

KIS-548 – An arouezioù + ha – er Jedoniezh

(GE da YBAN – 14 07 97)

Savet eo bet anvadur an arouezioù Jedoniezh o loc'hañ diwar anvadur arouezioù ar Yezhoniezh hag ar skridaozerezh ha dav eo bet ren ur c'hempenn war ar re-mañ.

Kentañ kammed eo bet savelañ rumm an *arouezioù azbommañ*. An diforc'h etre *arouez azverkañ* hag *arouez azbommañ*, ouzhpenn ma'z eo azdodet hounnezh ouzh un arouezenn ha houmañ ouzh ur bomm (sl. KIS-535, La-11, pp. 188 hh.), eo e talvez hounnezh *ent kanteulel* ha houmañ *ent arganteulel*. En arouezenn *c'h* e talvez ar skrab da amparañ an unvez kanteulel distaget [x] (ent divellek enta). Er bomm 3 < 4 e talvez < dre e arganteul "bihanoc'h eget" (ent vellek enta).

Unan eus ar c'hentañ kudennoù hon eus da ziskoulmañ eo penaos envel an arouezioù a-getep etre 3 ha 2 er bomm 3 – 2, 3 + 2 ha dirak 2 e –2, +2 :

~ e 3 – 2, 3 + 2 e talvez – ha + dre o arganteul hag arouezioù azbommañ ez eus anezho ;

~ e –2, +2, ha reizh eo lavarout e talvezont da amparañ un unvez kanteulel ? D'ar jedoniour da respont. Techet on da respont ya, marteze dindan levezon ar Yezhoniezh. N'eo ket dibouez an aters ha pa ve hepken da gentañ evit kempoellaat an anvadur.

Mar be kantrat an aters ha yaek ar respont e welfen da beurziskoulm :

~ lenn 3 – 2 : tri *lam* daou, 3 + 2 : tri *samm* daou, an azbommoù o vezañ un *ened* (ur *rezell* enta) hag ur *groaz* ;

~ lenn –2, +2 : *lei* daou, *mui* daou, an azverk o vezañ un *rakrezan* hag un *rakkroazan*.

E se, e ve lennet $3 - (-2)$: tri *lam lei* daou ; $(-3) + (-2)$: *lei tri samm lei* daou. Chom a ra da c'houzout pe dalvoud (pe boell da gentañ) he deus seurt kinnigadenn e-keñver Jedoniezh. Hag o lakaat he defe poell, ha ne zegasfe ket re a zizurzh en hanc'herieg en arver.

Evit an arouezioù \pm ha \mp , o lakaat e ve degemeret va c'hinnigadenn diaraok, e vent anvet er Jedoniezh *muilei* ha *leimui* mar bent gougevan ouzh ur c'hanteul, ha *sammlam*, *lamsamm* mar dalvezfent dre o arganteul. Ent furlmel, er moulerezh lakaomp, e vent anvet a-getep : *kroazan rezan* (pe well : *kroazrezan*) en degouezh kentañ, *kroazell rezell* (pe well : *kroazrezell*) en eil. En eil degouezh evel en egile, ne zerefe ket ober un azverk divellek eus an div arouez arosodet, an div o vezañ pe azverkoù pe azbommoù a-gevret.

Kudenn ar “varrenn” lakaet gwech a-us d'un arouezenn, gwech a-us d'ur bomm. Lavarout a rez he deus an hevelep kefridi en daou zegouezh. Da gompren eo e talvez dre he arganteul hag ez eo un *usrezell* ?

(GE da YBAN – 17 07 97)

Lakaet 'c'h eus anat din dec'h da noz er pellgomz ar berr e oa va arnod da zedallvout kealioù ar c'hanteul hag an arganteul d'ar Jedoniezh.

Kentañ tra 'm eus graet beure-mañ eo digeriñ *Dictionnaire de Mathématiques élémentaires* gant Stella BARUK (Éd. du Seuil 1992) er pajennoù “*signe*” (pp. 1116 hh.). Poan 'm eus o heuliañ en abeg d'an arver a ra an aozerez eus termennoù 'zo.

Despizañ a ra an arouezioù jedoniel evel “des signes désignant des objets” — ha despizañ “*objets*” evel nep hennad o tisoc'h eus ur peurzespizadur. Seurt despizadur a'n arouezioù avat ne zere mui ouzh ar re anvet ganti “*signes d'opérateurs*” pa ziskler : “...ils ne font pas que rendre compte d'une action effectuée sur des objets (fonction opératoire), mais ‘demandent’ qu'on l'effectue (fonction prédicatoire)”. (p. 1118) Hevelep arouezioù o defe enta div gefridi : *denotañ* ergorennoù, *arc'hañ* ur gwezhiadur (kefridioù ar re-mañ deskrivet er Yezhoniezh evel *diarhebiñ* hag *annebiñ*, sl. KIS-291, La-08, pp. 170 hh.)

Diwar se, ez eo diaes intent un dra bennak en termenou arveret gant S. BARUK :
 1° *signes opératoires* (signes des ‘quatre opérations’) ; p. 796
 e ro *opérateur* evel anv all an arouezioù-se ; 3° *signes d'opérateurs* — a gavan gwall
 forc'hellek. A-du-rall, e ra 2° *signes prédicateurs* eus ar re “qui annoncent la nature d'un
 nombre” — amañ, div arbennadenn : a) ar wech kentañ ma welan arveret Gl. *prédicateur* na
 gavan nag er Boelloniezh nag er C'hramadeg, met marteze ez eo va diouiziegezh a zo da
 damall ; b) an despizadur a ro da *prédicateur* e 2° (“qui annoncent”) zo e dislavar gant an
 despizadur roet e 3° (“qui demandent”).

Ha ne gav ket dit e tleer, war-benn emdennañ eus an drezeg, kas pelloc'h un dezrn eus
 ar *werc'helezh jedoniel* ? Rak ar Jedoniezh a amprest termenou digant al lavar diwnet e
 darempred ar *werc'helezh ved* ha danzeet dre ziskiblezhioù evel ar Yezhoniezh hag ar
 Boelloniezh hep bezañ peurrenet, war a hañval, an treuzdoug, hemañ o c'houl studi geñverel an
 div *werc'helezh*. E KIS-471, La-10, p. 273 e'm eus klasket divrazañ an darempred arouez-
werc'helezh e pep hini eus an div *werc'helezh*. Er *werc'helezh ved* e teskriver tri derez :
kanteul-arganteul-ergeñverenn, er *werc'helezh jedoniel* e steuz *arganteul* hag *ergeñverenn* e
 gounid un eil derez hepken a anven *meizad* (SAUSSURE a rae *concept* ivez eus an *arganteul*),
ergeñverad (dre heñveladur ouzh *ergorad*), anvadoù bastard : eeunoc'h tremen gant *ergorenn*
jedoniel, gwelloc'h eget *ergeñverenn jedoniel* a intentfed : "parzhiat er *werc'helezh jedoniel*
 evel ma'z eo parzhiat an *ergeñverenn* er *werc'helezh ved*", gwelloc'h ivez eget *arganteul*
(meizad) jedoniel, "keveleb an *arganteul* (ar *meizad*) el lavar" — touellus e ve teurel pontoù eus
 ar seurt dreist an islonk a zo etre lavar boutin ha “lavar” ar Jedoniezh : etre *lavar* hag *areg*. (Se
 ne vir ket avat e ranker despizañ strizh an termen *ergorenn jedoniel*.)

Hemañ eo pennañ naouuster an *areg* : an arouezioù en ampar eo a spir da savelañ ha da
 anaout ar *werc'helezh jedoniel* (endra ziwan al *lavar* en ur *werc'helezh* a zo bepred eno-endeo) ;
 talvout a ra enta an arouezioù *jedoniel* a) da zenotañ klok ha sonn pep *ergorenn jedoniel* ; b) da
 wezhiañ warno evit o sevel, o zreuzfurmiñ hag o disav. Amañ e splanna an diforc'h etre
arouez lavarel hag *arouez aregel*. Er *werc'helezh ved* e vez diouzh un tu darempredoù a-zerc'h etre
arouez, ster ha bed (pe *kanteul*, *arganteul*, *ergeñverenn*), diouzh an tu all darempredoù a-zremm
 etre an arouezioù o unan, an daou rumm darempredoù o vezañ dedroüs ha digor, diglok ha
 fiñvus, e pep poent hag e pep pred. Er *werc'helezh jedoniel*, en eneb, ez eo argrenn ha kloc,
 klok ha sonn an darempred a-zerc'h, hag a-walc'h eo kaout krap war an arouez evit kaout krap
 war an

ergorenn arouezet ; pep tra a dremen en devoud e par an darempredoù a-zremm. Ken e c'haller dezren nep ergorenn diouzh ergorennoù all, da skouer : $3 = 1 + 1 + 1$, h.a.

A se un diforc'h all. Mar kemerer an darvoudoù en diarsell annebiñ-diarhebiñ, e stader daou saviad disheñvel bras. Er bed e vez fuilh ar c'hor annebiñ-diarhebiñ ; mar arc'han da unan bennak : “deus” (par an annebiñ), e vez an disoc'h e dalc'h parennoù anrakweladus : “dont a ra, ne zeu ket, dont a ray, dont a rafe, h.a.” (par an diarhebiñ). En eneb, er werc'helezh jedoniel e vez spis ar c'hor ; pep annebiñ a-berzh ar jedoniour a lak darvoudoù da c'hoarvezout hervez ur reizhiad kloz a zezvoù diforc'hell ; mar arc'h : “bezent sammet 2 ha 3” (par an annebiñ), e c'hoarvez ar sammadur a zenoter “ $2 + 3 = 5$ ” (par an diarhebiñ). Ar Jedoniezh, e rezh an urzhiataer diouzh an dro, a lavar d'ar jedoniourion : annebit, arc'hit, me a ray ar peurrest. Alese e spurmantan daou saviad d'an arouez + : ur saviad anebadel (arc'hadel) er bomm “bezent sammet 2 ha 3”, a skrivfed kenkoulz : “bezent +et 2 ha 3” ; ur saviad diarhebadel (denotadel), er bomm ma stader “ $2 + 3 = 5$ ”, a skrivfed kenkoulz : “bet +et 2 ha 3, e tisoc'h 5”.

Er poent-mañ, diwar levr S. BARUK, e choman gant va atersoù, atersoù a ran ouzh ar jedoniour :

~ S. BARUK a laka a-wel un diforc'h etre “*fonction opératoire*” ha “*fonction prédicatoire*” a intentan mar heulian he displegadurioù evel diforc'h etre denotañ hag arc'hañ. Hogen mar sellan ouzh an arouez + e-barzh $3 + 2$ e c'hallan merzhout enni : a) un arouez, niñvader ar sammañ, b) un arc'had, an urzh da sammañ. Hag un diforc'h eus ar seurt a lak hi etre “*signe opératoire*” ha “*signe d'opérateur*” ? Rak ne zeuan ket a-benn da emreterañ en he diskleriadurioù :

≈ E-barzh $3 - 2$, e ra eus – Gl. “*signe opératoire*”, “*opérateur*” ; OK, Br. niñvader.

≈ E-barzh -2 , e ra eus – Gl. “*signe prédicatoire*” ; lenn a ra -2 “l'opposé de +2” ; ent poelloniell, an erganad : “ -2 zo rageneb +2” n'eo ket un *ardaoliñ* (Gl. *prédication*) met un *daveiñ* (Gl. *relation*) ; hogen un erganad *ardaoliñ* eo : “ -2 zo leiel” ; ha diwar se e ra S. BARUK gant

prédicatoire ? Met perak lavarout er c'hevarad da heul : “[...] ‘demandent’ qu'on l'effectue (*fonction prédicatoire*)” ?

≈ E-barzh $-(-2)$, e ra eus ar c'hentañ – “*signe d'opérateur*” ouzh he deskrivañ evel etreat d'an daou rumm all. Ha da gompren e ve : "arouez oc'h arc'hañ seveniñ an niñvadur merket gant an niñvader –" ?

Sklerijenn mar plij !

(YBAN da GE – 18 07 97)

Mechal ha ret eo ober diforc'hioù kement-se en arver an arouezioù. Da skouer, “+” ha “–” zo dezho lies kefridi ha ne gav ket din e ve fur paotaat an anvadoù.

A-du ganit da heul da lizher eus ar 17 07 97 : n'eo ket sklaer kenan pezh a lavar Stella BARUK. Da skouer p. 875, enmoned PLUS, e skriv evit “+7” ha “+(-3 + 2 - 1)” : “Dans ces deux cas, ce plus est traduit par un signe prédicatoire”, tra ma haer p. 111 :

“Dans l'expression $-[-(4) + (-2)]$ [...], le moins devant le crochet de prédicatoire ‘devient’ opérateur.”

Forzh penaos, un dra zo anat : da aroueziñ un niver leiel e reer dave d'an niver muiel kemparzhed en niñvadur “+”. A se, an arouez “–” dirak “2” e “–2” da skouer zo arouez ar c'hemparzhadur, amañ anvet dres *gourzharoueziñ*. Evel just “–2” a arouez un niver leiel – eleze un hennad –, nemet ne c'haller ket e aroueziñ hep ober dave da “2” ! N'eus ket da dortal, an arouez “–” a dalvez en degouezh-mañ evit un niñvadur ivez : ar *gourzharoueziñ*. Pezh a c'hoarvez amañ eo e niñv ar *gourzharoueziñ* war ur bomm eeun kenan – un niver muiel, “2” da skouer – evit reiñ neuze an niver leiel “–2”. Ne welan diforc'h aniel ebet gant ar *gourzharoueziñ* en ur bomm evel : “ $-(3 + 5)$ ”.

Evel a lavaren dit er pellgomz ez eo luziet a-walc'h arver an termen Gl. *opérateur*. Aozerion 'zo a ra eus “+5” an niñvader "ouzhpenañ pemp". En un destenn gant an un aozer avat e teu “5” da vezañ an *opérateur*¹¹

¹¹ Sl. André WARUSFEL, *Les Nombres et leurs mystères*, Éditions du Seuil, 1961, pp. 45–48.
KIS-548

(pezh zo tostoc'h d'ar c'henglev er Jedoniezh, pa'z eo un niñvader un elfenn eus un teskad a niñv war un teskad all). N'eo ket va amboaz reveulziañ boazioù ar Stlenneg, an Elektronik hag a-du emañ evit astenn an termen Br. *niñvader* da arouez an niñvadur, marteze o heuliañ ur boaz amerikan “OPERATOR, symbol or function denoting an operation”. E se e c'haller lavarout krak ha berr ez eo “+” ha “-” arouezioù a) niñvadurioù unadek : $-(3 + 2)$ pe $-(2)$ pe -2 pe $+ [3 - (2 - 1)]$; b) niñvadurioù daouadek : $3 + 2$ pe $5 - 6$ pe $-(2 + 3) + 5$. Ar saozneg-amerikaneg a lavar “symbol or function” : “-2” zo da geñveriañ gant “ $\sqrt{2}$ ”, an arouezioù “-” pe “ $\sqrt{\quad}$ ” o vezañ arouezioù niñvadurioù, tra ma'z int arouezioù kevreizhennoù mar skriver “-x” pe “ \sqrt{x} ”. Ha c'hoazh... Trawalc'h a bismigadurioù.

A se e ven a-du gant **kroaz** evit “+” lennet "mui" e pep lec'h hag ur petrefe all evit “-” lennet "lei" e pep lec'h ivez. E gwir n'ouzon ket hag an termen dereat eo *enned* : menegiñ a rez ar Br. *tired* e KIS-504, La-10. Lenn a ran ivez war Robin WILLIAMS & Bernard MILOT, *Le Mac est plus qu'une machine à écrire*, Eyrolles, 1992 : “Ce signe est rarement utilisé en français [le tiret court sur demi-cadratin]. On le préfère quelquefois au trait d'union dans la composition des formules mathématiques où il prend valeur de moins.” A-du-rall e welan ivez war Christian ROLLAND, *LATEX guide pratique*, Addison-Wesley, 1995, ez eus pevar zired : “trait d'union, tiret court, tiret long, signe moins”. An arouez lei a hañval un tammig hiroc'h eget an enned hag un tammig tevoc'h ivez. Evit ar Mac ne ouzon ket. Un taol arnod er c'horf 48 : amañ e hañval bezan berroc'h al “lei” !

kedell : —	enned : <u>n</u>	arouez lei an embanner ataladoù en nec'h hag an enned en traoñ :	—	emmed : <u>m</u>
-------------------	-------------------------	--	----------	-------------------------

Evit an istor ez eo mat gouzout e voe “-” ha “+” notet a-getep \bar{m} ha \bar{p} en niñvadurioù ; a-du-rall er 15^t kantved CHUQUET a arvere \bar{m} ivez da aroueziñ an niveroù leiel (“ $\bar{m}2$ ” da skouer o talvout “-2”) — ar wech kentañ e oa, war a hañval, ma veneged an niveroù leiel. Hervez tud 'zo, an arouez “-” a zeufe eus an usrezell war an “m” ; heñvel dra, ar “+” arveret en Alamagn da vare an Azginivelezh (15^t kantved) a veze ur skrivad eus “&” "hag". Evel just e c'hallfed — reñver n'eo ket euver — lavarout er

pleustr boutin “hag” pe “samm” evit “+” ha “lam” evit “-”... Jedoniourion 'zo o deus kinniget doareoù all da arouezañ an niveroù leiel ($\bar{2}$) hag ar gourzharouezañ (0x), hogen n'o deus ket graet berzh evit doare. A-benn ar fin e kav din ez eo gwell kaout un anvad all evit al lei. Miromp an *enned* evit ar moulezh hag arverioù all. Evel just e ve tu da gemer *tired*. Re vras eo e erdalad avat. Goude ur prantad tastornat e teu ganin un dornad danvez diskoulmoù :

a) an arouez “-” zo evel treuzell an arouez “kroaz” ha neuze e c'haller soñjal e *treuzell, brec'h*. An hini gentañ a zegas koun eus an treuz d'ober evit “2” niver muiel da reiñ “-2” niver leiel ;

b) an arouez “-” zo evel an tenn o sachañ an “2” e “-2”. Br. *tenn* a glot neuze gant Gl. *trait, turet*. Lavaret e vez ivez “tennañ ul linenn”. Alese un danvez kinnig c'hoazh : Br. *tenn* gourel ; c) quid eus *gourzhell*, diwar *gourzh* ? Sl. Kb. *gwrthol* "backwards". Daoust ma'z eo ivez
“+2”
gourzharouez

“-2” ... Hogen da gaout gourzharouez un niver, eleze an elfenn gemparzhiek evit an niñvadur “+” ez arloer an niñvader “-”. Heñvel dra, *gourzhell* a glotfe ivez evit an niñvadur, rak da gaout “3 - 2” ez eer war-gil eus 2 adalek 3 ; d) kinnigoù all : *ibil, teodenn, flip, lorik, filenn, spletenn*... Marteze ez eo *gourzhell* a zo diouzh va grad, nemet ez on prest da adwelout va foelladenn.

Ar *c'hourzhell* gwelet amañ diaraok n'he deus ket kalz tra da welout gant an *usrezell* lakaet war ur bomm. Dres, petra eo despizadur ur bomm ? A pe $A \cup B$ zo bommoù oc'h arouezañ teskadoù ha ar glokaenn anezho a vo notet a-getep \bar{A} hag $\overline{A \cup B}$. E se e vo graet *usrezell* eus an uslinenn en daou zegouezh.

An arouez \pm *kroaz gourzhell* a vez lennet *muilei*, p'o deus an div arouez kendeuzet bep a gefridi, da skouer : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Heñvel dra evit \mp *gourzhell kroaz* lennet *leimui*.

En arouezioù \neq , \notin , \nsubseteq ez eus gant “/” un arvez arganteulel (ar c'hontrol eus) a gaver er pleustr boutin pa “varrenner” un dra bennak. En degouezh-mañ ez eo un arouez azverkañ hag un *arveskan* eo. Neuze, a-getep, *divrezell beskan*, *tribiz beskan*, *kevell beskan*. Hogen *beskell* en ur bomm evel : a / b . En derou e talvez al lostger *-an* e oa bihanoc'h an arouez azverkañ eget an arouez azverket. Soñjet 'm eus ur mare en ur verb “beskañ”, eleze *divrezell besket*, *tribiz besket*, *kevell besket*... Petra eo da vennoz ? Kuit a ober dave da arverioù ar Yezhoniezh, hag o vezañ ma'z eus ster gant ar “/”-se : *an-*, *ez-* ? Evit # zo *divrezell daouveskan*.

An arouez \rightarrow a vo *bir* traken. E se \vec{AB} pe \vec{u} zo sturiadelloù hag un *usvir* hon eus en daou zegouezh.

An arouezioù \tilde{O} , zo *kevell (is)rezell* ha *kilgevell (is)rezell*, pa dalvezont a-getep : “ \tilde{A} pe =” hag “... pe =”.

An arouezioù $+\infty$: *kroaz klomell* ; $-\infty$: *gourzhell klomell* ; $\pm\infty$: *kroaz gourzhell klomell*.

An arouez * : *sterenn* e pep lec'h pe *sterennig* ? (en amerikaneg ez eus *star* ha *bigstar*).

An arouez ! : *sikell* e pep lec'h.

Lennet e vo $|A$: *serzhell* A pe *A rakserzhell* ?

Mechal ha n'eo ket gwell envel ar bommoù gant o arouezioù hervez urzh ar skrivad. Diwar ar skouer diwezhañ-mañ ha n'eo ket ken fraezh *serzhell* A hag *A rakserzhell* ? Aze c'hoazh e c'hell ar “|” bezañ dirak ur bomm : $|(A \cup B)$ da skouer. Hag ur *serzhell* eo. A-benn ar fin dibaot a-walc'h (hag eñ zo e gwir ?) an arouezioù azverkañ e Jedoniezh : ne welan nemet \otimes , \oplus , eleze an *argoran*. (Sz.Am. *otimes*, *oplus*). Ha c'hoazh...