an hedennoù*
axe des pôles : *ahel ar bleinoù*
axe des pôles : *ahel pennoù an douar*
axe des réels : *ahel ar gwerc'helion*
axe des sinus : *ahel ar sinuzioù*
axe horizontal : *ahel diazremm*
axe polaire : *ahel bed*
axe vertical : *ahel diazerc'h*
axiome : *aksiomenn* b.
axiome d'Euclide : *aksiomenn Euklides*
axiome d'incidence : *aksiomenn dehaez*
axiome de récurrence : *aksiomenn darren*
axiome de Talès : *aksiomenn Tales*
axiome des aires : *aksiomennoù ar gorreadoù*
axiome des projections : *aksiomenn ar bannadoù*
axiome des volumes : *aksiomennoù an ec'honadoù*
axiomes du groupe : *aksiomennoù ar stroll*
ayant pour extrémité : *pennet en*
ayant son sommet en O : *beget en O*

B

barre : *rezell* b, *usrezell* b.
barre oblique, trait oblique, slash, barre divisée : *beskell* b.
barre verticale : *serzhell* b.
barycentre : *trommgreiz* g.
barycentrique : *trommgreizel*
base (d'une figure) : *diaz* g.
base (puissance) : *mac'hed* g.
base : *diazez* g.
base binaire, base deux : *daoured* g.

base d'une fonction logarithme : *diazez ur gevreizhenn logaritm*

base de l'espace vectoriel : *diazez an egor struriadel*

base de numération : *diazez niveriñ*, *petred* g.

base de numération décimale : *dekred* g.

base deux : *diazez daou*

base dix : *diazez dek*

base du cône : *diaz ar gernenn*

base du cylindre : *diaz ar granenn*

base du plan : *diazez ar blaenenn*

base *e* : *diazez* e

base hexadécimale : *c'hwezekred* g.

base normée : *diazez reolel*

base orthonormée (orthonormale) : *diazez reizhreolel*

base rangée : *diazez renket*

bidimensionnel, à deux dimensions : *divvent*

bijectif : *kesaezhat*

bijection : *kesaezhadur* g.

bijection réciproque : *kesaezhadur keveskemm*

bilinéaire : *uelinennek*

bilinéarité : *uelinennegezh* b.

binaire (relation) : *daouadek*

binaire, de base deux : *daouredel*

binôme : *binom* g.

bipoint : *daouboent* g.

bipoints consécutifs : *daouboentoù kenheuilh*

bipoints équipollents : *daouboentoù kevarzh*

birapport : *uegeñver* g.

bissectrice : *kreizkornenn* b.

borne : *bonn* g.

borne inférieure : *isvonn* g.

borne supérieure : *usvonn* g.

borner : *bonnañ*

bornes du domaine de définition : *bonnoù ar savelva*

boucle : *dol* b. *-ioù*

boucle d'itération : *dol arredeiñ*

boule : *boull* b.

boule fermée : *boull serr*

boule ouverte : *boull digor*

branche d'hyperbole : *skourr hiperbolenn*

branche infinie : *skourr* g. *anvevenn*

branche parabolique : *skourr parabolek*

C

calcul : *jedadur* g.

calcul approché : *riñvañ arnesadek*

calcul approché par défaut : *isarnesaat*

calcul propositionnel : *riñvañ erganadel*

calculatrice : *riñverez* b. *-ed*

calculer : *jediñ, riñvañ*

canonique : *destlel*

capable (arc) : *keitgavael*

capitale (lettre) : *pennlizherenn* b.

caractériser par (se ~) : *naouiñ dre*

caractériser : *dezverkañ*

caractéristique de : *naouus da*

cardinal : *priñvel* aa. & pa. g. *-ion*

carré : *karrez* g.

carré : *karrezek*

carré cartésien : *karrez kartezel*

carré latin : *karrez latin*

carré scalaire : *karrez skeuliadel*

cartésien : *kartezel*

cas : *degouezh* g.

cas général : *degouezh hollek*

cas particulier : *degouezh dibarek, tro* b. *dibarek*
cascade : *oglenn* b.
case : *tirenn* b.
case adjacente : *tirennoù kefin*
case commune : *tirenn voutin*
centiare : *kentiar* g.
centième : *kantvedenn* b.
centigrade : *kentigrad* g.
centimètre : *kentimetr* g.
centimètre carré : *kentimetr karrez*
centimètre cube : *kentimetr diñs*
central : *kreizel*
centre : *kreiz* g.
centre d'une symétrie centrale : *kreiz ur c'hemparzh kreizel*
centre de gravité : *kreiz kerc'hell*
centre de l'intervalle : *kreiz an entremez*
centre de rotation : *kreiz c'hwelañ*
centre de symétrie : *kreiz kemparzh*
centre du cercle : *kreiz ar c'helc'h*
centré en O : *kreizet en O*
cercle : *kelc'h* g.
cercle circonscrit à : *kelc'h amgaeet ouzh*
cercle d'inversion : *kelc'h ginañ*
cercle de centre O : *kelc'h kreizet en O*
cercle équatorial : *kelc'h kehederel*
cercle orienté : *kelc'h durc'haet*
cercle trigonométrique : *kelc'h tric'hornventouriel*
changement d'axes : *kemm* g. *ahelioù*
changement d'orientation : *kemmañ durc'hadur*
changement d'origine : *kemmañ orin*
changement d'unité : *kemmañ unanenn*
changement de base : *kemmañ diazez*
changement de graduation : *kemmañ dereziadur*
changement de point unitaire : *kemmañ poent unan*
changement de repère : *kemmañ dealf*
changement de signe : *kemmañ arouez*
changement de vecteur unitaire : *kemmañ sturiadell unanenn,*
chiffre (symbole) : *sifrenn* b.
chiffre : *sifr* g.
chiffre décimal du développement décimal illimité : *sifr dekrannel (dekrannenn) an dispakad dekredel anvevenn*
chiffres binaires : *sifroù daouredel*
chiffres de la partie décimale (base dix) : *sifrennoù dekrannel (dekrannennoù)*
circonscrire à : *amgaeañ ouzh*
circuit (électrique, ...) : *amred* g.
circulaire (fonction) : *kelc'hel*
circulaire(ment) : *a-gor*
classe : *dere* g.
classe d'équivalence : *dere kevatalder*
classe de congruence : *dere kewez*
clore : *klozañ*
clos : *kloz*
clotûre : *klozded* b.
code : *boneg* b.
coeffficients de l'inéquation : *gwezhiaderioù an diatalad*
coefficient : *gwezhiader* g. *-ioù*
coefficient de proportionnalité : *gwezhiader kenfeuriegezh*
coefficient directeur : *gwezhiader roud*
coefficient du monôme : *gwezhiader ar monom*

coefficients constants : *gwezhiaderioù arstalek*

coefficients d'un polynôme : *gwezhiaderioù ur polinom*

coefficients de l'équation : *gwezhiaderioù an atalad*

coefficients de la fonction affine : *gwezhiaderioù ar gevreizhenn geouenn*

coefficients réels : *gwezhiaderioù gwerc'hel*

colinéaire, de même direction : *kenroud*

colonne : *bann* g.

combinaison : *kedaoz* g.

combinaison : *kedaozadur* g.

combinaison linéaire (opération) : *kedaoz linennek*

combinaison linéaire (résultat) : *kedaozad linennek*

combinaison linéaire : *kedaozadur linennek*

combiner (linéairement ...) : *kedaozañ (linennek ...)*

commutable : *kantamsavadus*

commutatif : *kantamsavat*

commutatif, unitaire et intègre : *kantamsavat, unanek ha kevanled*

commutativité : *kantamsavadezh* b.

comparable : *keveratadus*

compatible avec l'opération externe : *kembez gant un niñvadur diavaez*

compatible avec l'opération interne : *kembez gant un niñvadur diabarzh*

compatible avec la somme : *kembez gant ar sammadur*

compatible avec le produit : *kembez gant al liesadur*

compatible, compatibilité : *kembez* aa. & pa. g.

complément (d'un angle, d'un arc) : *serzhuzenn* b.

complément : *klokaenn* b.

complémentaire : *kenglokaus*

complémentaire : *serzhus*

complexe : *kemplezh* aa. & pa. g. *-ion*

complexe conjugué : *kemplezh keveilet*

comportement : *monedigezh* b.

composante : *kedrann* b.

composante scalaire : *kedrann skeuliadel*

composé (adj.) : *kediat*

composé (nombre) : *kenaozat*

composé : *kediad* g.

composée de deux homothéties : *kediad daou heñvelstaladur*

composée de deux réflexions d'axes concourants : *kediad daou zrec'hadur kenskej o ahelioù*

composée de deux réflexions d'axes parallèles : *kediad daou zrec'hadur kenstur o ahelioù*

composée de deux relations : *kediad daou zaveadur*

composée de deux symétries centrales : *kediad daou gemparzhadur kreizel*

composée de deux translations : *kediad daou dreuzkludadur*

composer : *lakaat a-ged*

composer, composition : *kediañ*

composition : *kediadur* g.

composition de deux applications ponctuelles : *kediadur daou arloadur poentel*

composition des applications : *kediadur an arloaduriou̇*
compréhension : *ental* g.
compris entre : *gavaelet etre*
concave : *argev(ek)*
concavité : *argevegezh* b.
concentrique : *kengreiz*
concevoir : *ergrafañ*
conclusion : *treread* g.
conclusion, déduction : *dezread* g.
concourant : *kengej*
condition : *amveziad* g.
condition nécessaire : *amplegad* g.
condition nécessaire : *amveziad ret*
condition nécessaire et suffisante : *amplegad spirus*
condition nécessaire et suffisante : *amveziad ret ha spirus*
condition suffisante : *amveziad spirus*
conditions de Rolle : *amveziadoù Rolle*
cône : *kernenn* b.
cône de révolution : *kernenn gelc'htreiñ*
cône droit : *kernenn serzh*
configuration : *kefluniad* g.
confiner : *kantañ*
congruence (congruent) modulo a : *kewez modulo a*
congruence : *kewez* aa. & pa. g.
conique (courbe ∼) : *kernelenn* b.
conjonction : *kenglenadur* g.
conjugué : *keveilad* g.
conjugué : *keveilet ao.*
connecteur : *kevaoter* g. *-iou̇*
connecteur binaire : *kevaoter daouadek*
consécutif : *kenheuilh*
conséquence : *dianlenad* g.
conservation : *kevandalc'h* g.
conservation du birapport : *kevandalc'h an uegeñver*
conserver : *kevanderc'hel* bn. *kevandalc'h-*
considérer : *desellout*
consister en : *c'hoarvezout eus*
constant : *arstalek*
constante : *arstalenn* b.
constituer : *amparañ*
contenir : *endalc'hadur* g.
contenir au sens large : *endalc'hadur ledan*
contenir, inclure : *enderc'hel* bn. *endalc'h-*
contient, contenant (⊃) : *endalc'h*
continu : *kendalc'hek*
continu à droite : *kendalc'hek a-zehou*
continu à gauche : *kendalc'hek a-gleiz*
continuité : *kendalc'hegezh* b.
continuité à droite : *kendalc'hegezh a-zehou*
continuité à gauche : *kendalc'hegezh a-gleiz*
continuité sur un intervalle : *kendalc'hegezh war un entremez*
continûment : *a-gendalc'h*
contraposé : *gourzhlec'hiet*
contraposée : *gourzhlec'hiedenn* b.
convenir, convention : *kendivizout*
convention : *kendivizad* g.
convergence : *kengerc'husted* b.
convergence d'une suite : *kengerc'husted un heuliad*
convergent : *kengerc'hus*
converger : *kengerc'hañ*
converger vers la limite : *kengerc'hañ etrezek an harz*
convexe : *argeinek*

coordonnée : *daveenn* b. *-où*
coordonnée cartésienne : *daveenn gartezel*
coordonnées barycentriques : *daveennoù trommgreizel*
coordonnées géographiques : *daveennoù douaregorel*
coplanaire : *kemplaen*
corde : *tant* g.
corps : *korf* g.
corps commutatif : *korf kantamsavat*
corps commutatif totalement ordonné : *korf kantamsavat peururzhiet*
corps des rationnels : *korf ar c'hemezelion*
corps des réels : *korf ar gwerc'helion*
correspondance : *kenglotadur* g.
correspondant : *keñverek*
corriger des erreurs : *reizhañ kammadoù*
cosinus : *kosinuz* g.
cotangente : *kotangent* g.
cote : *savenn* b.
côté : *tu* g.
côté adjacent : *tu kefin*
côté du triangle : *tuioù an tric'horn*
côté extrémité : *tu dibenn*
côté opposé : *tu ragenep*
côté origine : *tu orin*
couper (se ~) : *skejañ*
couple : *daouac'h* b. *-où*
couple de coordonnées : *daouac'h daveennoù*
couple de demi-droites : *daouac'h ledeeunennoù*
couple normé de coordonnées barycentriques : *daouac'h reolel a zaveennoù trommgreizel*
couple réciproque, couple transposé : *daouac'h keveskemm*
couple solution : *daouac'h diskoulm*
courbe : *krommenn* b.
courbe algébrique : *krommenn aljebrel*
courbe asymptote : *krommenn kehelc'h*
courbe de niveau : *krommenn a live*
courbe plane : *krommenn blaen*
courbe représentative : *krommenn derc'hennañ*
courbes normales : *krommennoù skoueriek*
crible d'Ératosthène : *krouer Eratostenes*
crochets : *sonnelloù*
croisé : *ilgroaziek*
croissant : *kengresk*
croissant : *war gresk*
croix (marque) : *kroaz* b.
cube : *diñs* g.
curviligne : *krommregek*
cylindre : *kranenn* b.
cylindre de révolution : *kranenn gelc'htreiñ*
cylindre droit : *kranenn serzh*

D

d'origine commune : *kenorin*
dans (appartenance) : *e-barzh*
de même degré : *kenderez*
de même mesure : *kenvuzul*
de même sens : *kendu*
de même signe : *kenarouez*
de signe opposé : *gourzharouez*
décagone : *dekkorn* g.
décagone : *dektueg* g.
décaler, glisser : *linkañ*
décamètre : *dekametr* g.

décamètre carré : *dekametr karrez*

décigrade : *dekigrad* g.

décimal (numération, système) : *dekredel*

décimal négatif : *dekrannel leiel*

décimal positif : *dekrannel muiel*

décimal relatif : *dekrannel daveel*

décimal, nombre décimal : *dekrannel aa . & pa.* g. *-ion*

décimale (chiffredécimal après la virgule en base) : *dekrannenn* b.

décimètre : *dekimetr* g.

décimètre carré : *dekimetr karrez*

décimètre cube : *dekimetr diñs*

décistère : *dekister* g.

décomposer : *digenaozañ*

décomposition : *digenaozadur* g.

décroissant : *gingresk*

décroissant : *war zigresk*

déduction : *dezreadur* g.

déduire : *dezren* bn. *dezre-*

définir : *despizañ*

définir, décider : *diferañ*

définir, déterminer : *savelañ*

définition (détermination) d'une suite : *saveladur un heuliad*

définition : *despizadur* g.

définition géométrique du produit

scalaire : *despizadur mentoniel al liesâd skeuliadel*

degré : *derez* g.

degré d'une racine : *boner* g.

degré des courbes algébriques : *derez ar c'hrommennoù aljebrel*

degré du monôme : *derez ar monom*

degré du polynôme : *derez ar polinom*

delta : *delta* g.

démarche : *kerzhed* g.

demi-boulle : *hantervoull* b.

demi-cercle : *hantergelc'h* g.

demi-droite : *ledeeunenn* b. -

demi-droite fermée : *ledeeunenn serr*

demi-droite ouverte : *ledeeunenn digor*

demi-droites de même origine : *ledeeunennoù kenorin*

demi-plan : *ledplaenenn* b.

demi-plan ouvert : *ledplaenenn digor*

demi-sphère : *hanterbellenn* b.

demi-tangente : *ledspinenn* b.

démonstration : *dienadur* g.

démontrable : *dienadus*

démontrer : *dienaat*

dénominateur : *anver* g.

dénominateur commun : *anver boutin*

dépendant : *kevamzalc'h*

déplacer, déplacement : *dilec'hiañ*

dérivabilité : *diarroudadusted* b.

dérivabilité en un point : *diarroudadusted en ur poent*

dérivable : *diarroudadus*

dérivable à droite : *diarroudadus a-zehou*

dérivable à gauche : *diarroudadus a-gleiz*

dérivée à droite : *diarroudad a-zehou*

dérivée à gauche : *diarroudad a-gleiz*

dérivée logarithmique : *diarroudenn logaritmek*

dérivée $n^{\text{ième}}$: n-*vet diarroudenn*

dérivée première : *diarroudenn gentañ*

dérivée, fonction dérivée : *diarroudenn* b.

dérivées successives : *diarroudennoù lerc'h ouzh lerc'h*

dériver : *diarroudañ*

désigner (par un indice) : *menegiñ*

désigner : *dezanviñ*

déterminant : *didermenant* g.

déterminant de la matrice : *didermenant an oged*

déterminant du couple de vecteurs : *didermenant an daouac'h sturiadelloù*

déterminer : *didermenañ*

deux points : *daoubik* g.

développable : *dispakadus*

développement : *dispakad* g.

développement décimal illimité : *dispakad dekredel anvevenn*

développement décimal illimité

périodique : *dispakad dekredel anvevenn trovezhiek*

développement en base *p* : *dispakad*

diazez p

développement en base *p* : *dispakad*

p-*redel*

développement limité à l'ordre 1 : *dispakad(ur) bevennet d'ar gentañ urzh*

développer le produit de facteurs : *dispakañ ar periatâd*

diagonale : *treuzvegenn* b.

diagramme d'Euler : *diervad* Euler

diagramme de Carrol : *diervad* Carrol

diagramme de Karnaugh : *diervad Karnaugh*

diagramme sagittal : *diervad birek*

diagramme sagittal d'une application injective : *diervad birek un arloadur ensaezhañ*

diagramme sagittal d'une relation définie dans un ensemble : *diervad birek un daveadur savelet en un teskad*

diagramme, schéma, représentation graphique (d'un algorithme, d'une structure, ...) : *diervad* g.

diamètre : *treuzkiz* g.

différence : *diforc'h* g.

différence de deux complexes : *diforc'h daou gemplezh*

différence de deux ensembles : *diforc'h daou deskad*

différence symétrique : *diforc'h kemparzhek*

différent, distinct : *anpar*

différentiabilité : *orgemmadusted* b.

différentiel : *orgemmel*

différentielle : *orgemmenn* b.

dimension : *ment* b.

dimension d'un ensemble : *ment un teskad*

dimension de l'espace affine : *ment an egor keouenn*

dimension de l'espace vectoriel : *ment an egor sturiadel*

direct, positif (sens), droit (trièdre) : *dihell*

directement supérieur : *uheloc'h diouzhtu*

direction : *roud* g.

direction asymptotique : *roud kehelc'hat*

direction du vecteur : *roud ar sturiadell*

direction orientée : *roud durc'haet*

direction orientée : *sturiad* g.

directrice : *levierenn* b.

discriminant : *disparzhant* g.

disjoint : *disparti*

disjonction : *disglenadur* g.

disjonction exclusive : *disglenadur ezkaelat*

disjonction inclusive : *disglenadur enkaelat*

disque : *kantenn* b.

disque fermé : *kantenn serr*

disque ouvert : *kantenn digor*

distance : *pellder* g.

distance euclidienne : *pellder euklidel*
distinct, différent : *diforc'h*
distinguer, différencier : *digemmañ*
distribuer : *dasparzhañ*
distributif : *dasparzhat*
distributivité : *dasparzhadezh* b.
divergent : *kenforc'hus*
dividende : *ranned* g.
diviser : *rannañ*
diviseur : *ranner* g. *-ioù*
diviseur commun : *kenranner* g. *-ioù*
diviseur commun : *ranner boutin*
divisible : *rannadus*
division : *rannadur* g.
division euclidienne : *rannadur euklidel*
division exacte : *rannadur rik*
dixième : *dekvedenn* b.
dodécagone : *daouzekkorn* g.
dodécagone : *daouzektueg* g.
domaine : *domani* g.
domaine de définition : *domani savelañ*
domaine de définition : *savelva* g.
domaine plan : *domani plaen*
domaine, portée : *amgant* g.
donne pour image (a) : *delv* g.
donnée : *roadenn* b.
donner pour image : *delviñ*
double : *daouel*
double négation : *uenac'hadur* g.
douxième de plan : *daouzekvedenn* b. *blaenenn*
droit : *serzh*
droite : *eeunenn* b.
droite affine : *eeunenn geouenn*
droite d'intersection : *eeunenn skej, (eeunenn genskej)*
droite euclidienne : *eeunenn euklidel*
droite graduée : *eeunenn dereziet*
droite invariante : *eeunenn anargemmat*
droite non orientée : *eeunenn andurc'haet*
droite normale : *eeunenn skoueriek*
droite numérique : *eeunenn an niveroù*
droite orientée : *eeunenn durc'haet*
droite pointée : *eeunenn alfet*
droite support : *eeunenn skor*
droite vectorielle : *eeunenn sturiadel*
droites des projetés : *eeunenn ar bannadoù*
droites sécantes : *eeunennoù genskej*

E

E inversé (∃) : *kil-E*
écart : *forc'had* g.
écart angulaire : *kornskarad* g.
écart tabulaire : *forc'had taolenn*
écrire les entiers naturels : *skrivañ ar c'hevanion naturel*
écriture : *skrivad* g.
écriture décimale (en base dix) : *skrivad dekredel*
écriture mathématique : *skrivad jedoniel*
écriture primaire : *skrivad kentael*
effectuer : *kefleuniañ*
égal : *par*
égalité : *dambarder* g.
égalité : *parder* g.
élément : *elfenn* b.
élément absorbant : *elfenn c'hougemerus*
élément d'intersection : *elfenn genskej*
élément de (∈) : *enbez*
élément générique : *elfenn c'henadel*
élément idempotent : *elfenn geztrevac'h*

élément identité : *elfenn aruniñ*

élément invariant : *elfenn anargemmat*

élément inverse : *elfenn c'hin*

élément neutre : *elfenn neptu*

élément non régulier (singulier) : *elfenn anrez*

élément quelconque : *elfenn diforzh*

élément régulier : *elfenn rez*

élément symétrique : *elfenn gemparzhek*

élément unité : *elfenn unan*

éléments comparables : *elfennoù keveratadus*

éléments de symétrie : *elfennoù kemparzh*

éléments liés par une relation binaire : *elfennoù kenereet dre un daveadur daouadek*

élévation à une puissance : *mac'hadur* g.

élever à la puissance deux : *sevel d'ar mac'h daou*

élever à la puissance deux, élever au carré : *daouvac'hañ*

élever à la puissance *n* : n-*vac'hañ*

élever à une puissance : *mac'hañ*

élever au carré : *sevel d'ar c'harrez*

élever au cube : *sevel d'an diñs*

élever au cube : *trimac'hañ*

éliminer : *ezvevennañ*

empirique : *kantouezel*

employer, utiliser : *arverañ*

en bijection réciproque avec : *kesaezh gant*

en exposant, en indice supérieur : *dregus-*

en fonction de : *a-gevreizh da*

en indice, en indice inférieur : *dregis-*

en particulier : *ent dibarek*

en position méta : *traloat*

encadrement : *stern* g.

encadrement strict : *stern strizh*

encadrer : *sternañ*

engendrer : *genel* bn. *gan-*

ennéagone : *navc'horn* g.

ennéagone : *navzueg* g.

énoncé : *dezrevell* b.

ensemble : *teskad* g.

ensemble agencé, système : *trevnad* g.

ensemble but : *amkan* g.

ensemble but : *teskad amkan*

ensemble but : *teskad buk*

ensemble cible : *bukenn* b.

ensemble concave : *teskad argevek*

ensemble convexe : *teskad argeinek*

ensemble d'arrivée : *teskad disoc'h*

ensemble d'étude : *teskad studi*

ensemble de base, référentiel : *bondeskad* g.

ensemble de cinq éléments : *pemtañv* g.

ensemble de définition : *teskad savelañ, savelva* g.

ensemble de départ : *aplud* g.

ensemble de départ : *teskad loc'hañ*

ensemble de dix éléments : *dektañv* g.

ensemble de huits éléments : *eitañv* g.

ensemble de neuf éléments : *navdañv* g.

ensemble de nombres totalement ordonné : *teskad niveroù peururzhiet*

ensemble de points : *teskad poentoù*

ensemble de quatre éléments : *perdañv* g.

ensemble de réels positifs ou nuls : *teskad ar gwerc'helion muiel pe vannel*

ensemble de sept éléments : *seitañv* g.

ensemble de six éléments : *c'hwedañv* g.

ensemble de trois éléments : *tridañv* g.

ensemble défini en extension : *teskad savelet dre an erdal*

ensemble défini en intension : *teskad savelet dre anental*

ensemble des complexes : *teskad ar c'hemplezhion*

ensemble des décimaux relatifs : *teskad an dekrannelion daveel*

ensemble des développements décimaux illimités : *teskad an dispakadoù dekredel anvevenn*

ensemble des matrices : *teskad an ogedoù*

ensemble des nombres entiers : *teskad an niveroù kevan*

ensemble des nombres rationnels : *teskad an niveroù kemezel*

ensemble des opérateurs : *teskad an niñvaderioù*

ensemble des parties d'un ensemble : *teskad parzhioù un teskad*

ensemble des réels : *teskad ar gwerc'helion*

ensemble des réels négatifs ou nuls : *teskad ar gwerc'helion leiel pe vannel*

ensemble des réels non nuls : *teskad ar gwerc'helion anvannel*

ensemble des rotations vectorielles du plan vectoriel euclidien : *teskad ar c'hweladurioù sturiadel a'r blaenenn sturiadel euklidel*

ensemble des solutions : *teskad diskoulmoù*

ensemble des surjections : *teskad ar c'hesaezhadurioù*

ensemble des valeurs : *teskad ar gwerzhadoù*

ensemble des vecteurs du plan : *teskad sturiadelloù ar blaenenn*

ensemble équipotent : *teskad kengoulud*

ensemble fermé : *teskad serr*

ensemble fini : *teskad bevennek*

ensemble non vide : *teskad angoullo*

ensemble ordonné : *teskad urzhiet*

ensemble ouvert : *teskad digor*

ensemble produit : *teskad liesâd*

ensemble quotient : *teskad rannad*

ensemble référentiel : *teskad dave*

ensemble source : *teskad tarzh*

ensemble vide : *teskad goullo*

ensembles adjacents : *teskadoù kefin*

ensembles de nombres : *teskadoù niveroù*

ensembles égaux,ensembles distincts : *teskadoù par, teskadoù anpar*

ensembles sécants : *teskadoù a-skej (kenskej)*

entier : *kevan* aa. & pa. g. *-ion*

entier naturel : *kevan naturel*

entier négatif : *kevan leiel*

entier positif : *kevan muiel*

entier relatif : *kevan daveel*

entraîne, infère : *trere*

énumérable : *eriñvadus*

énumérer : *eriñvañ*

épineux : *drezek*

équateur : *keheder* g.

équation : *atalad* g.

équation à deux inconnues : *atalad div zianavenn*

équation à une inconnue : *atalad un dianavenn*

équation aux dimensions : *atalad mentawouriezhel*

équation bouléenne : *atalad boulean*

équation caractéristique de l'équation différentielle : *atalad naouus d'an atalad orgemmel*

équation cartésienne d'une courbe : *atalad kartezel ur grommenn* équation d'une droite : *atalad un eeunenn*

équation d'une parabole : *atalad ur barabolenn*

équation de la tangente : *atalad ar spinenn*

équation différentielle : *atalad orgemmel*

équation différentielle d'ordre *n* : *atalad orgemmel a'n urzh* n

équation différentielle du premier ordre à coefficients constants : *atalad orgemmel a'r gentañ urzh gant gwezhiaderioù arstalek*

équation différentielle du second ordre : *atalad orgemmel a'n eil urzh*

équation différentielle homogène : *atalad orgemmel ungenezh*

équation différentielle linéaire : *atalad orgemmel linennek*

équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants : *atalad orgemmel linennek a'r gentañ urzh gant gwezhiaderioù arstalek*

équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : *atalad orgemmel linennek a'n eil urzh gant gwezhiaderioù arstalek*

équation différentielle linéaire du second ordre non homogène : *atalad orgemmel linennek diungenezh a'n eil urzh*

équation du premier degré a deux inconnues : *atalad kentañ derez div zianavenn*

équation du premier degré à une

inconnue : *atalad kentañ derez un dianavenn*

équation du second degré : *atalad eil derez*

équation différentielle linéaire homogène : *atalad orgemmel linennek ungenezh*

équation différentielle linéaire non homogène d'ordre *n* : *atalad orgemmel linennek diungenezh a'n urzh* n

équation différentielle non homogène : *atalad orgemmel diungenezh*

équation numérique : *atalad niverel*

équation trigonométrique : *atalad tric'hornventouriel*

équidistant (de) : *keitpell*

équilatéral : *keittuek*

équipollence : *kevarzhder* g.

équipollent : *kevarzh*

équipotent, équipotence : *kengoulud* aa. & pa. g.

équivalence : *kevatalder* g.

équivalence : *kevemplegadur* g.

équivalence logique : *kevatalder mezoniel*

équivalence mathématique : *kevatalder jedoniel*

équivalent : *kevatal*

équivalenve logique : *kevemplegadur mezoniel*

erreur (programmation) : *kammad* g.

espace : *egor* g.

espace à trois dimensions : *egor teirment*

espace affine : *egor keouenn*

espace affine à trois dimensions : *egor keouenn teirment*

espace affine euclidien : *egor keouenn euklidel*

espace affine euclidien à trois

dimensions : *egor keouenn euklidel teirment*

espace affine réel associé à un espace vectoriel : *egor keouenn gwerc'hel kevredet ouzh un egor sturiadel*

espace physique : *egor alvezel*

espace vectoriel : *egor sturiadel*

espace vectoriel à deux dimensions : *egor sturiadel divvent*

espace vectoriel à une dimension : *egor sturiadel unvent*

espace vectoriel de dimension : *egor sturiadel a vent*

espace vectoriel euclidien : *egor sturiadel euklidel*

espace vectoriel euclidien orienté à trois dimensions : *egor sturiadel euklidel durc'haet teirment*

espace vectoriel normé : *egor sturiadel reolet*

ET : *HAG*

étape : *tennad* g.

étoile : *sterenn* b.

être tangent à : *spinañ*

étude générale d'une fonction : *studi hollek ur gevreizhenn*

euclidien : *euklidel*

évaluation : *dewerzhadur* g.

évaluer : *dewerzhañ*

éventualité : *c'hoarvezuster* g.

exact : *rik*

excentricité : *ezkreizadezh* b.

exception : *nemedenn* b.

exclusif : *ezkaelat*

exclusion : *ezkaeladur* g.

existence : *bezoud* g.

exister : *revout*

explicite : *ezpleg*

exponentiel : *argemmvac'hel*

exponentielle (fonction) : *argemmvac'henn* b.

exponentielle de base *a* : *argemmvac'henn diazez* a

exponentielle de base *e* : *argemmvac'henn diazez* e

exposant : *mac'her* g.

exposant entier négatif : *mac'her kevan leiel*

exposant entier relatif : *mac'her kevan daveel*

exposants, indices : *ragus-, rak-, ragis-, us-, is-, drek-, dregis-*

expression (agébrique, ...) : *bomm* g.

expression (algébrique, ...) : *riñvenn* b.

exprimer : *dezgeriañ*

extension : *erdal, erdalad* g.

extraire la racine carrée : *daouvonañ*

extraire la racine $n^{\text{ième}}$: n-*vonañ*

extrêmes (≠ moyens) : *pellaoù*

extrémité (≠ origine) : *dibenn* g.

extrémité : *penn* g.

extrémités de l'intervalle : *pennoù an entremez*

extremum : *eizhaegenn* b.

F

face : *tal* g.

face latérale : *stlez* g. *-ioù*

facteur : *periad* g.

facteur commun : *kenberiad* g.

facteur commun : *periad boutin*

facteur du produit : *periad al liesâd*

factorielle : *dasperiad* g.

factorisation : *periatadur* g.

factorisation première : *periata kentañ*

factoriser : *periata*

faiblesse théorique : *skorted damkanel*

faire varier la constante : *lakaat an arstalenn da argemmañ* fait : *devoud* g.

famille : *familh* b.

faute : *fazi* g.

faux : *faos*

fermé : *serr*

fermé à droite : *serr a-zehou*

fermé à gauche : *serr a-gleiz*

feuille : *delienn* b.

fidèlement et transitivement : *feleun ha trazeat*

figure (géométrique) : *lun (mentoniel)*

figures d'arcs de cercle : *lunioù gwarennoù kelc'h*

figures d'une droite et d'un cercle : *kefluniadoù un eeunenn hag ur c'helc'h*

figures de deux cercles : *kefluniadoù daou gelc'h*

figures de droites et de plans : *kefluniadoù eeunennoù ha plaenennoù*

figures de plans : *kefluniadoù plaenennoù*

figures de quadrilatères : *lunioù pevarzuegoù*

figures de triangles : *lunioù tric'hornioù*

fils (arbre) : *merc'h* b. *-où*

final : *disoc'hel*

fini : *bevennek*

fixe : *fest*

fixer : *festañ*

flèche (vecteur) : *usvir*

flèche : *bir* g.

fonction : *kevreizhenn* b.

fonction affine : *kevreizhenn geouenn*

fonction bijective : *kevreizhenn gesaezhat (gesaezhañ)*

fonction caractéristique : *kevreizhenn naouus*

fonction circulaire : *kevreizhenn gelc'hel*

fonction constante : *kevreizhenn arstalek*

fonction continue : *kevreizhenn gendalc'hek*

fonction d'interpolation : *kevreizhenn etreletodiñ*

fonction de mesure d'arcs : *kevreizhenn vuzuliañ gwarennoù*

fonction définie sur un intervalle : kevreizhenn savelet war un entremez :

fonction dérivée première : *kevreizhenn diarroudañ kentañ*

fonction en escalier : *kevreizhenn war bazinier*

fonction explicite : *kevreizhenn ezpleg*

fonction exponentielle de base *e* : *kevreizhenn argemmvac'hel diazez* e

fonction identique : *kevreizhenn aruniñ*

fonction identique, identité : *arunadur* g.

fonction identiquement nulle : *kevreizhenn arun gant mann*

fonction linéaire : *kevreizhenn linennek*

fonction linéaire tangente : *kevreizhenn linennek a-spin*

fonction logarithme : *kevreizhenn logaritm*

fonction logarithme népérien : *kevreizhenn logaritm neperel*

fonction logique : *kevreizhenn vezoniel*

fonction monôme : *kevreizhenn vonom*

fonction numérique : *kevreizhenn niverel*

fonction polynôme : *kevreizhenn bolinom*

fonction ponctuelle : *kevreizhenn boent*

fonction primitive : *kevreizhenn gentek*

fonction produit : *kevreizhenn liesâd*

fonction rationnelle : *kevreizhenn gemezel*

fonction réciproque : *kevreizhenn geveskemm*
fonction somme : *kevreizhenn sammad*
fonction trigonométrique : *kevreizhenn dric'hornventouriel*
fonction vectorielle : *kevreizhenn sturiadel*
fonction vectorielle de Leibniz : *kevreizhenn sturiadel Leibniz*
fonctions courantes : *kevreizhennoù boas*
fonctions dérivées : *kevreizhennoù diarroudañ*
fonctions intégrables : *kevreizhennoù sammegadus*
fonctions numériques complexes : *kevreizhennoù niverel kemplezh*
fonctions réelles : *kevreizhennoù gwerc'hel*
forme (linéaire &) : *furm* b.
forme (expression) : *rezh* g. *-ioù*
forme bilinéaire : *furm uelinennek*
forme canonique : *rezh destlel*
forme cartésienne (ou algébrique) d'un nombre complexe : *rezh kartezel (pe aljebrel) an niver kemplezh*
forme développée : *rezh dispaket*
forme exponentielle d'un nombre complexe : *rezh argemmvac'hel un niver kemplezh*
forme factorisée : *periatâd* g., *rezh periataet*
forme linéaire : *furm linennek*
forme trigonométrique : *rezh tric'hornventouriel*
forme, représentation : *rezhienn* b.
formule : *reollun* g. *-ioù*
formule de la moyenne : *reollun ar c'heitad*
formule de Moive : *reollun Moivre*
formule du binôme : *reollun ar binom*
formules d'addition : *reollunioù sammañ*
formules d'Euler : *reollunioù Euler*
formules de changement d'axes : *reollunioù kemmañ ahelioù*
formules de duplication et de linéarisation : *reollunioù daougementiñ ha linennekaat*
formules de transformation : *reollunioù treuzfurmiñ*
formules trigonométriques : *reollunioù tric'hornventouriel*
foyer (coniques) : *sti* g.
fraction : *rann* b.
fraction rationnelle : *rann gemezel*
frontière : *bevenn* b.

G

généralisation : *hollekadur* g.
généraliser : *hollekaat*
génératrice : *ganerenn* b.
générique : *genadel*
géométrie : *mentoniezh* b.
géométrie affine : *mentoniezh keouenn*
géométrie analytique : *mentoniezh dezrannel*
géométrique : *mentoniel*
globalement : *a-vloc'h*
grade : *grad* g.
graduation : *dereziadur* g.
graduation d'une droite : *dereziadurioù un eeunenn*
gramme : *gramm* g.
grand cercle : *kelc'h bras*
grand sigma : *sigma bras*
grandeur (mesurable ou repérable) : *mentenn* b.

graphe : *graf* g. *-où*

graphique : *kevregad* g.

graphique : *kevregat aa.*

gravité,gravitation : *kerc'hell g*

groupe : *stroll* g.

groupe abélien : *stroll abelel*

groupe additif : *stroll sammadel*

groupe commutatif : *stroll kantamsavat*

groupe des permutations : *stroll kevamsavadurioù*

groupe des transformations du plan : *stroll treuzfurmiñ ar blaenenn*

groupe des translations vectorielles : *stroll an treuzkludadurioù struriadel*

groupe fini : *stroll bevennek*

groupe multiplicatif : *stroll liesadel*

groupe multiplicatif des complexes de module 1 : *stroll liesadel ar c'hemplezhion moll 1*

groupes isomorphes : *strolloù kendelvek*

H, I

harmonique : *kemblac'hek*

harmoniquement : *ent kemblac'hek*

hauteur : *sav* g.

hauteur du cône : *sav ar gernenn*

hectare : *hektar* g.

hectomètre : *hektometr* g.

hectomètre carré : *hektometr karrez*

hendécagone : *unnekkorn* g.

hendécagone : *unnektueg* g.

heptagone : *seizhkorn* g.*, seizhtueg* g.

hexagone : *c'hwec'hkorn* g.

hexagone : *c'hwechtueg* g.

homogène : *ungenezh*

homogénéité : *ungenezhded* b.

homographique : *heñvelskriv*

homologue : *keveleb* g., *kevelep* aa.

homomorphisme, morphisme : *heñveldelvadur* g.

homothétie : *heñvelstaladur* g.

homothétie : *heñvelstalañ*

homothétie de centre O et de rapport *k* : *heñvelstalañ a greiz Ohag a geñver* k

horizontal(ement) : *a-zremm, diazremm*

horizontale : *dremmlinenn* b.

huitième de plan : *eizhvedenn* b. *blaenenn*

hyperbole : *hiperbolenn* b.

hypoténuse : *goustenner* g. *-ioù*

hypothèse (d'une démonstration) : *kentread* g.

hypothèse (de travail) : *goulakadenn* b.

hypothèse : *goulakaat*

hypothèse, donnée : *darbennad* g.

idempotent : *keztrevac'h*

identification : *hevelebadur* g.

identifier : *hevelebiñ ouzh*

identique à, confondu avec : *arun (en ~ gant, en ~, ~ gant)*

identité (application identique) : *aruniñ*

identité : *arunder* g.

identités remarquables : *arunderioù heverk*

image : *delvad* g.

image : *eilorad* g.

image dans une réflexion : *drec'had* g.

image ponctuelle du complexe : *delvad poentel ar c'hemplezh*

image vectorielle du complexe : *delvad sturiadel ar c'hemplezh* imaginaire, nombre imaginaire : *derc'hel* aa. & pa. g. *-ion*

imaginaires purs : *derc'helion glez*

immédiatement inférieur : *izeloc'h diouzhtu*

impair : *ampar*

implication : *emplegadur* g.

implication logique : *emplegadur mezoniel*

implication mathématique : *emplegadur jedoniel*

implication réciproque : *emplegadur keveskemm*

implique (⇒) : *empleg*

implique et réciproquement : *kevempleg*

impliquer (et réciproquement) : *kevemplegañ*

impliquer : *emplegañ*

importer : *lazout*

impossible : *dic'hallus*

incertitude : *andiender* g.

incertitude sur une approximation : *andiender war un arnesâd*

inclus dans (⊂) : *gann*

inclus, partie de : *parzhiat*

inclusif : *enkaelat*

inclusion : *gannadur* g.

inclusion large : *gannadur ledan*

inclusion logique : *gannadur mezoniel*

inclusion stricte : *gannadur strizh*

incompatible, incompatibilité : *digembez* aa. & pa. g.

inconnue : *dianavenn* b.

indéfiniment : *dibenndermen*

indépendant, libre : *dizalc'h diouzh*

indétermination : *ansavelad* g.

indétermination : *ansaveladur* g.

indéterminé : *andidermenet*

indéterminé : *ansavelet*

indexer à : *ibiliañ ouzh*

indice : *isverk* g.

indice : *meneg* g.

indice inférieur : *dregisverk* g.

inégalité : *dibarder* g.

inégalité de Cauchy-Schwartz : *dibarder Cauchy-Schwartz*

inégalité des accroissements finis : *dibarder ar c'hreskoù bevennek*

inégalité large : *dibarder ledan*

inégalité stricte : *dibarder strizh*

inégalité triangulaire : *dibarder tric'hornel*

inéquation : *diatalad* g.

inéquations numériques : *diataladoù niverel*

inéquations simultanées : *diataladoù diaser*

inéquations trigonométriques : *diataladoù tric'hornventouriel*

inertie : *anniñv* g.

inférence : *trereadur*

inférence contraposée : *trereadur gourzhlec'hiet*

inférence inverse : *trereadur ginus*

inférence réciproque : *trereadur keveskemm*

inférer : *treren* bn. *trere-*

infini : *anvevenn* aa. & pa. g.

infinité : *anvevennad* g.

infinitif : *pennanor*

inflexion (point d'∼) : *disgwar*

influer : *delanvad* g.

informatique (science) : *stlenneg* g.

initiale (lettre) : *tallizherenn* b.

injectif : *ensaezhat*

injection : *ensaezhadur* g.

injection : *ensaezhañ*

inscriptible : *kaeadus*

inscrire : *kaeañ*

intégrable : *sammegadus*

intégrale : *sammegenn* b.

intégrale de Riemann : *sammegenn Riemann*

intégrale générale : *sammegenn hollek*

intégrale particulière : *sammegenn dibarek*

intégrales (solutions) de l'équation : *sammegennoù (diskoulmoù) an atalad*

intégration : *sammegadur* g.

intégration par parties : *sammegadur trezarnat*

intègre : *kevanled*

intégrer : *sammegañ*

intercepter : *etrederc'hel*

intéressant : *deurus*

interne,intérieur : *diabarzh*

interpolation : *etreletodadur* g.

interpolation linéaire : *etreletodad* g. *linennek*

interpoler : *etreletodiñ*

interprétation géométrique d'un nombre complexe : *desteriadur mentoniel un niver kemplezh*

interprétation graphique : *desteriadur* g. *kevregat*

intersection (opération) : *kenskejadur* g.

intersection (résultat) : *kenskejad* g.

intersection : *kenskejañ, kenskej* g.

intersection logique : *kenskejadur mezoniel*

intervalle : *entremez* g. *-ioù*

intervalle centré en : *entremez kreizet en*

intervalle fermé : *entremez serr*

intervalle moins l'infini, plus l'infini : *entremez leianvevenn, muianvevenn*

intervalle ouvert : *entremez digor*

intervalle semi-ouvert : *entremez leddigor*

intervalles emboîtés : *entremezioù dazgannat*

intuition : *nadad* g.

invariable, fixe : *digemm, anargemm*

invariant : *anargemmat*

invariant globalement : *anargemmat a-vloc'h*

invariant point à point : *anargemmat poent ha poent*

inverse (inférence) : *ginus (trereadur)*

inverse (symétrique) : *ginad* g.

inverse : *gin*

inverse l'un de l'autre : *kenginad* g.

inversement proportionnel : *ginfeuriek*

inversion : *ginadur* g.

inversion : *ginañ*

inversion logique : *ginadur mezoniel*

involutif : *atroat*

involution : *atroadur* g. *(atreiñ* bn. *atro-)*

irrationnel : *ankemezel* aa. & pa. g. *-ion*

irréductible : *andire(adus)*

isobarycentre : *keittrommgreiz* g.

isocèle : *keitgarek*

isométrie : *keitventadur* g.

isométrie : *keitventiñ*

isométrie négative : *keitventadur leiel*

isométrie positive : *keitventadurioù muiel*

isométrique (image) : *keitventad* g.

isométrique : *keitvent*

isomorphe : *kendelvek*

isomorphie : *kendelvegezh* b.

isomorphisme (application) : *kendelvadur* g.

itérer, itération : *arredeiñ* bn. *arredo-*

K, L

kilogramme : *kilogramm* g.

kilomètre : *kilometr* g.

kilomètre carré : *kilometr karrez*

kilomètre cube : *kilometr diñs*

langage (logique, machine) : *areg* g.

langage (naturel) : *lavar* g.

latéral(ement) : *a-stlez*

latitude : *ledred* g.

lettre : *lizherenn* b.

lier : *eren*

lieu géométrique : *lec'h* g. *mentoniel*

ligne (tableau) : *rez* b.

ligne : *linenn* b.

ligne d'un tableau (contenu) : *rezad* b.

ligne de niveau : *keitliveenn* b.

ligne de niveau : *linenn alive*

ligne polygonale : *linennliestuek*

lignes (courbes) de niveau d'une fonction ponctuelle : *linennoù (krommennoù) keitlive ur gevreizhenn boent*

limite (adjectif) : *harzat*

limite (bord) : *lez* g.

limite : *harz* g. *-où*

limite à gauche : *harz a-gleiz*

limite finie : *harz bevennek*

limite finie à droite en un point : *harz bevennek a-zehou en ur poent*

limite finie à gauche en un point : *harz bevennek a-gleiz en ur poent*

limite infinie : *harz anvevenn*

limite infinie à droite en un point : *harz anvevenn a-zehou en ur poent*

limite infinie à gauche en un point : *harz anvevenn a-gleiz en ur poent*

limite infinie en un point : *harz anvevenn en ur poent*

limiter : *bevennañ*

limites des fonctions numériques : *harzoù ar c'hevreizhennoù niverel*

linéaire : *linennek*

linéairement indépendant (libre) : *dizalc'h entlinennek*

linéarisation des polynômes trigonométriques : *linennekadur polinomoù tric'hornventouriel*

linéariser : *linennekaat*

linéarité : *linennegezh* b.

linéarité de l'intégration : *linennegezh ar sammegañ*

liste : *roll* g.

local : *lec'hel*

logarithme de base *a* : *logaritm* g. *diazez* a

logarithme népérien : *logaritm neperel*

logarithmes et exponentielles : *logaritmoù hag argemmvac'hennoù*

logarithmique : *logaritmek*

logigramme : *mezlun* g.

logique : *mezoniel*

logique mathématique : *mezoniezh* b.

logique mathématique : *poelloniezh jedoniel*

logique symbolique : *poelloniezh arouezel*

loi : *dezv* b. *-où*

loi de composition : *dezv gediañ*

loi de composition additive : *dezv gediañ sammadel* loi de composition externe : *dezv gediañ diavaez*

loi de composition interne : *dezv gediañ diabarzh*

loi de composition multiplicative : *dezv gediañ liesadel*

loi externe : *dezv diavaez*

lois de De Morgan : *dezvoù De Morgan*

longitude : *hedred* g.

longueur : *hed* g.

losange : *lankell* b.

M, N

majorant : *muiant* g.

majorer : *muiantiñ*

marche, escalier : *pazenn* b. *pazinier*

marquer d'une croix : *kroaziañ*

masse : *tolz* g.

masse volumique : *tolzder ec'honel*

masse volumique par unité de longueur : *tolzder ec'honel regel*

masse volumique par unité de surface : *tolzder ec'honel gorreel*

mathématicien : *jedoniour* g.

mathématique : *jedoniel*

mathématiquement : *ent jedoniel*

mathématiser : *jedoniekaat*

matrice : *oged* b.

matrice carrée : *oged karrezek*

matrice colonne : *oged-bann*

matrice inverse : *oged c'hin*

matrice nulle : *oged vann(el)*

matrice opposée : *oged c'hourzharouez*

matrice symétrique : *oged kemparzhek*

matrice unité : *oged unanenn*

maximum : *uc'hegenn* b.

maximum absolu : *uc'hegenn dizave*

maximum relatif : *uc'hegenn daveel*

médiane : *kreiztuenn* b.

médiatrice : *kreizserzhenn* b.

mégamètre : *megametr* g.

membre (d'une équation, ...) : *kazel* b.

méridien : *hedredenn* b.

méridien : *kreistegelc'h*

méridien d'origine : *hedredenn orin*

méridien de Greenwich : *hedredenn Greenwich*

mesurable : *muzuliadus*

mesure (d'une grandeur) : *mentad* b.

mesure : *muzul* g.

mesure : *muzuliad* g.

mesure algébrique : *muzul aljebrel*

mesure d'arc : *gwarad* g.

mesure de l'arc : *muzul ar warenn*

mesure positive : *muzul muiel*

mesure principale : *pennvuzul* g.

mesurer : *muzuliañ*

mesures agraires : *gorreadoù douar*

méthode : *hentenn* b.

méthode de résolution par combinaison linéaire : *hentenn diskoulmañ dre gedaoz linennek*

méthode de résolution par substitution : *hentenn diskoulmañ dre erlec'hiañ*

méthode graphique : *hentenn gevregat*

métonymie : *ledanviñ*

mètre : *metr* g.

mètre carré : *metr karrez*

mètre cube : *metr diñs*

métrique : *mentel*

mettre en œuvre : *engwerc'hañ*

mettre sous la forme, représenter : *rezhiennañ*

micron : *mikron* g.

milliard : *milmilion*

millième : *milvedenn* b.

milligrade : *miligrad* g.

millimètre : *milimetr* g.

millimètre carré : *milimetr karrez*

millimètre cube : *milimetr diñs*

million : *milion* g.

minimiser : *izekaat*

minimum : *izegenn* b.

minimum absolu : *izegenn dizave*

minimum relatif : *izegenn daveel*

minimum relatif strict : *izegenn daveel strizh*

minorant : *leiant* g.

minorer : *leiantiñ*

minute : *munud* g.

modèle (mathématique, ...) : *delvan* g.

module : *moll* g.

module d'un complexe : *moll ur c'hemplezh*

modulo : *modulo* g.

modulo la relation R : *modulo an daveadur R*

modus ponens : *modus ponens*

moins : *lei*

moins l'infini : *leianvevenn* g.

moins ou plus : *leimui*

moment d'inertie : *lankad* g. *anniñv*

monôme : *monom* g.

monôme à une variable : *monom un argemmenn*

monômes semblables : *monomoù heñvel*

monotone : *unton*

monotone croissant : *unton kengresk*

monotonie : *untonez* g. *-ioù*

moyen, procédé : *araezad* g.

moyenne arithmétique : *keitad niveroniel*

moyenne géométrique : *keitad mentoniel*

moyenne proportionnelle : *keitad* g. *kenfeuriek*

moyens ($\neq$ extrêmes) : *nesaoù*

muet : *mut*

multiple : *lieskement* aa. *(da)* & pa. g.

multiple commun : *kenlieskement* aa. & pa. g.

multiple commun : *lieskement boutin*

multiples entiers : *lieskementoù kevan*

multiplet : *liesac'h* b. *-où*

multiplicande : *liesaed* g.

multiplicateur : *liesaer* g.

multiplicatif : *liesadel*

multiplication, produit : *liesadur* g.

multiplier, faire le produit : *liesaat*

n'appartenant pas à : *ezveziat en*

nature (essence) : *genezh* g.

naturel : *naturel* aa. & pa. g. *-ion*

naturels non nuls : *naturelion anvannel*

naturels pairs : *naturelion hebar*

naturels relatifs : *naturelion daveel*

nécessaire : *ret*

négatif : *leiel*

négatif ou nul : *leiel pe vannel*

négation : *nac'hadur* g.

négation alternée : *nac'hadur pebeilat*

négation d'une proposition : *nac'hadur un erganad*

népérien : *neperel*

neutre : *neptu*

nœud : *klom* g.

nombre : *niver* g.
nombre à virgule : *niver skejel*
nombre à virgule : *skejel* aa. & pa. g. *-ion*
nombre algébrique : *niver aljebrel*
nombre cardinal : *niver pegementiñ*
nombre cardinal : *niver priñvel*
nombre complexenon nul : *niver kemplezh anvannel*
nombre composé : *niver kenaozat*
nombre décimal : *niver dekrannel*
nombre décimal relatif : *niver dekrannel daveel*
nombre dérivé, dérivée en un point : *diarroudad* g.
nombre entier négatif, positif : *niver kevan leiel, muiel*
nombre fini : *niver bevennek*
nombre impaire : *niver ampar*
nombre irrationnel : *niver ankemezel*
nombre négatif : *niver leiel*
nombre nul : *niver mann*
nombre pair : *niver hebar*
nombre positif : *niver muiel*
nombre premier : *niver kentañ*
nombre primaire : *niver kentael*
nombre rationnel : *niver kemezel*
nombre réel : *niver gwerc'hel*
nombre transcendant : *niver trehontel*
nombres complexes : *niveroù kemplezh*
nombres entiers : *niveroù kevan*
NON : *NANN*
non aligné : *anareeun*
non annulable : *anvanneladus*
non antisymétrique : *angourzhkemparzhek*
non appartenance : *ezveziadezh* b.
non borné : *anvonnet*
non colinéaire : *ankenroud*
non commutatif : *ankantamsavat*
non consécutif : *ankenheuilh*
non constant : *anarstalek*
non convexe : *anargeinek*
non coplanaire : *ankemplaen*
non croisé : *anilgroaziek*
non disjoint : *andisparti*
non égalité : *anparder* g.
non élément de ($\notin$) : *ezvez*
non homogène : *diungenezh*
non identique à, non confondu : *anarun gant*
non inclus : *anparzhiat en*
non inclus ($\not\subset$) : *angann*
non inclus dans : *anendalc'h en*
non inclusion : *angannadur* g.
non nul : *anvannel*
non parallèle : *ankenstur*
non réflexif : *anasplegat*
non régulier, singulier : *anrez*
non symétrique : *amgemparzhek*
non transitif : *antrazeat*
non vide : *angoullo*
NON-ET : *NAG*
NON-OU exclusif : *NANO*
NON-OU inclusif : *NAPE*
normale : *skoueriegenn* b.
norme : *reolad* g.
norme euclidienne : *reolad euklidel*
normé : *reolel*
normer : *reoladur* g.
normer : *reoliñ*
notation : *notadur* g.
notation différentielle : *notadur orgemmel*
noter : *notañ*
noyau : *kraoñell* b.

noyau de l'homomorphisme : *kraoñell an heñveldelvadur*
noyau de l'isomorphisme : *kraoñell ur c'hendelvadur*
nul : *mannel*
numérateur : *niverer* g.
numération binaire : *niveriñ daouredel*
numération décimale : *niveriñ dekredel*
numéroter : *niverenniñ*

O

objet (mathématique) : *ergorenn* b.
objets différents : *ergorennoù anpar*
objets égaux : *ergorennoù par*
oblique(ment) : *a-veskell*
observer : *arselliñ*
obtu : *tougn*
occuper (une place), être inclus dans : *genniñ* bn. *gann-*
octant : *eibann* g.
octogone : *eizhkorn* g.
octogone : *eizhtueg* g.
opérande : *niñvuzenn* b.
opérateur : *niñvader* g. *-ioù*
opérateur binaire : *niñvader daouadek*
opérateur propositionnel : *niñvader erganadel*
opérateur unaire : *niñvader unadek*
opération : *niñvadur* g.
opération externe : *niñvadur diavaez*
opération interne : *niñvadur diabarzh*
opérations successives : *niñvadurioù kenheuilh*
opérer : *niñvañ*
opérer fidèlement et transitivement : *ninvañ feleun ha trazeat*
opposé (angle, ...) : *ragenep*
opposé (vecteur) : *enebat (sturiadell)*
opposé : *gourzharouezad* g.
ordinateur : *urzhiataer* g. *-ioù*
ordonné par : *urzhiet dre*
ordonné suivant les puissances croissantes (décroissantes) : *urzhiet hervez ar mac'hoù war gresk (war zigresk)*
ordonnée : *hedenn* b.
ordonnée de la droite à l'origine : *hedenn an eeunenn enorin*
ordonner partiellement : *darnurzhiañ*
ordonner totalement : *peururzhiañ*
ordre : *urzh* b.
ordre canonique : *urzh destlel*
ordre déterminé : *urzh savelek*
ordre large : *urzhiañ ledan*
ordre strict : *urzhiañ strizh*
organigramme : *frammlun* g. *-ioù*
organigramme d'un algorithme : *treollun* g. *-ioù*
orientation : *durc'hadur* g.
orientation des angles : *durc'hadur ar c'hornioù*
orienter : *durc'haat*
origine : *orin* g.
origine de l'axe : *orin an ahel*
origine des axes des coordonnées : *orin ahelioù an daveennoù*
origine du repère : *orin an dealf*
orthogonal à : *diaskouerouzh*
orthogonal à : *a-skouer gant*
orthogonalité : *diaskouer* g., *diaskouerded* b.
orthonormé,orthonormal : *reizhreolel*

OU exclusif : *NO*
OU inclusif : *PE*
ouvert : *digor*
ouvert à droite : *digor a-zehou*
ouvert à gauche : *digor a-gleiz*

P

pair : *hebar*
paire (ensemble de deux éléments) : *daoudañv* g.
paire : *re* g.
par (multiplication) : *dre*
par (multiplié ~) : *lies*
par parties (intégration) : *trezarnat*
parabole : *parabolenn* b.
parabolique : *parabolek*
parallèle (droite) : *kensturienn* b.
parallèle (terrestre) : *ledredenn* b.
parallèle : *kenstur*
parallèle au sens large : *kenstur ledan*
parallèlement à : *a-genstur da*
parallélépipède : *kensturdaleg* g.
parallélépipède droit : *kensturdaleg serzh*
parallélisme : *kensturder* g.
parallélogramme : *kensturieg* g.
paramètre : *arventenn* b.
paramètres directeurs d'une droite : *arventennoù roud un eeunenn*
parcourir : *erolañ*
parcourir : *redek*
parenthèse : *krommell* b.
parité : *parded* b.
parsec : *parsek* g.
particulier : *dibarek*
partie : *parzh* g.
partie close : *parzh kloz*
partie d'un ensemble : *parzh un teskad*
partie de la droite : *parzh (an) eeunenn*
partie décimale d'un nombre décimal : *lodenn rannek un dekrannel*
partie du plan : *parzh a'r blaenenn*
partie entière d'un nombre à virgule : *lodenn gevan ur skejel*
partie entière du développement décimal illimité : *lodenn gevan an dispakad dekredel anvevenn*
partie imaginaire d'un complexe : *lodenn* b. *derc'hel ur c'hemplezh*
partie non pleine : *parzh anleun*
partie non vide : *parzh angoullo*
partie pleine : *parzh leun*
partie propre : *parzh kewer*
partie réelle d'un complexe : *lodenn werc'hel ur c'hemplezh*
partie stable : *parzh stabil*
partie vide : *parzh goullo*
parties complémentaires : *parzhioù kenglokaus*
parties d'un ensemble : *parzhioù un teskad*
partition : *parzhadur* g.
passante : *hebiadenn* b.
pensée : *dezevout*
pentagone : *pempkorn* g.
pentagone : *pemptueg* g.
pente : *naou* g.
périmètre (grandeur) : *amregenn* b.
périmètre (mesure) : *amregad* g.
période : *trovezh* b.
périodicité : *trovezhiegezh* b.
périodique : *trovezhiek*

permettre de : *kevaraezañ*

permutation : *kevamsavadur* g.

permutation : *kevamsaviñ*

permutation circulaire : *koramsavadur* g.

permutation circulaire : *koramsaviñ*

permuté : *kevamsavad* g.

perpendicualire : *kenserzh*

perpendiculaire : *serzhenn* b.

perpendiculaire à : *a-serzh war*

perpendiculaire à : *diaserzh ouzh*

perpendicularité : *kenserzhder* g.

perpendicularité : *serzhder* b.

perspective : *diarsell* g.

petit cercle : *kelc'h bihan*

petit sigma : *sigma bihan*

peu différent de : *dambar da*

PGCD : *brak* g.

plan : *plaen*

plan : *plaenenn* b.

plan affine : *plaenenn geouenn*

plan complexe : *plaenenn gemplezh*

plan équatorial : *plaenenn gehederel*

plan euclidien : *plaenenn euklidel*

plan métrique euclidien : *plaenenn ventel euklidel*

plan normal : *plaenenn skoueriek*

plan orienté : *plaenenn durc'haet*

plan parallèle : *plaenenn genstur*

plan ponctuel : *plaennenn boentel*

plan vectoriel : *plaenenn sturiadel*

plan vectoriel euclidien : *plaenenn sturiadel euklidel*

plat : *sklat*

plein : *leun*

plus : *mui*

plus grand commun diviseur : *brasañ kenranner*

plus grand commun diviseur : *brasañ ranner boutin*

plus grand élément : *elfenn vrasañ*

plus grand que : *brasoc'h eget*

plus grand que ou égal à : *brasoc'h pe bar ouzh*

plus l'infini : *muianvevenn* g.

plus petit commun multiple : *bihanañ kenlieskement*

plus petit élément : *elfenn vihanañ*

plus petit que : *bihanoc'h eget*

plus petit que ou égal à : *bihanoc'h pe bar ouzh*

point (ponctuation) : *pik* g.

point : *poent* g.

point anguleux : *poent kogn*

point commun : *kenboent* g.

point commun : *poent boutin*

point d'arrêt : *poent arsav*

point d'inflexion : *poent disgwar*

point d'intersection : *poent kenskej, poent skej*

point de contact : *poent stekiñ*

point deposition fixe : *poent digemm e savlec'h*

point de rebroussement : *poent ildro*

point de tangence : *poent spin*

point de vue : *sellboent* g.

point double : *poent daouel*

point invariant : *poent anargemmat*

point limite : *poent harzat*

point origine : *poent orin*

point particulier : *poent dibarek*

point quelconque : *poent diforzh*

point unique : *poent unel*
point unitaire : *poent unan*
point zéro : *poent mann*
pointé en O : *alfet en O*
points consécutifs : *poentoù kenheuilh*
points pondérés : *poentoù daspouezet*
points remarquables : *poentoù heverk*
pôle : *blein* g.
pôle sud, nord : *blein su, norz*
pôles : *pennoù ahel*
polyèdre : *liesker* g. *-ioù*
polyèdre : *liestaleg* g.
polygone : *lieskorn* g.
polygone : *liestueg* g.
polygone inscrit dans le cercle : *lieskorn kaeet er c'helc'h*
polygone non convexe (concave) : *lieskorn anargeinek*
polygone régulier : *liestueg reoliek*
polynôme : *polinom* g.
ponctuel : *poentel*
porte logique : *dor vezoniel*
poser : *dodiñ*
positif : *muiel*
positif et non nul : *muiel hag anvannel*
positif ou nul : *muiel pe vannel*
position : *savlec'h* g.
position limite : *savlec'h harzat*
possible : *bezus*
possible : *gallus*
pourvoir : *pourveziñ*
PPCM : *bik* g.
pratique : *pleustr* g.
préfixes des multiples et sous-multiples : *rakgerioù lieskementiñ ha ranngementiñ*
premier : *kentañ*
premier membre : *kazel gentañ*
premier terme : *termen kentañ*
premiers entre eux : *kentañ etrezo*
présence, absence : *bezañs, ezvezañs*
présent : *beziat*
présenter : *erouezañ*
primaire (écriture) : *kentael*
primarité : *kentaelezh* b.
prime : *kent*
primitif (fonction) : *kentek*
primitive (fonction) : *kentegenn* b.
prisme : *kengereg* g.
prisme droit : *kengereg serzh*
problème : *kudenn* b.
procédé mnémotechnique : *kouneiad* g.
produit : *liesâd* g.
produit cartésien : *liesâd kartezel*
produit d'un vecteur par un réel : *liesâd ur sturiadell dre ur gwerc'hel*
produit d'un vecteur par un réel : *liesadur ur sturiadell dre ur gwerc'hel*
produit de deux complexes : *liesâd daou gemplezh*
produit de deux fonctions : *liesâd div gevreizhenn*
produit de facteurs : *liesâd periadoù*
produit des matrices : *liesadur an ogedoù*
produit numérique : *liesadur niverel*
produit par un réel : *liesadur dre ur gwerc'hel*
produit scalaire : *liesâd skeuliadel*
produit vectoriel : *liesadur sturiadel*
progression : *argammedadur* g.

projection : *bannadur* g.

projection centrale : *bannañ kreizel*

projection non constante : *bannadur anarstalek*

projection orthogonale : *serzhvannad* g.

projection parallèle sur une droite : *bannañ a-genstur war un eeunenn*

projection ponctuelle : *bannadur poentel*

projetante : *bannerenn* b.

projeté,projection : *bannad* g.

projeter : *bannañ*

projeter orthogonalement : *serzhvannañ*

prolongement (d'une fonction) : *askouezhad* g.

prolongement : *askouezh* g.

prolongement par continuité : *askouezh dre gendalc'hegezh*

prolonger : *askouezhañ*

proportion : *kenfeur* g.

proportionnalité : *kenfeuriegezh* b.

proportionnel : *kenfeuriek*

proposition : *erganad* g.

proposition inverse : *ginuzenn* b.

propositionnel : *erganadel*

propre : *kewer*

propriété : *perzh* g.

propriété caractéristique de : *perzh naouus da*

propriété fondamentale : *perzh diazez*

propriété remarquable : *perzh heverk*

propriétés physiques : *perzhioù alvezel*

puissance (d'une inversion) : *galloud (ur ginadur)*

puissance (ensemble) : *goulud* g.

puissance (résultat) : *mac'had* g.

puissance : *mac'h* g.

puissance deux, carré : *daouvac'had* g.

puissance du continu : *goulud an didorr*

puissance du point O par rapport au cercle C : *galloud* g. *ar poent O e-keñver ar c'helc'h C*

puissance *n* (résultat) : n-*vac'had* g.

puissance négative : *mac'h leiel*

puissance rationnelle : *mac'h kemezel*

pyramide : *kerndaleg* g.

pyramide régulière : *kerndaleg reoliek*

Q

quadrant (plan) : *pervann* g.

quadrilatère : *pevarc'horn* g.

quadrilatère : *pevarzueg* g.

quadrilatère concave non croisé : *pevarc'horn argevek anilgroaziek*

quadrilatère convexe inscriptible : *pevarc'horn argeinek kaeadus*

quadrilatère croisé inscriptible : *pevarc'horn ilgroaziek kaeadus*

quadrilatère inscriptible : *pevarc'horn kaeadus*

quadrillage : *tezelladur* g.

quadrillage droit : *tezelladur serzh*

quadrillage normé : *tezelladur reolel*

quadrillage oblique : *tezelladur a-veskell*

quadrillage orthogonal : *tezelladur reizhkorn*

quadrillage orthonormé : *tezelladur reizhreolel*

quadruplet : *pevarac'h* b. *-où*

quadruplet normé de coordonnées barycentriques : *pevarac'h reolel a zaveennoù trommgreizel*

quantificateur : *kementader* g. *-ioù*

quantificateur existentiel : *darnerdalader* g., *kementader darnerdalat*

quantificateur particulier : *kementader dibarek*

quantificateur universel : *hollerdalader* g., *kementader hollerdalat*

quantité : *kementad* g.

quart de cercle : *palevarzh kelc'h, pevarenn* b. *gelc'h*

quart de plan : *pevarenn* b. *blaenenn*

quelconque : *diforzh*

question, point de discussion : *argraf* g.

quintuplet : *pempac'h* b.

quotient : *rannad* g.

quotient d'un ensemble par une relation : *rannad un teskad dre un daveadur*

quotient de deux fonctions rationnelles : *rannad div gevreizhenn niverel*

quotient euclidien : *rannad euklidel*

quotient exact : *rannad dik*

R

R-espace vectoriel : *R-egor sturiadel*

raccourci : *heptreug* g.

racine (carrée, cubique, &) : *bon* g.

racine : *gwrizienn* b.

racine carrée (fonction) : *bon daou*

racine carrée (résultat) : *daouvonad* g.

racine complexe : *gwrizienn gemplezh*

racine de l'équation : *gwrizienn an atalad*

racine double : *gwrizienn daouel*

racine imaginaire : *gwrizienn derc'hel*

racine $n^{\text{ième}}$: n-*von*

racine réelle : *gwrizienn werc'hel*

racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe : n-*vonadoù ur c'hemplezh*

radian : *radian* g.

radicande : *boned* g.

raison (suite) : *argammed* g.

raisonnement : *poellata*

raisonnement par récurrence : *poellata dre zarren*

rang : *renk* b.

ranger : *renkañ*

rappel : *kounañ*

rapport : *keñver* g.

rapport anharmonique : *keñver ankemblac'hek*

rapport de projection : *keñver bannañ*

rapport de projection orthogonale : *keñver serzhvannañ*

rapporté à la base orthonormé : *daveet d'an diazez reizhreolel*

rapporté à un repère : *daveet d'un dealf*

rapporter : *daveiñ*

rationnel : *kemezel aa. & pao.* g. *-ion*

rayon : *skin* g.

rayon de l'intervalle : *skin an entremez*

réaliser : *gwerc'hennañ*

rebroussement : *ildro* aa. & pa. b. *-ioù*

réciproque (la ~) : *keveskemmenn* b.

réciproque : *keveskemm*

réciproquement : *a-geveskemm*

recouvrement : *gourloadur* g.

rectangle : *reizhkorn aa.*

rectangle : *reizhkorneg* g. *-où*
récurrence épistémologique : *astreiñ*
récurrence,récurrent : *darren* bn. *darre-*
réduire : *diren* bn. *dire-*
réel : *gwerc'hel* aa. & pa. g. *-ion*
réel négatif : *gwerc'hel leiel*
réel non nul : *gwerc'hel anvannel*
réel positif : *gwerc'hel muiel*
réel positif ou nul : *gwerc'hel muiel pe vannel*
réel quelconque : *gwerc'hel diforzh*
réel strictement négatif : *gwerc'hel leiel strizh*
réel strictement positif : *gwerc'hel muiel strizh*
réflexif : *asplegat*
réflexion : *drec'hadur* g.
réflexion : *drec'hiñ*
règle : *reolenn* b.
règle des signes : *reolenn an arouezioù.*
règles de calcul : *reolennoù jediñ*
règles de déduction : *reolennoù dezren*
régulier : *reoliek*
régulier : *rez*
réitérer, répéter : *arren* bn. *arre-*
relatif : *daveel*
relation : *daveadur* g.
relation antiréflexive : *daveadur gourzhasplegat*
relation antisymétrique : *daveadur gourzhkemparzhek*
relation binaire : *daveadur daouadek*
relation d'équipollence : *daveadur kevarzhder*
relation d'équivalence : *daveadur kevatalder*
relation d'ordre : *daveadur urzhiañ*
relation d'ordre large : *daveadur urzhiañ ledan*
relation d'ordre partiel : *daveadur darnurzhiañ*
relation d'ordre strict : *daveadur urzhiañ strizh*
relation d'ordre total : *daveadur peururzhiañ*
relation de changement de repère : *daveadur kemmañ dealf*
relation de Chasles : *daveadur Chasles*
relation de congruence : *daveadur kewez*
relation de parallélisme : *daveadur kensturder*
relation de Pythagore généralisée : *daveadur Pitagoras hollekaet*
relation de récurrence : *daveadur darren*
relation des sinus : *daveadur ar sinuzoù*
relation fonctionnelle : *daveadur kevreizhel*
relation réciproque : *daveadur keveskemm*
relation réflexive : *daveadur asplegat*
relation symétrique : *daveadur kemparzhek*
relation transitive : *daveadur trazeat*
relations égales et différentes : *daveadurioù par hag anpar*
relations métriques dans le triangle quelconque : *daveadurioù mentel en tric'horn diforzh*
relations métriques dans le triangle rectangle : *daveadurioù mentel en tric'horn serzh*
relations métriques de similitude : *daveadurioù mentel a heñvelder*
relations trigonométriques : *daveadurioù tric'hornventouriel*
relier à : *keneren ouzh*
remarquable : *heverk*

remplacer (*y* par *x*), substituer (*x* à *y*) : *erlec'hiañ (*x *ouzh* y*)*

remplir une condition nécessaire : *seveniñ an amplegad*

rentrant : *askek*

rentrant, secteur angulaire rentrant : *ask* aa. & pa. g.

repère : *dealf* g.

repère affine : *dealf keouenn*

repère cartésien : *dealf kartezel*

repère de la droite : *dealf an eeunenn*

repère du plan : *dealf ar blaenenn*

repère normé : *dealf reolel*

repère orthogonal : *dealf diaskouer*

repère orthonormé : *dealf reizhreolel*

repère quelconque : *dealf diforzh*

représentant (d'une classe) : *derc'haller* g. *-ioù*

représentation : *derc'hennadur* g.

représentation cartésienne : *derc'hennañ kartezel*

représentation géométrique : *derc'hennadur mentoniel*

représentation graphique : *derc'hennadur kevregat*

représenté, représentation : *derc'hennad* g.

représenter (une classe d'équivalence) : *derc'hallañ*

représenter : *derc'hennañ*

représenter graphiquement : *kevregañ*

réseau : *rouedad* b.

résoudre : *diskoulmañ*

respectif : *ketep*

respectivement : *a-getep*

reste : *dilerc'h* g.

restriction : *strishâd* g.

restriction : *strishadur* g.

résultat : *disoc'h* g.

résulter (de) : *evodiñ*

résumé : *berradur* g.

retenue,report : *astaol* g.

retenues en cascade : *astaolioù oglennek*

retenues partielles : *astaolioù darnel*

retourner : *c'hweldreiñ*

rétrograde, négatif (sens), gauche (trièdre) : *sou*

réunion (d'ensembles) : *kembodad* g.

réunion : *kembodadur* g.

réunion des intervalles : *kembodadur an entremezioù*

réunion logique : *kembodadur mezoniel*

réunion, union (∪) : *kembod* g.

réunir, réunion : *kembodañ*

réversible : *eiltroüs*

révolution : *kelc'htreiñ*

rigueur : *rikted* b.

rond (composition) : *ked*

rond (loi de composition) : *nez*

rotation : *c'hweladur* g.

rotation : *c'hwelañ*

rotation de centre O : *c'hwelañ a greiz O*

rotation vectorielle : *c'hweladur sturiadel*

ruban : *lurell* b.

ruban ouvert : *lurell digor*

S

saillant : *balegek*

saillant, secteur angulaire saillant : *baleg* aa. & pa. g.

satisfaire : *bastañ*

scalaire : *skeuliadel*

scalaire : *skeuliadell* b.

schéma : *goulun* g. *-ioù*

schéma sagittal : *goulun birek*

sécant à : *a-skej war*

sécant, intersection (inter ∩) : *kenskej* aa. & pa. g.

sécante : *eeunenn a-skej war*

sécante : *skejenn* b.

second : *eil*

second membre de l'équation : *kazel*

(eil ~) an atalad

second membre de l'inéquation : *kazel*

(eil ~) an diatalad

seconde (angle, ...) : *eilenn* b.

secteur angulaire : *gennad korn*

secteur angulaire aigu : *gennad korn lemm*

secteur angulaire au centre : *gennad korn kreizet*

secteur angulaire droit : *gennad korn serzh*

secteur angulaire extérieur : *gennad korn diavaez*

secteur angulaire fermé : *gennad korn serr*

secteur angulaire intérieur : *gennad korn diabarzh*

secteur angulaire nul : *gennad korn mannel*

secteur angulaire obtu : *gennad korn tougn*

secteur angulaire ouvert : *gennad korn digor*

secteur angulaire plat : *gennad korn sklat*

secteur angulaire plein : *gennad korn leun*

secteur angulaire rentrant : *gennad korn askek*

secteur angulaire saillant : *gennad korn balegek*

secteur circulaire : *gennad* g. *kelc'h*

secteurs angulaires adjacents : *gennadoù korn kefin*

secteurs angulaires inscrits dans un même cercle : *gennadoù korn kaeet en un kelc'h*

section : *skejad* g.

segment (mesure de ~) : *regad* g.

segment : *regenn* b.

segment de droite : *eeunregenn*

segment de droite : *ranneeunenn* b.

segment de droite : *regenn eeun*

segment fermé : *regenn serr*

segment ouvert : *regenn digor*

segment semi-ouvert : *regenn leddigor*

segments adjacents : *regennoù (eeun) kefin*

segments consécutifs : *regennoù (eeun) kenheuilh*

semblable : *heñvel*

semi-ouvert : *leddigor*

sens : *tu* g.

sens direct (positif) : *tu dihell*

sens négatif : *tu leiel*

sens opposé : *gindu*

sens positif : *tu muiel*

sens rétrograde (négatif) : *tu sou*

sens trigonométrique : *tu tric'hornventouriel*

série : *steudad* g.

sextant : *c'hwevann* g.

si et seulement si : *mar ha nemet mar*

signe – : *gourzhell* b.

signe, symbole : *arouez* b.

signes (zodiaque) : *arouezioù*

similitude : *heñvelder* g.

simplifiable : *eeunadus*

simplification : *eeunadur* g.

simplifier : *eeunaat*

simplifier : *resaat*

singleton : *undañv* g.

sinus : *sinuz* g.

situation, disposition des faits :

plegenn b.

situer : *loañ*

situer, positionner : *savlec'hiañ*

sixième de plan : *c'hwec'hvedenn* b. *blaenenn*

solide : *sonnenn* b.

solution : *diskoulm* g.

solution de l'équation : *diskoulm an atalad*

solution générale : *diskoulm hollek*

solution graphique : *diskoulm kevregat -*

solution particulière : *diskoulm dibarek*

solution quelconque : *diskoulm diforzh*

solution unique : *diskoulm unel*

somme : *sammad* g.

somme de deus fonctions : *sammad div gevreizhenn*

somme finale : *sammad disoc'hel*

somme partielle : *sammad darnel*

somme vectorielle : *sammad sturiadel*

sommer : *sammata*

sommet (cône, ...) : *kern* b.

sommet (triangle ...) : *beg* g.

sommet de la parabole : *krouzell* b. *ar barabolenn*

sommet principal : *pennveg* g.

sommet, extremum d'une courbe : *eizhapoent* g.

sommets consécutifs : *begoù kenheuilh*

sommets d'un polygone : *begoù ul lieskorn*

source : *tarzh* g.

sous-anneau : *iswalenn* b.

sous-anneau commutatif et unitaire : *iswalenn gantamsavat hag unanek*

sous-arbre : *iswezenn* b.

sous-corps : *iskorf* g.

sous-ensemble : *isteskad* g.

sous-ensemble infini : *isteskad anvevenn*

sous-espace vectoriel : *isegor* g. *sturiadel*

sous-groupe : *isstroll* g.

sous-groupe abélien : *isstroll abelel*

sous-jacent à : *danlec'hiet da*

sous-multiple : *ranngementenn* b.

soustraction : *lamadur* g.

soustraire : *lemel* bn. *lam-*

spécifique (masse, ...) : *rummel*

sphère : *pellenn* b.

sphère terrestre : *pellenn douar*

ssi : *mmar*

stabilité : *stabilded* b.

stable : *stabil*

statistique (relatif à la science) : *stadegouriezhel*

statistique : *stadegel*

statut : *staelad* g.

stère : *ster* g.

stictement parallèle : *kenstur strizh*

strictement croissant : *kengresk strizh*

strictement croissant : *war gresk strizh*

strictement décroissant : *gingresk strizh*

strictement décroissant : *war zigresk strizh*

strictement monotone : *unton strizh*

strictement négatif : *leiel strizh*

strictement plus grand que : *brasoc'h strizh eget*

strictement plus petit que : *bihanoc'h strizh eget*

strictement positif : *muiel strizh*

structure : *framm* g.

structure : *luniad* g.

structure : *luniadur* g.

structure affine : *luniadur keouenn*
structure d'anneau : *luniadur a walenn*
structure d'espace vectoriel : *luniadur a egor sturiadel*
structure de corps : *luniadur a gorf*
subdivision : *isrannadur* g.
successeur : *arlerc'hiad* g.
suffisant : *spirus*
suite : *heuliad* g.
suite alternée : *heuliad pebeilat*
suite arithmétique : *heuliad niveroniel*
suite composée : *heuliad kediat*
suite convergente : *heuliad kengerc'hus*
suite croissante : *heuliad kengresk*
suite croissante de réels : *heuliad war gresk a werc'helion*
suite croissante et majorée : *heuliad kengresk ha muiantet*
suite décroissante : *heuliad gingresk*
suite décroissante et minorée : *heuliad gingresk ha leiantet*
suite finie : *heuliad bevennek*
suite finie croissante : *heuliad bevennek war gresk*
suite géométrique : *heuliad mentoniel*
suite inductive : *heuliad dazreat*
suite infinie : *heuliad anvevenn*
suite récurrente : *heuliad darren*
suite statistique : *heuliad stadegel*
suites adjacentes : *heuliadoù kefin*
suites de nombres : *heuliadoù niveroù*
suites numériques : *heuliadoù niverel*
suites réelles : *heuliadoù gwerc'hel*
suivant, lié à : *a-zalc'h ouzh*
sujet (d'étude) : *divoud* g.
supplémentaire : *skladus*
support de l'axe : *skor* g. *an ahel*
support de la droite affine : *skor an eeunenn geouenn*
support de la droite euclidienne : *skor an eeunenn euklidel*
sur : *war*
surface (grandeur) : *gorreenn* b.
surface conique : *gorreenn gernennek*
surface conique : *kernc'horreenn* b.
surface cylindrique : *gorreenn granennek*
surface cylindrique : *kranc'horreenn* b.
surface fermée : *gorreenn serr*
surface plane : *gorreenn blaen*
surface prismatique : *gorreenn gengerek*
surface prismatique : *kengerc'horreenn* b.
surface pyramidale : *gorreenn gerndalek*
surjectif : *arsaezhat*
surjection : *arsaezhadur* g.
surjection : *arsaezhañ*
sus-dit, le même : *kez*
symbole de Peirce : *arouez Peirce*
symbole de Sheffer : *arouez Sheffer*
symbole $\wedge$: *kernell* b.
symboliser : *aroueziñ*
symétrie (figure) : *kemparzhegezh* b.
symétrie (figure) : *kemparzh* g.
symétrie (transformation) :
kemparzhadur g.
symétrie axiale : *kemparzhadur ahelel*
symétrie axiale : *kemparzhiñ ahelel*
symétrie centrale : *kemparzh kreizel*
symétrie centrale : *kemparzhadur kreizel*
symétrie centrale : *kemparzhiñ kreizel*
symétrie de centre O : *kemparzhiñ a greiz O*
symétrie oblique : *kemparzh a-veskell*

symétrie oblique : *kemparzhiñ a-veskell*

symétrie orthogonale : *kemparzh diaskouer*

symétrie orthogonale : *kemparzhadur diaskouer*

symétrie orthogonale : *kemparzhiñ diaskouer*

symétrie par rapport à un axe : *kemparzhadur e-keñver un ahel*

symétrie suivant l'axe : *kemparzh diouzh an ahel*

symétrique (image) : *kemparzhad* g.

symétrique (loi de composition) : *kemparzheg* g. *-où*

symétrique : *kemparzhek (da)*

symétrisable : *kemparzhadus*

synthèse : *kendodiñ*

systématique : *reizhiadek*

système (de numération) de base *m* : *reizhiad* m-*redel*

système : *reizhiad* b.

système binaire : *reizhiad daouredel*

système d'axes quelconques : *reizhiad aheliou diforzh*

système d'équations : *reizhiad ataladoù*

système d'équations affines : *reizhiad ataladoù keouenn*

système d'inéquations : *reizhiad diataladoù*

système de numération : *reizhiad niveriñ*

système de points pondérés : *reizhiad poentoù daspouezet*

système décimal : *reizhiad dek*

système décimal : *reizhiad dekredel*

système générateur : *reizhiad c'haner*

système hexadécimal : *reizhiad c'hwezekredel*

système libre : *reizhiad dizalc'h*

T

T inversé : *gin-te*

table d'addition : *taolenn sammañ*

table d'application : *taolenn arloadur*

table d'opération : *taolenn niñvadur*

table de multiplication : *taolenn liesaat*

table de pythagore : *taolenn Pitagoras*

table de vérité : *taolenn wirded*

table numérique : *taolenn niverel*

tableau : *rezi* g. *-ïoù*

tableau : *taolenn* b.

tableau carré : *rezi karrezek*

tableau cartésien : *rezi kartezel*

tableau de signes : *taolenn arouezioù*

tableau de variations : *taolenn argemmoù*

tableau des dérivées des fonctions usuelles : *taolenn diarroudennoù ar c'hevreizhennoù boas*

tableau des valeurs : *taolennad werzhadoù*

tableau ordonné : *taolenn urzhiet*

tableau rectangulaire : *taolenn reizhkorn*

tangent à : *a-spin da*

tangent extérieurement à : *a-spin diavaez da*

tangent intérieurement à : *a-spin diabarzh da*

tangente : *spinenn* b.

tangente : *tangent* g.

tautologie : *arunderc'had* g.

taux d'accroissement : *feur kreskiñ*

taux de variation d'une fonction : *feur* g. *argemmañ ur gevreizhenn*

té : *te* g.

technique (procédé) : *kalvezder* g. *-ioù*

tel que : *hevelep ma*

tendre vers : *tennañ war-du (etrezek)*
terme : *termen* g.
terme de plus haut degré : *termen uhelañ derez*
terme général : *termen hollek*
termes de la suite : *termenoù an heuliad*
termes moyens, extrêmes : *termenoù nesañ, pellañ*
tétraèdre : *pevarzaleg* g.
tétraèdre régulier : *pevarzaleg reoliek*
théorème : *delakadenn* b.
théorème de Cramer : *delakadenn Cramer*
théorème de Pythagore : *delakadenn Pitagoras*
théorème de Rolle : *delakadenn Rolle*
théorème dethalès : *delakadenn Tales*
théorème des accroissements finis : *delakadenn ar c'hreskoù bevennek*
théorie : *damkaniezh* b.
théorie de l'information : *damkaniezh ar stlenn*
théorie des graphes : *damkaniezh ar grafoù*
théorique : *damkanel*
tierce : *trede*
tige : *garenn* b.
tilde : *tonnell* b.
tonne : *tonenn* b.
tracer : *tresañ*
traduction : *treuztaol* g.
trajet : *treug* g.
transférer : *treuzdougen*
transformation : *treuzfurmadur* g.
transformé (image) : *treuzfurmad* g.
transformer : *treuzfurmiñ*
transitif : *trazeat*
translation : *treuzkludadur* g.
translation : *treuzkludañ*
translation de vecteur $\vec{v}$: *treuzkludañ a sturiadell* $\vec{v}$
translation ponctuelle : *treuzkludadur poentel*
trapèze : *tristurieg* g.
treillis : *treilh* b.
triangle : *tric'horn* g.
triangle : *trizueg* g.
triangle droit : *tric'horn serzh*
triangle droit isocèle : *tric'horn serzh keitgarek*
triangle équilatéral : *tric'horn keittuek*
triangle isocèle : *tric'horn keitgarek*
triangle quelconque : *tric'horn diforzh*
tridimensionnel, àtrois dimensions : *teirment*
trigonométrie : *tric'hornventouriezh* b.
trigonométrique : *tric'hornventouriel*
trinôme : *trinom* g.
triplet : *triac'h* b. *-où*
tripoint : *trifoent* g.
troncature (résultat) : *krennad* g.
troncature, tronquer : *krennañ*
type : *rizh* g.

U, V, Z

unique : *unel*
unitaire, unifère : *unanek*
unité : *unanenn* b.
unité astronomique : *unanenn steredoniel*
unité de longueur : *unanenn regad*
unités d'aire : *unanennoù gorread*
unités de capacité : *unanennoù endalc'had*
unités de masse volumique : *unanennoù tolzder ec'honel*

unités de mesure des secteurs angulaires : *unanennoù muzuliañ ar gennadoù korn*

unités de volume : *unanennoù ec'honad*

valable, valide : *talvoudek*

valeur : *gwerzh* b. *-ioù*

valeur : *gwerzhad* b.

valeur absolue : *gwerzh(ad) dizave*

valeur approchée : *gwerzh(ad) arnesadek*

valeur approchée par défaut : *gwerzh(ad) isarnesadek*

valeur approchée par excès : *gwerzh(ad) uc'harnesadek*

valeur de vérité : *gwerzhad wirded*

valeur logique : *gwerzhad vezoniel*

valeur moyenne de la fonction : *gwerzh keitat ar gevreizhenn*

valeurs entières : *gwerzhadoù kevan*

variable : *argemmenn* b.

variable : *argemmus*

variable réelle : *argemmenn werc'hel*

variables propositionnelles : *argemmennoù erganadel*

variation (une ~) : *argemmad* g.

variation : *argemm* g.

variation : *argemmadur* g.

variations de la fonction : *argemmoù ar gevreizhenn*

varier : *argemmañ*

vecteur : *sturiadell* b.

vecteur de base : *sturiadell diazez*

vecteur directeur : *sturiadell roud*

vecteur fixe : *sturiadell fest*

vecteur normal à un plan : *sturiadell skoueriek war ur blaenenn*

vecteur normé : *sturiadell reolel*

vecteur nul : *sturiadell vannel*

vecteur opposé : *sturiadell enebat*

vecteur somme : *sturiadell sammad*

vecteur unitaire : *sturiadell unan(enn)*

vecteurs de l'espace : *sturiadelloù an egor*

vecteurs de la droite : *sturiadelloù an eeunenn*

vecteurs du plan : *sturiadelloù ar blaenenn*

vecteurs non colinéaires : *sturiadelloù ankenroud*

vectoriel : *sturiadel*

vérifier : *gwiriañ*

vérité (logique) : *gwirded* b.

vertical(ement) : *a-zerc'h*

verticale : *derc'hlinenn* b.

vide : *goullo*

virgule : *skej* g.

voisinage : *amezegiezh* b.

volume (grandeur) : *ec'honenn* b.

volume (mesure) : *ec'honad* g.

volume conique : *kernec'honenn* b.

volume cylindrique (solide) : *kranec'honenn* b.

volume sphérique (solide) : *pellennec'honad* g.

vrai : *gwir*

zéro : *mann* g.

zéro d'un polynôme : *mann ur polinom*

zéro double : *mann daouel*

zéros de la fonction : *mannoù ar gevreizhenn*

zéros du trinôme du second degré : *mannoù an trinom eil derez*

TAOLENN

TAOLENN